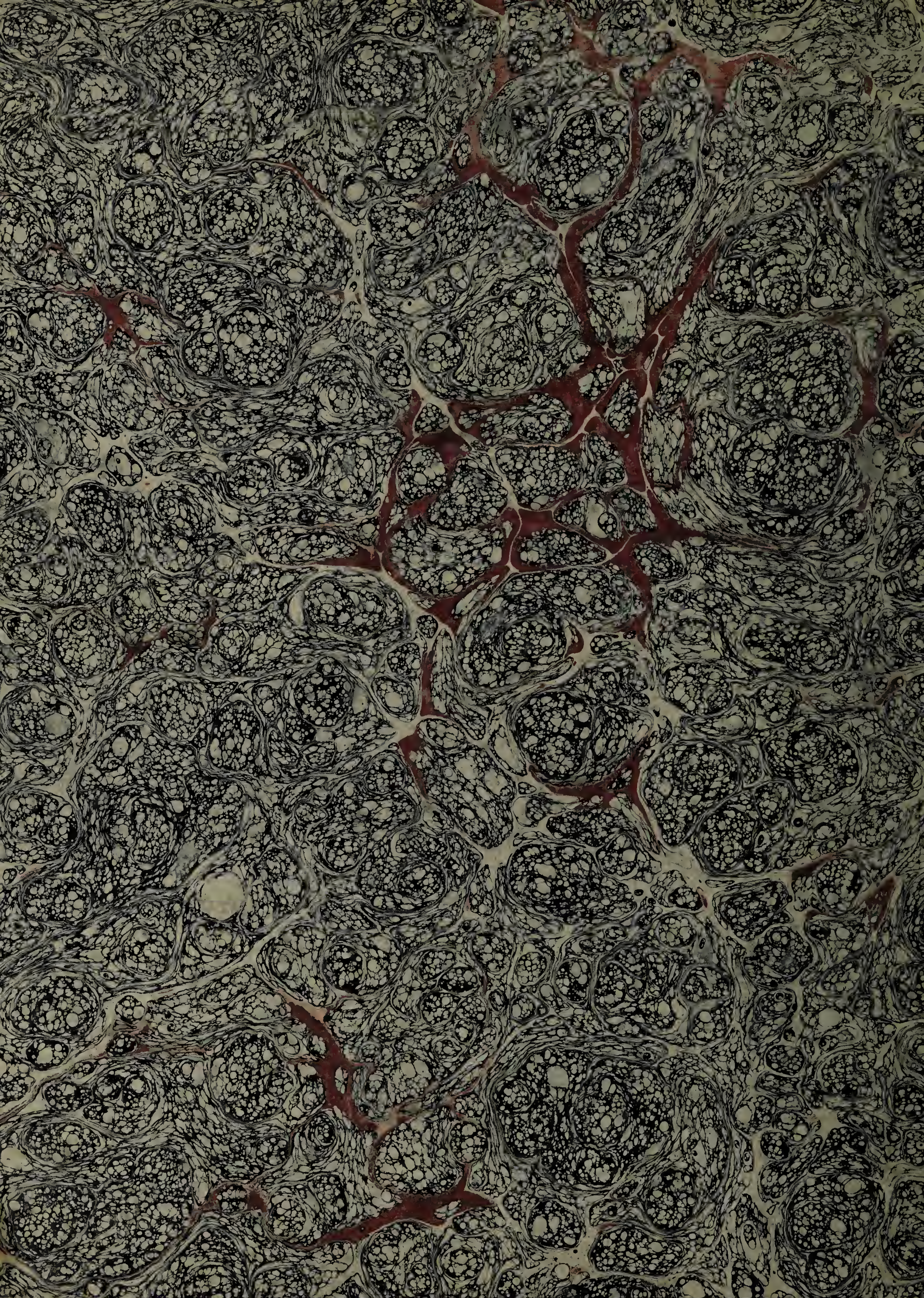
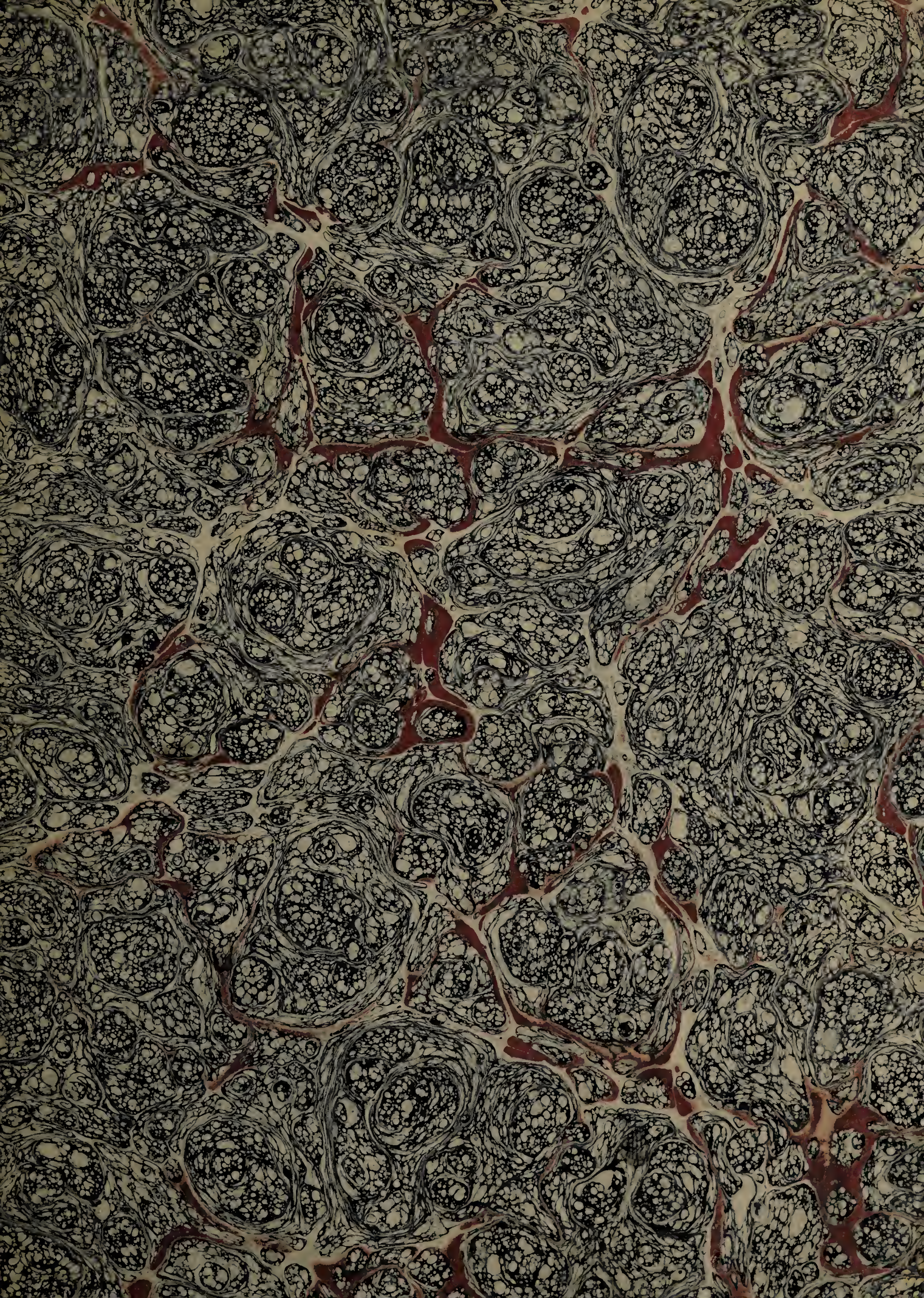




PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO;

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER,

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

Editio altera longè accuratior & emendatior.

TOMUS SECUNDUS.



COLONIÆ ALLOBROGUM,

Sumptibus CL. & ANT. PHILIBERT Bibliop.

MDCCLX.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII II.

FLORENTI,

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR & *Franciscus* JACQUIER.

MONITUM.

ALtera tandem PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Pars in lucem prodit. De motibus corporum in medio reſiſtente agitur potiſſimùm in hoc ſecundo NEWTONI Libro. Rem difficultatis plenam norunt omnes; ita tamen noſtra ſtuduimus accommodare commentaria ut iis qui in primi Libri lectione eâ quâ par eſt diligentiâ & attentione fuerint verſati, facilia planaque omnia futura eſſe ſperemus. Nec ſatis nobis fuit præclara Clariſſ. Autoris inventa explicare, nos ipſi quoque uſu didicimus nonnulla interdùm invenire quæ hùc & illùc in noſtris commentariis inſerere auſi ſumus. Sed quod maximum eſt hujuſce operis decus & ornamentum, nova quamplurima doctiſſimi EULERI problemata, quæ in egregio Mechanices Opere leguntur, addidimus. Noſtros etiam abundè locupletant commentarios pretioſa monumenta quibus *Acta Eruditorum* Lipſienſia exornarunt Clariſſ. Viri JOANNES & DANIEL BERNOULLIUS. Silentio tandem prætermittendus non eſt Illuſtriſſ. doctiſſimuſque POLENUS, cujus elegans de Logarithmicæ conſtructione Epiſtola, nonnullaque de motu aquarum experimenta nobis plurimùm profuêre. Sed longè majora ſunt

quàm verbis exprimi poſſint, de hoc univerſo opere Clariſſ. Viri JOAN. LUDOVICI CALANDRINI merita, qui, eâdem quam primi Libri initio laudavimus, diligentiâ indefeſſâque curâ huic ſecundæ parti invigilavit.

Reprehendendum multis fortaſſe videbitur quod oblatam frequenter occaſionem quaſi è manibus dimittentes, celeberrimas Philoſophorum controverſias vel omninò omittamus vel leviter duntaxat perſtringamus. Verùm ſciant eum fuiſſe NEWTONI ſcopum à quo ne latum unguem maximè vellemus diſcedere, ut ingenioſa quoque Syſtematum commenta è phyſicâ eliminaret atque profligaret. Nos itaque à Philoſophicis litibus maximè averſi, altercationes ſummo ſtudio declinavimus. Tot inſuper nova his de rebus ſcripta quotidiè circumferuntur ut juſti operis molem excederet hic ſecundus Liber, ſi recentiora explicare aggrederemur Philoſophorum placita.

Hanc ſecundam laboris noſtri partem benignè excipiant mathematicarum diſciplinarum Candidati, tertiamque tandem & ultimam anno proximè futuro expectent.

ROMÆ *in Regio Conventu SS*æ*. Trinitatis.*
Anno 1740.

INDEX SECTIONUM
DE MOTU CORPORUM,
TOMI II.

Index specialis Propositionum hujusce Tomi, seu Libri Secundi, ad calcem Tomi quarti reperietur.

ADMO-

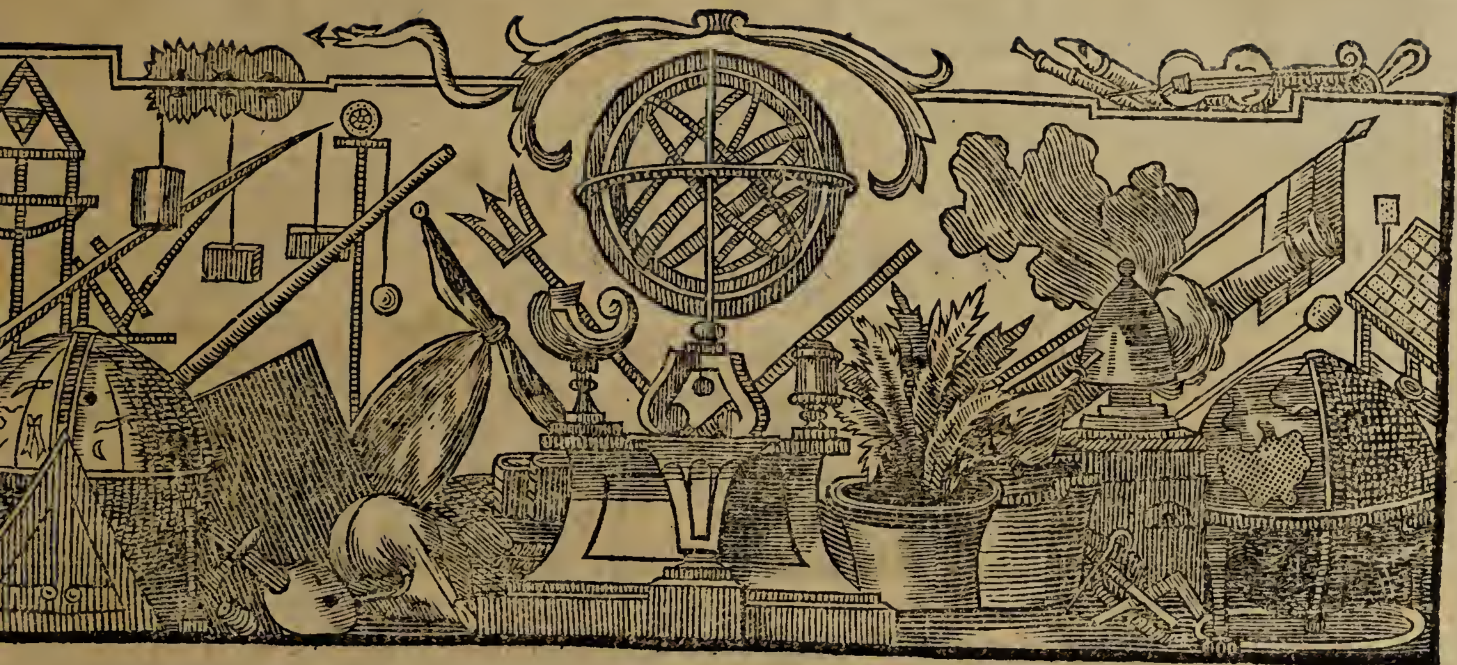
ADMONITIO.

In initio ſingularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco aſteriſcus * depictus eſt : à pagina verò 130 alter aſteriſcus ſubinde reperietur, cujus alius non eſt uſus quàm ut diſtinguat ea quæ inſerta ſunt ab Editore (eo jure ſibi ab Autoribus Commentarii conceſſo); idem etiam deſignat ſignum (†) quibuſdam notis præfixum, ne ſcilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipſis adhibitus.

Quid in novâ hac ſecundi, necnon prioris Tomi Editione præſtitum ſit, dicetur in limine tertii qui unà cum quarto, ſecundâ vice, Deo dante, lucem videbit anno proximo.

Datum GENEVÆ 30. *Aug.* 1759.

Le prix des 4. Volumes ſera de 36 Liv. de France, pour ceux qui payeront d'avance avant le mois de Novembre prochain, & enſuite 50 Liv.



DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus reſiſtitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

generales reſiſtentiæ notiones exponens.

1. Non poteſt corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim ſeu reſiſtentiam aliquam patiatur. Vis illa reſiſtentiæ, proportionalis eſt decremento motûs, quod dato tempore generat, & illius directio directioni mobilis ſemper oppoſita eſt (*per mot. Leg.* 2. *&* 3.) Quapropter datâ corporis maſsâ, reſiſtentia eſt ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit; datâ enim mobilis maſsâ, motûs decrementum eſt ut decrementum velocitatis (*6. Lib.* 1.). 1.

2. Vis reſiſtentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus, eſt ut motûs decrementum directè & temporis momen-

mentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directè (1) & dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

2. 3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrà directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans, & cum vi gravitatis, quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur, conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sive ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contrà hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

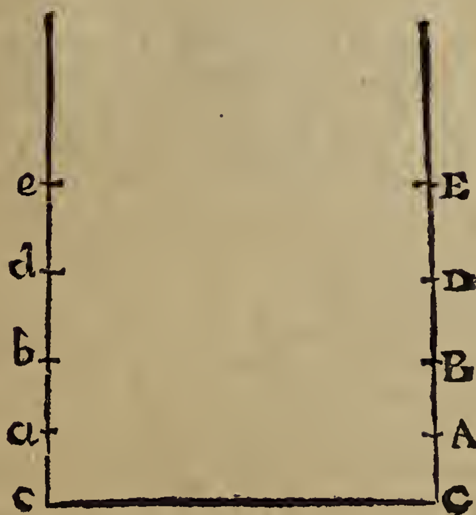
7. JAM verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex reactione partium medii, tresque sunt celebriores circà hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum Mathematicas consequentias NEWTONUS hoc libro exponit. 1ª. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, & tertia partim velocitati, & partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis sit cognitum partem quamdam resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis; in secundâ partim uniformis & partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis & partim ut quadratum velocitatis, & in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, & partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesibus nihil habet difficultatis, cùm uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cùm motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est *lib.* I. tres verò quæ sequuntur hypotheses non ægrè referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est) suppeditant, quod deinceps ostendemus.

8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, & cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea consideranda est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii & quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (*per motûs leg.* 2. *&* 3. *lib.* 1.) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, & ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, & quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurret, sicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum è lo-

è loco dimovet, & quæ in velocioribus motibus ſola ferè obſervatur.

9. Altera reſiſtentia quæ ex tenacitate partium fluidi uniformis naſcitur, conſtans eſt, aut quod idem eſt, temporis momento proportionalis, eamque in tardiſſimis motibus ſenſibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæſio ſit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus eſt ut partes illæ ſeparentur, corporique tranſitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, & ideò vis illa reſiſtentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis aſcendentis motum retardat, conferri poteſt. Nam corpora duo ſimilia & æqualia cùm pari velocitate è locis C & c per lineas CE, ce, ad rectam Cc normales projiciantur, & in locis æque altis A & a, B & b, D & d &c. æqualem patiantur reſiſtentiam; corpus quidem C reſiſtentiam experiatur à vi gravitatis conſtante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c reſiſtentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in ſpatiis verò intermediis AB & ab, BD & bd, &c. nullum ſit motibus obſtaculum; dum corpora perveniunt in A & a, æqualem habent velocitatem, & deindè victis æqualibus in A & a obſtaculis, pari adhuc velocitate per ſpatia minime reſiſtentia AB & ab, feruntur, & ſimili modo, ob æquales reſiſtentias in locis B & b per ſpatia BD & bd ſimul moventur, & ità deinceps eandem ſemper velocitatem in locis æque altis habent. Minuantur jam æqualia illa ſpatia AB & ab, BD & bd, &c. & eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis & reſiſtentiæ actio vel reactio continua reddatur, & corpora duo eandem ubique reſiſtentiam patientur, & in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè reſiſtentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, poteſt cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quieſcens (quod quidem vi gravitatis ſemper urgeretur) agere nullo modo poſſit.

10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, reſiſtentia eſt partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.).



11. LEMMA. In quâcunque reſiſtentiæ hypotheſi, corporis tam in medio reſiſtente quàm in vacuo moti velocitas finita in ſingulis locis eſt ut elementum ſpatii deſcripti directè & momentum temporis quo deſcribitur inversè. Velocitas enim uniformis eſt ut ſpatium quodcunque deſcriptum directè & tempus quo id ſpatium deſcribitur inversè. In medio autem ſive reſiſtente ſive vacuo velocitas per ſpatium infinitè parvum æquabilis eſt (6.) 11.

12. *Coroll.* 1. Hinc temporis momentum eſt ut momentum ſeu elementum ſpatii directè & velocitas inversè; momentum verò ſpatii ut velocitas & momentum temporis conjunctim.

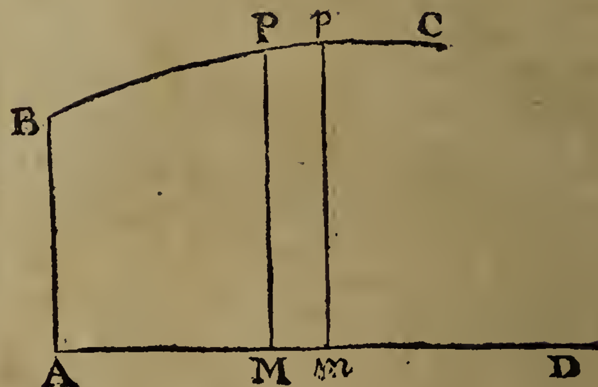
13. *Coroll.* 2. Si igitur velocitas dicatur v, ſpatium deſcriptum s, tempus quo deſcriptum eſt t, erit $v = \frac{ds}{dt}$, $v\,dt = ds$ & $dt = \frac{ds}{v}$, ſumptiſque fluentibus $S.\,v\,dt = s$ & $t = S.\,\frac{ds}{v}$.

14. 14. *Coroll.* 3. Si ità deſcripta fuerit curva B P C ut ejus applicatæ M P, m p, axi A D, normales, exponant velocitatem v, & abſciſſæ à puncto fixo A ſumptæ A M, A m tempus t, erectumque ſit perpendiculum A B curvæ occurrens in B, area A B P M exponit ſpatium tempore t deſcriptum. Sit enim applicata p m, priori P M infinitè propinqua, & erit M m $= dt$, adeóque areæ A B P M elementum M P p m $= v\,d\,t = d\,s$ (11) & proindè area A B P M $=$ S. $v\,dt = s$. Recta A D dicatur linea temporum & curva B P C linea celeritatum. Eodem modo ſi abſciſſa A M exponeret ſpatium deſcriptum s & applicata M P velocitatem inverſam, ità ut eſſet A M $= s$, & M P $= \frac{1}{v}$, area A B P M exponeret tempus quo ſpatium AM deſcriptum eſt; eſſet enim M P p m $= \frac{d\,s}{v} = d\,t$, & hinc area A B P M $=$ S. $\frac{d\,s}{v} = t$.

15. LEMMA. Si corpus datæ maſſæ ſolâ vi inſitâ in medio reſiſtente moveatur, *decrementum velocitatis*, erit ut *reſiſtentia* & *momentum temporis* conjunctim. *Incrementum* verò *ſpatii* erit ut *velocitas & velocitatis decrementum* directè & *reſiſtentia* inversè. Datâ enim corporis maſſâ, reſiſtentia eſt ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia & momentum temporis conjunctim. Quod erat 1um. Sed incrementum ſpatii eſt ut velocitas & momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis eſt ut decrementum velocitatis directè & reſiſtentia inversè (2); Quarè incrementum ſpatii eſt ut velocitas & illius decrementum directè & reſiſtentia inversè. Quod erat 2um.

16. *Coroll.* 1. Hinc reſiſtentia eſt ut velocitas & illius decrementum directè ac ſpatii incrementum inversè, & velocitas in ſuum decrementum ducta, eſt ut reſiſtentia & incrementum ſpatii conjunctim.

17. *Coroll.* 2. Quare ſi ſpatium dicatur s, tempus t, velocitas v, reſiſtentia r, erit $r\,d\,t = -\,d\,v$, & $r\,d\,s = -\,v\,d\,v$.



18. LEMMA. Si corpus datæ maſſæ in medio reſiſtente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore aſcendente, erit *velocitatis decrementum* ut *momentum temporis* & *ſumma vis centripetæ & reſiſtentiæ conjunctim*. Et *velocitas* in *ſuum decrementum* ducta erit ut *incrementum ſpatii* & *ſumma vis centripetæ & reſiſtentiæ* conjunctim.

At corpore deſcendente, *velocitatis incrementum* erit ut *momentum temporis*, & *differentia inter vim centripetam & vim reſiſtentiæ* conjunctim. Et *velocitas* in *ſuum incrementum* ducta, erit ut *incrementum* ſive elementum *ſpatii* & *differentia inter vim centripetam ac reſiſtentiam* conjunctim.

Reſiſtentia enim conſiderari poteſt tanquam vis continuò retardans (5), & vis centripeta corporis aſcendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix eſt ſumma ipſa vis centripetæ & reſiſtentiæ, dum corpus aſcendit; ſed vis retardatrix in temporis momentum ducta eſt ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore aſcendente, decrementum velocitatis eſt ut temporis momentum & ſumma vis centripetæ ac reſiſtentiæ conjunctim. Quod erat 1um.

Sed momentum temporis eſt ut incrementum ſive elementum ſpatii directè & velocitas inversè (12). Quarè ſi corpus aſcendat, decrementum velocitatis eſt ut elementum ſpatii & ſumma vis centripetæ ac reſiſtentiæ directè, & velocitas inversè, adeóque velocitas in ſuum decrementum ducta eſt ut elementum ſpatii & ſumma vis centripetæ ac reſiſtentiæ conjunctim. Quod erat 2um.

Deſcendente corpore vis centripeta motum

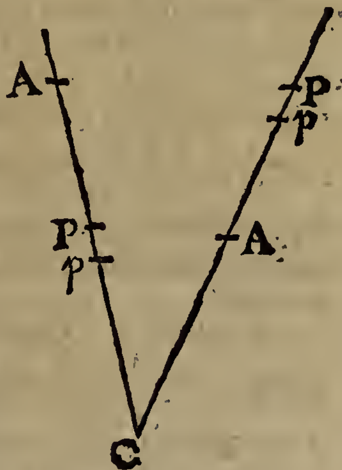
tum corporis accelerat dum resistentia retardat, & ideò si vis centripeta major sit vi resistentiæ, excessus vis centripetæ suprà resistentiam est vis tota accelerans; Si vis centripeta minor est vi resistentiæ, vis tota retardans erit excessus resistentiæ suprà vim centripetam. Quarè differentia inter resistentiam & vim centripetam, in temporis momentum ducta, erit in primo casu ut incrementum velocitatis, & in secundo casu, ut illius decrementum. Quod erat 3um. Sed momentum temporis est, ut elementum spatii directè & velocitas inversè (12), quarè velocitas in suum elementum (sive incrementum sit, sive decrementum) ducta, est ut elementum spatii, & differentia inter vim centripetam ac resistentiam conjunctim. Quod erat 4um.

19. *Coroll.* 1. Undè si vis centripeta dicatur g, resistentia r, spatium s, tempus t, velocitas v erit pro corporis ascensu $g\,dt + r\,dt = -dv$, & $g\,ds + r\,ds = -v\,dv$; & pro corporis descensu, si vis centripeta vi resistentiæ sit major $g\,dt - r\,dt = dv$, & $g\,ds - r\,ds = v\,dv$; at si vis centripeta vi resistentiæ sit minor $r\,dt - g\,dt = -dv$; & $r\,ds - g\,ds = -v\,dv$.

20. *Coroll.* 2. Si in his formulis ponatur $r = 0$, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non resistente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio resistente conferri possunt cum ejusdem motibus in medio non resistente.

21. *Coroll.* 3. Si corpore descendente, resistentia vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æquabilis manet; nam in formulis $g\,dt - r\,dt = dv$, & $r\,dt - g\,dt = -dv$, positâ $g = r$, fit $dv = 0$, hoc est, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

22. *Coroll.* 4. Si corpus in lineâ rectâ A C vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, & de loco dato A sursum vel deorsum projiciatur cum velocitate datâ in medio resistente, & spatium A P quod ascendendo vel descendendo describit tempore t dicatur s, data A C dicatur b, & tam in ascensu quam in descensu scribatur $CP = x$, adeóque in ascensu $x - b = s$, & $dx = ds$, in descensu $b - x = s$, & $-dx = ds$; si loco ds substituatur ipsius valor in formulis coroll. 1. (19) erunt illæ pro ascensu $g\,dx + r\,dx = -v\,dv$, quarum una in alteram abit, mutato signo + vel −, quantitati r præfixo.



22.

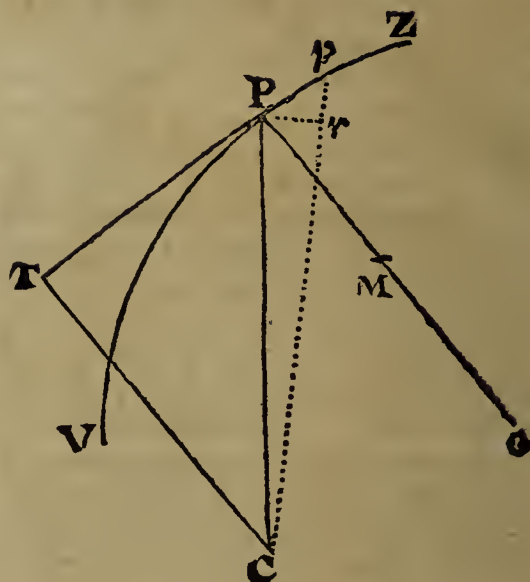
23. LEMMA. Si corpus vi quâlibet centripetâ sollicitatum curvam VPZ in medio resistente aut etiam in vacuo describat, visque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat PO tangenti PT per P ductæ normalem, altera directionem cum tangente congruentem, quadratum velocitatis cor-

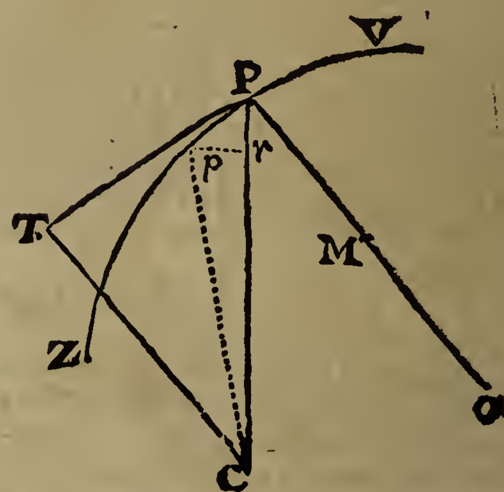
poris in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z osculantis in P.

Sit P C, totius vis centripetæ directio, P O radius osculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O & radio O P descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio resistente quam in vacuo æquabilis est,
23. (6) & totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem P O agit, seu vis normalis dicatur N & quia vis resistentiæ ut potè semper contraria directioni mobili P T, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu P p retinetur in medio resistente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, & radius O P. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O & radius est O P; sitque P M $= s$, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo $= v$, & erit (20. 19.) $N\,ds = v\,dv$, sumptisque fluentibus $Ns = \frac{1}{2}vv$, & $2\,Ns = vv$. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii PO, (119. *lib.* 1.) ergo $2s =$ P O & $2\,Ns = vv = N \times$ P O. Q. E. D.

24. *Coroll.* 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis P T agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus V P s, ideoque P q $= ds$, & si corpus descendit, erit $T\,ds - r\,ds = v\,dv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat & vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit $T\,ds + r\,ds = -v\,dv$ (18. 19.) vi tangentiali & resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

25. *Coroll.* 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens $= g$, C P $= y$, C T tangenti perpendicularis $= p$, ideoque P T $= \sqrt{yy - pp}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demissum sit ad C P perpendiculum p r,



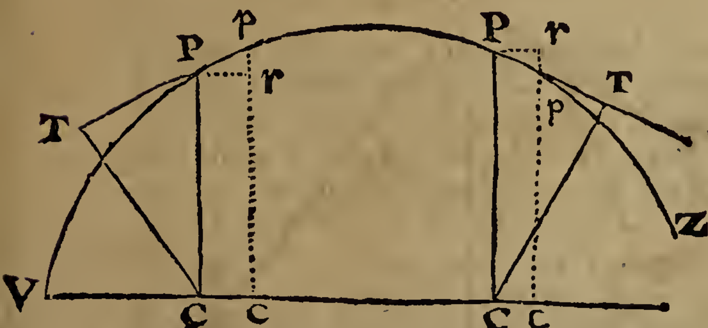


ut sit p r $= dy$, & triangulum P r p, simile triangulo P T C, & erit P p (ds) : p r (dy) $=$ P C : P T $= g : T = \frac{g\,dy}{ds}$, ubi observandum est dy, esse affirmativam, quando crescente arcu V P sive s, crescit etiam recta C P, seu y, id est, quando corpus ascendit, & contrà dy esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri T $= -\frac{g\,dy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis corollarii 1. & ambæ in hanc mutabuntur, $g\,dy + r\,ds = -v\,dv$.

26. *Coroll.* 3. Quia P p (ds) : p r ($\pm dy$) $=$ P C (y) : PT ($\sqrt{yy - pp}$) erit $ds = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{yy - pp}}$, (signo superiori pro ascensu & inferiori pro descensu usurpato);

pato). Quarè fiet $g\,dy + r\,ds = g\,dy \pm \frac{r\,y\,dy}{\sqrt{yy - pp}} = -v\,dv$.

27. *Coroll.* 4. Si radius osculi P O dicatur R, est (23) $R \times N = v^2$, & quia $y : p = g : N$, adeóque $\frac{pg}{y} = N$, fiet $\frac{Rpg}{y} = v^2$; sed radius osculi $R = \frac{y\,dy}{dp}$ (214. lib. 1.) quarè erit $\frac{gp\,dy}{dp} = v^2$, & $g = \frac{v^2\,dp}{p\,dy}$. Substituatur hic valor in formulâ corollarii 2i. & fiet $g\,dy + r\,ds = \frac{v^2\,dp}{p} + r\,ds = -v\,dv$, & ideò $v\,dv + \frac{v^2\,dp}{p} = -r\,ds$.



28. *Coroll.* 5. Vis centripetæ directio PC, sibi semper parallela maneat, ut hic assumitur vis gravitatis, & per punctum V, in curvâ V P Z datum, ducatur recta V C directioni gravitatis P C perpendicularis, dicanturque ut suprà V P $= s$, P p $= ds$, C P $= y$, p r $= dy$, vis tota gravitatis in P $= g$, resistentia r, velocitas corporis ibidem $= v$, & erit ut in corollario 2° $g\,dy + r\,ds = -v\,dv$.

29. *Coroll.* 6. Si in Hypothesi corollarii 5i. dicantur radius osculi in P $= R$, vis normalis $= N$, abscissa V C $= x$, & C c seu P r $= dx$, erit ob triangulorum P p r, C P T similitudinem, P p : P r = P C : T C $= g : N$, sive $ds : dx = g : N = \frac{g\,dx}{ds}$; sed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{g\,dx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, & hinc $v^2 = \frac{Rg\,dx}{ds}$.

30. *Coroll.* 7. Est autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds} = -\frac{ds^2\,dy}{dx\,dds}$, si ponatur dx, constans, & ideò $ddx = 0$; Et quia $ds^2 = dy^2 + dx^2$, sumptisque fluxionibus, factâ dx, constante $ds\,dds = dy\,ddy$, & $dds = \frac{dy\,ddy}{ds}$, fiet $R = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$; quarè (29) $v^2 = \frac{Rg\,dx}{ds} = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$, ideòque $g = -\frac{v^2\,ddy}{ds^2}$, & hinc (28) $g\,dy + r\,ds = -\frac{v^2\,dy\,ddy}{ds^2} + r\,ds = -v\,dv$, hoc est, ob $dy\,ddy = ds\,dds$, $v\,dv = \frac{v^2\,dds}{ds} - r\,ds$. 31.

31. *Scholion.* In superioribus quinque lemmatis ipsorumque corollariis, fere complexi sumus principia omnia, quibus & ad inventionem & ad demonstrationem motuum in mediis resistentibus usi sunt Clariss. viri NEWT. in hoc Libro; *Varignonius* in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes *Bernoulli* ibid. an. 1711. & in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. & 1719. *Hermannus* Lib. 2. *Phoronomiæ* & in Commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac *Eulerus* in opere exquisito quod de *Mechanicâ* scripsit analyticè. Nunc alia nonnulla de Logarithmicæ proprietatibus, & de methodo maximorum & minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis resistentibus explicandam spectant, subjungenda sunt.

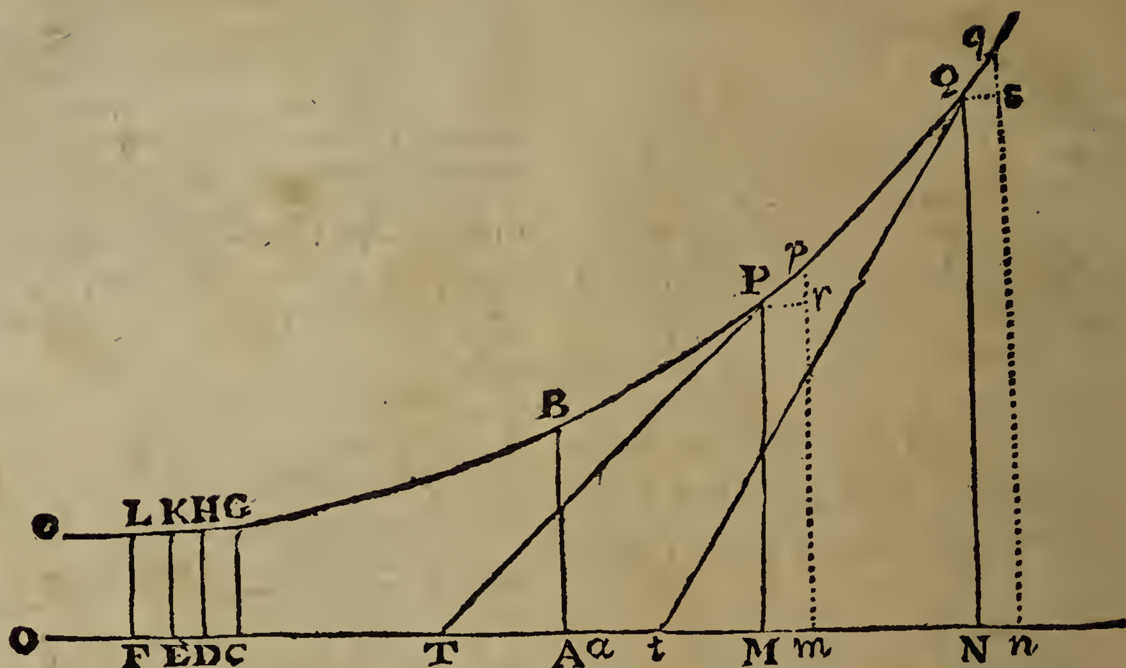
LEMMA

præcipuas Logarithmicæ proprietates exponens.

III. *Hugenius* de hac ipsâ *Newtoniani* operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis resistentibus motis, (quam summâ cum voluptate se vidisse testatur) ait se notasse lineam curvam quam Logarithmicam aut Logisticam nuncupat, summæ utilitatis esse in hoc negotio, & quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonstrationem *Guido Grandus* postea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare à scopo nostro alienum non duximus.

32. De-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sectio I.



32. *Defin.* Sit linea recta N A O secundum quam feratur perpendicularis M P motu uniformi & sibi parallelo, dum in ea perpendiculari M P mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc Legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus à rectâ N A O, curva ab illo puncto P descripta dicetur *Logarithmica* vel *Logistica*.

Linea N A O secundum quam perpendicularis P M motu uniformi & sibi parallelo fertur, dicitur *Axis Logarithmicæ*, & lineæ P M, Q N perpendiculares in Axem sunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis Logarithmicæ, ut A B, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur abscissarum origo, & abscissæ à parte A M sumptæ, sunt positivæ, à parte A O negativæ & abscissa pertinens ad ordinatam A B sive ad unitatem est ipsum o.

Coroll. 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum Logarithmicæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto Logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ crescunt vel decrescunt, est ordinatæ proportionalis (*ex Def.*), sed durante tempusculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, & æqualibus tempusculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempusculis genitæ sunt ut illæ ordinatæ.

Coroll. 2. *Sint ordinatæ quævis P M, Q N, ducantur duæ aliæ ordinatæ p m, q n ipsis quamproximæ & ab iis æqualiter distantes, p m & q n erunt prioribus ordinatis proportionales*: Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur, est uniformis, ideoque eodem tempore ordinata P M ad p m perveniet ac Q N ad q n ob æquales distantias, ergo, per Cor. I. differentiæ ordinatarum P M & Q N dum perveniunt ad p m & q n erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adjectis vel detractis iis differentiis à lineis P M & Q N fiunt ordinatæ p m, q n, & adjectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correspondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prior ratio, ergo ordinatæ p m & q n erunt inter se ut P M ad Q N, & etiam alternando P M : p m = Q N : q n.

Coroll. 3. *Si sumantur in axe puncta C, D, E, F ad distantias æquales & quamminimas, in iisque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine constituent Progressionem Geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ G C & H D, H D & K E sunt quamproximæ & æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens G C : H D = H D : K E, eadem ratione est H D : K E = K E : L F, sicque deinceps, unde liquet

ordi-

ordinatas GC : HD : KE : LF &c. esse in progressione Geometricâ.

33. Theor. I. *Sumantur in axe Logarithmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque à se mutuò distent ac duo posteriora, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in proportione Geometricâ.*

Et si sumantur in axe quotlibet puncta æque distantia ordine continuo, ordinatæ iis insistentes erunt in progressione Geometricâ.

Sumantur in axe duo puncta quævis A & E, & alia duo H & K talia ut sit A E = H K, eriganturque in illa puncta ordinatæ A L, E P, H S, K T; dico illas ordinatas fore in proportione Geometricâ.

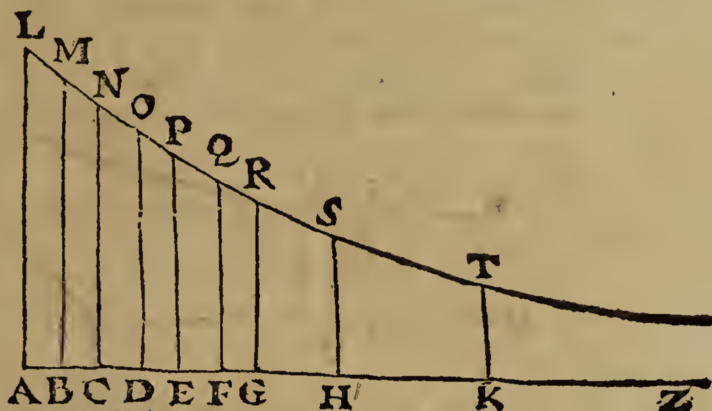
Dividatur tam A E quam H K, in partes infinitè parvas æquales inter se, totidem erunt divisiones in utroque intervallo; erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progressiones Geometricæ, in quibus totidem erunt termini, & rationes terminorum successivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utrâque progressione æqualiter distant; Ergo ex æquo, primus terminus A L prioris progressionis erit ad E P ultimum terminum ejus progressionis, ut H S primus terminus alterius progressionis ad ejus ultimum terminum K T. Q. E. D.

Et si sumantur in axe plura puncta æquè distantia ordine continuo sibi succedentia, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in progressione geometricâ: Probatur ut in Cor. 3. defin.

Coroll. *E converso, si in lineâ quâvis sumantur plura puncta, æquè distantia ordine continuo, & in iis erigantur perpendiculares quæ sint in progressione Geometricâ, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

Sint enim A, D, G &c. ea puncta æquè distantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, assumantur mediæ proportionales inter perpendiculares A L & D O, D O & G R, &c. tot quot sunt divisionum puncta, & in singulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine sumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas A L, D O, G R quam hasce medias, dico eam curvam esse Logarithmicam.

Facilè enim liquet ex naturâ progressionum, quod cùm sit A L : D O = D O : G R &c. & totidem mediæ proportionales assumantur inter A L & D O, quot assumantur inter D O & G R, sicque deinceps, formari progressionem continuam constantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quàm inventis, ideo quamlibet ex illis, ut A L, esse ad sibi proximam B M, ut alia quævis D O, est ad proximam P E, unde DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECTIO I. 33.



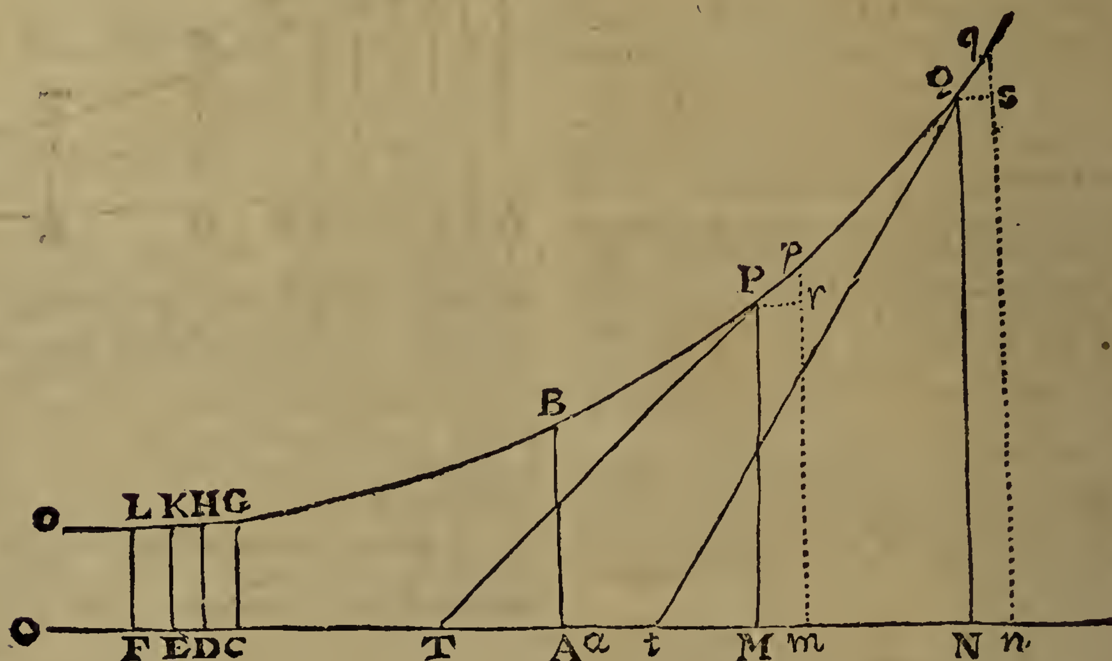
dividendo, est A L ad suam differentiam à proximâ, ut est etiam D O ad suam differentiam à proximâ, ideóque perpendicularium proximarum differentiæ erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evanescentibus ergo punctorum in axe sumptorum intervallis, & perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis & æquali tempusculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus crescunt vel decrescunt perpendiculares erunt iis ipsis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione Logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit Logarithmica.

34. Theor. II. *Abscissæ axis Logarithmicæ, sunt Logarithmi ordinatarum in earum extremo insistentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo singularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ constituent progressionem Geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abscissæ erunt in progressione Arithmeticâ propter partium in axe sumptarum æqualitatem, & abscissa quæ unitati respondet est o; Jam autem cùm termini progressionis Arithmeticæ inter quos est o ita aptantur terminis progressionis Geometricæ ut o respondeat unitati, & reliqui

liqui termini sibi respondeant, tum termini progressionis Arithmeticæ sunt Logarithmi terminorum correspondentium progressionis Geometricæ; Ergo abscissæ Logarithmicæ, sunt Logarithmi ordinatarum correspondentium.

Corol. 1. *Portio axis quæ intercipitur inter duas Ordinatas est Logarithmus rationis quæ intercedit inter illas Ordinatas.* Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, & differentia Logarithmorum earum quantitatum, est logarithmus quotientis earum, sed abscissæ sunt Logarithmi ordinatarum, & portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas est differentia abscissarum sive Logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio est Logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter Ordinatas intercedit.

Coroll. 2. *Si dentur duarum aut plurium quantitatum Logarithmi, & à puncto dato rectæ alicujus sumantur longitudines eis Logarithmis æquales, & in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatibus quarum sumuntur Logarithmi æquales, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*



In recta O A N sumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, sitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis est perpendicularis M P, sit A a differentia progressionis Arithmeticæ ex quâ desumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo A M toties quot sunt termini in progressione Geometrica ex qua desumuntur quantitates quarum habentur Logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B & M P quot sunt divisionum puncta inter A & M, & in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales; fiet progressio Geometrica, quæ est ipsa progressio quantitatum quarum abscissæ lineæ O A N quantitate A a successivè auctæ sunt Logarithmi, siquidem in utrâque progressione occurrunt termini A B & M P eodem intervallo in utraque dissiti: sed si in punctis æquidistantibus lineæ cujusvis erigantur perpendiculares in progressione Geometricâ, Logarithmica aliqua earum vertices tanget (*Cor. Theor.* I.) Ergo si dentur numeri cum suis Logarithmis, concipi semper poterit Logarithmica cujus abscissæ sint illi Logarithmi & cujus ordinatæ sint quantitates quibus respondent.

35. Theor. III. *Axis logarithmicæ est ejus Asymptotus ad quam ab unâ parte accedit propius datâ quâvis quantitate, numquam tamen eam attingit, & à qua ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint

Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una sit alterius dupla vel plusquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde secundum axem sine fine, ordinatæ in ea puncta erecta crescent ab unâ parte, & ab alterâ decrescent in ratione duplâ vel plusquam duplâ (*per Cor. Theor. I.*) sed ex Principiis *Archimedeis* quantitas crescens in progressione duplâ vel plusquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, & ex Principiis *Euclideis* quantitas quævis decrescens in ratione duplâ vel plusquam duplâ minor fit quâvis quantitate datâ; Ergo Logarithmicâ longius ab axe recedit, aut propiùs ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum si fieri potest in quodam puncto X, ferendo distantiam A M secundum axem, fiet tandem ut cadat proximè citra X; putà in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypothesi, & aliquo intervallo Y V ab eo distabit, sed quia Y Z = A M debebit esse A B : MP = Y V ad ordinatam in Z, qua ideò dabitur, ac per consequens Logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attigerit in X. Q. E. D.

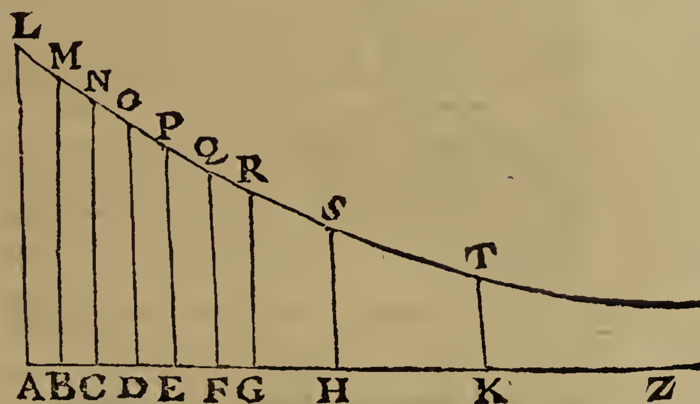
36. Theor. IV. *Subtangens Logarithmicæ est constans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ M m, N n, erectisque ordinatis M P, m p, & NQ, n q, per puncta P & Q concipiantur tangentes P T, Q t axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ P r, Q s, ordinatis m p, n q perpendiculares. Evanescentibus ordinatarum distantiis M m, N n, triangulum P p r fit simile triangulo T P M, & Triangulum Q q s simile triangulo t Q N, ideoque est p r : P M = P r (sive M m) : M T, & q s : Q N = N n (sive M m) : N t, sed ob distantias M m, N n æquales est p m : PM = qn : QN & dividendo est p r : PM = qs: QN, quare P r (sive M m) : M T = N n (sive M m) : N t, adeoque M T = N t. Q. E. D.

Cor. *Hinc cùm ordinata sit ad subtangentem constantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abscissæ, obtinetur Logarithmicæ æquatio fluxionalis.* Abscissa A M dicatur x, ordinata M P y, subtangens M T, s, fluxio M m erit dx, p r $= dy$, cùmque sit $y : s = dy : dx$, est $y\,dx = s\,dy$ æquatio ad logarithmicam.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sectio I.

37. Probl. I. *Datâ subtangente & duabus ordinatis Logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.* 37.

I*us* *Casus.* Minor è duabus ordinatis sit ipsa unitas G R, altera verò ordinata L A dicatur y, &, ad vitandum series minus commodas, fingatur quantitas $z =$



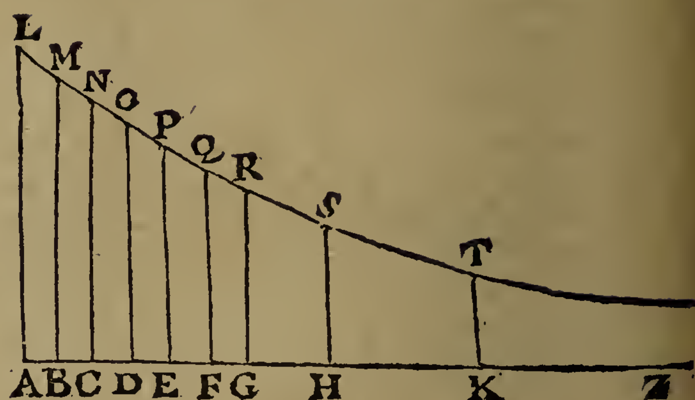
$\frac{y-1}{y+1}$, ita ut sit $yz + z = y - 1$, unde habetur $y = \frac{1+z}{1-z}$; sumptisque fluxionibus, fit $y\,dz + z\,dy + dz = dy$, & invenitur $dy = \frac{y+1}{1-z}\,dz$, sive, inserto valore ipsius y, fit $dy = \frac{\frac{1+z}{1-z}+1}{1-z}\,dz$, reductisque fractionibus $\frac{2}{\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz = dy$. Cùm ergo æquatio ad Logarithmicam sit (*per Theor. IV.*) $y\,dx = s\,dy$, insertis in hac æquatione valoribus y & dy, illa evadit $\frac{1+z}{1-z}\,dx = \frac{2s}{\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz$, ex quâ deducitur $dx = \frac{2s\times\overline{1-z}}{\overline{1+z}\times\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz$ sive $dx = \frac{2s}{\overline{1+z}\times\overline{1-z}}\,dz = \frac{2s}{1-z^2}\,dz$; reducatur in seriem iste valor,

valor, obtinebitur $dx = 2s \times dz + z^2 dz + z^4 dz + z^6 dz + z^8 dz$ &c. & sumptis fluentibus $x = 2s + z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9}$ &c. & loco z scripto ejus valore $\frac{y-1}{y+1}$ pro valore portionis G A axis interceptæ inter G R & A L $x = 2s \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \times \overline{\frac{y-1}{y+1}}^3 + \frac{1}{5} \times \overline{\frac{y-1}{y+1}}^5 + \frac{1}{7}\overline{\frac{y-1}{y+1}}^7$ &c.

2us Casus. Quæratur valor portionis axis interceptæ inter ordinatas O D & M B, sit O D $= n$ & M B $= m$ hæcque sit major ordinata; fiat $n : m :: 1 : y$, erit $y = \frac{m}{n}$, quæratur per hujus Problematis casum primum portio axeos intercepta inter ordinatam G R unitati æqualem & ordinatam y sive $\frac{m}{n}$, & erit ea portio æqualis B D sive portioni axeos interceptæ inter ordinatas O D & M B, propter proportionem Geometricam quæ est inter O D, M B, unitatem & ordinatam y, ut patet *ex Theor. I. n°.* 33.

3us Casus. Si ordinata S H sit unitate minor & quæratur portio axeos intercepta inter illam & unitatem G R, dicatur ea ordinata S H $= p$, fiatque ut $p : 1 = 1 : y$, erit $y = \frac{1}{p}$ quantitas unitate major; quæratur per primum casum hujusce Problematis valor portionis axeos interceptæ inter G R & ordinatam y, & ex præcedentis casûs demonstratione, liquet eum ipsum fore valorem abscissæ G H, sed quoniam punctum G unitati respondens, censetur axeos origo, portio axis inter G & ordinatam y intercepta positiva est, dum portio axis a puncto G ad ordinatam S H, negativa censeri, & negativo signo affici debet.

4us Casus. Si denique duæ ordinatæ S H, T K sint singulæ unitate minores, quæraturque portio axeos inter ambas interceptas, fiat ut prius S H : T K $= 1 : y$, & portio axeos intercepta inter G R & ordinatam y erit æqualis illi quæ intercipitur inter S H & T K.



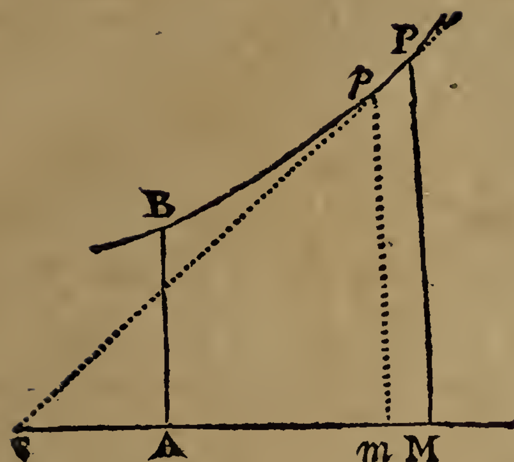
Cor. 1. *Si una ex ordinatis sit unitas portio axis quæsita* x *erit alterius ordinatæ abscissa, ideoque ejus erit Logarithmus*, positivus quidem si ea ordinata sit unitate major, negativus verò si unitate sit minor.

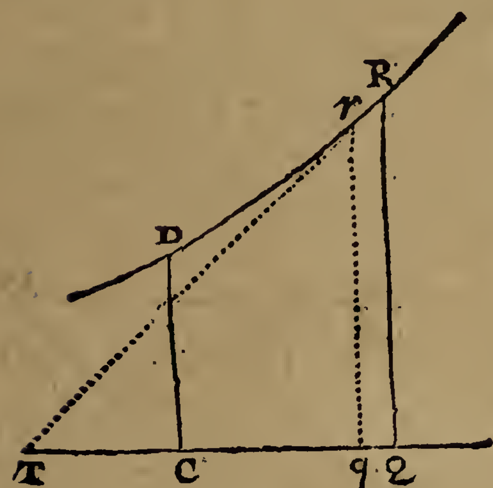
Si verò duæ ordinatæ ab unitate differant, portio axis intercepta x, *erit rationis inter eas ordinatas existentis Logarithmus*: positivus quidem, si major ordinata numeratorem, fractionis rationem exprimentis, constituat; negativus verò si minor ordinata numeratoris sedem occupare censeatur.

Cor. 2. *Sit ut in primo casu ordinata G R* $= 1$, *ordinata L A* $= y$ *sit* 2; *subtangens Logarithmicæ L R T sit etiam unitas; invenitur G A, sive* x, *Logarithmus nempe numeri binarii* $= .6931471$ &c. Nam in valore $x = 2s \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \times \overline{\frac{y-1}{y+1}}^3 + \frac{1}{5} \times \overline{\frac{y-1}{y+1}}^5$ &c. scripto 1 loco s; & 2 loco y series fit $x = 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{243} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2187}$ &c. quorum terminorum calculus facilis est, & si per Decimales instituatur, invenietur abscissa quæsita x, sive numeri binarii Logarithmus, $= .6931471$ &c.

Similiter si fiat $y = \frac{3}{2}$ ideoque $y - 1$

$= \frac{1}{2}$





$= \frac{1}{2}$ & $y+1=\frac{5}{2}$ fractio $\frac{y-1}{y+1}=\frac{1}{5}$ sive o. 2 & series fit $x = 2 \times 0.2 + \frac{0.008}{3} + \frac{0.00032}{5} + \frac{0.0000128}{7} + \frac{0.000000512}{9}$ &c. $= .4054651$. quod additum Logarithmo numeri binarii, habetur Logarithmus numeri ternarii, 1.0986122 &c.

Si fiat $y=\frac{5}{4}$ ideoque fit $y-1=\frac{1}{4}$, & $y+1=\frac{9}{4}$, est fractio $\frac{y-1}{y+1}=\frac{1}{9}$ & series fit $x = 2 \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{729} + \frac{1}{5}$ $+ \frac{1}{59049}$ &c. quæ series citissimè convergit estque $x = .2231433$ &c. cui si addatur duplum Logarithmi numeri binarii, habetur Logarithmus quinarii, 1.604378; & addito iterum Logarithmo binarii, habetur Logarithmus denarii, 2. 3025849.

38. Theor. V. *Sint duæ diversæ Logarithmicæ, in utrâque sumantur ordinatæ æquales, abscissæ illis ordinatis correspondentes in utrâque Logarithmicâ erunt ut earum Logarithmicarum subtangentes, adeoque in constanti ratione.*

Sint duæ Logarithmicæ P B, R D prioris subtangens sit M S $= s$, subtangens alterius sit Q T $= t$; Ordinatæ P M, R Q in utrâque sumptæ sint æquales dicanturque y; sint ordinatæ B A & D C æquales unitati; abscissa A M dicatur x, & C Q, z; dico fore $s : t = x : z$. 38.

Id enim patet ex formâ seriei quæ exhibet abscissæ valorem; Nam, si in Logarithmicâ P B quæratur valor x pro ordinatâ y, habebitur, per casum primum Problematis primi, $x = 2s \times \frac{y-z}{y+1} + \frac{1}{3}\overline{\frac{y-1}{y+1}}^{3} + \frac{1}{5}\overline{\frac{y-1}{y+1}}^{5}$ &c. Et si in Logarithmicâ R D quæratur valor abscissæ z pro ordinatâ y habebitur, per eundem casum Probl. I. $z = 2t \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\overline{\frac{y-1}{y+1}}^{3} + \frac{1}{5}\overline{\frac{y-1}{y+1}}^{5}$ &c. Cùm ergo duæ series quæ exprimunt valorem abscissarum x & z iisdem terminis constent, ductis in priori serie per $2s$, in alterâ serie per $2t$; liquet esse x ad z ut $2s$ ad $2t$, sive $s : t = x : z$. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eædem erunt Subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe si sumantur in iis æquales ordinatæ, abscissæ etiam æquales erunt.

Cor. 2. Logarithmicæ verò diversæ speciei dicentur, quarum subtangentes erunt diversæ; & Logarithmi diversæ speciei dicentur, ubi eisdem quantitatibus Logarithmi diversi respondebunt, unde etiam Logarithmicæ ad quas pertinent diversæ illæ Logarithmorum species, habebunt diversas subtangentes (*per hoc Theor.*) ideoque erunt diversæ speciei.

Cor. 3. *Datis Logarithmis cujusvis speciei, Logarithmi alius speciei eisdem numeris res-*

respondentes inveniri possunt, si dentur subtangentes utriusque speciei; Hinc si dentur Logarithmi quorum subtangens est unitas (qui Hyperbolici dicuntur), sitque data subtangens alius speciei 4342944 multiplicentur Logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorumdem numerorum Logarithmi in hac alterâ specie, ut liquet ex hoc Theor. Ideoque in posterum per hanc expressionem $L.x$, intelligemus Logarithmum Hyperbolicum quantitatis x, qui si multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a, $aL.x$ exprimet Logarithmum x ex eâ specie depromptum quæ habet a pro subtangente, est enim $1 : a = L.x$ ad eum Logarithmum qui ergo erit $a\ L.\ x$.

39. Probl. II. *Datâ ordinatâ Logarithmicæ & ejus abscissâ, invenire ejus subtangentem, dummodo alterius cujuslibet Logarithmicæ subtangens sit data.*

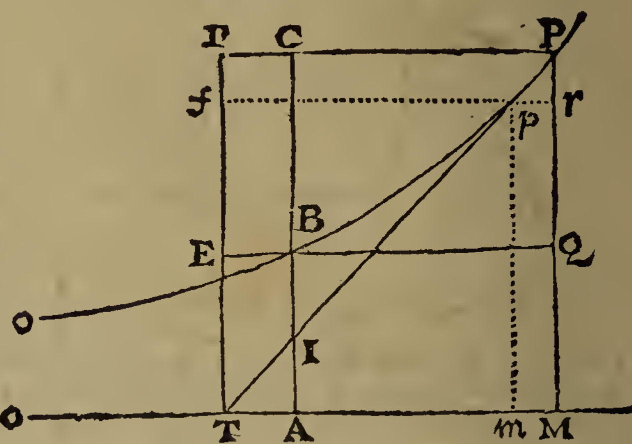
Data sit subtangens Logarithmicæ P B, Logarithmicæ verò R D data sit abscissa C Q & ordinata Q R, quæritur hujus Logarithmicæ subtangens: Quæratur primùm abscissa quæ in Logarithmica P B responderet ordinatæ æquali Q R, per Probl. I. sitque ea A M, fiatque ut A M ad C Q ita subtangens data ad quæsitam.

Exempl. In tabulis Logarithmorum, Logarithmus numeri 2. est .3010300. si ergo concipiatur Logarithmica cujus abscissæ sint Logarithmis tabularum æquales, & cujus ordinatæ sint æquales numeris eis Logarithmis correspondentibus, quæraturque ejus Logarithmicæ subtangens; invenitur in altera Logarithmica cujus subtangens est unitas abscissa respondens ordinatæ quæ sit unitatis dupla (*per Cor. 2. Prob. I.*) quæ est .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. Ita unitas ad subtangentem Logarithmicæ tabularum quæ invenietur. 4342944.

Coroll. Hinc dato Logarithmo alicujus numeri desumpto ex Logarithmica cujus subtangens data est, habebitur ejus numeri Logarithmus in tabulis, dicendo ut subtangens data ad .4342944. ita Logarithmus datus ad ejusdem numeri Logarithmum in Tabulis.

40. Probl. III. *Sit quantitas variabilis, cujus Logarithmus etiam variabilis est, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus Logarithmi determinare.* Concipiatur Logarithmica ad quam pertinet species Logarithmi quæ assumitur, sit a ejus subtangens, sitque y variabilis proposita, quæ consideretur ut ejus Logarithmicæ ordinata, sitque x ejusdem Logarithmicæ abscissa ei ordinatæ y respondens, erit per naturam Logarithmicæ (n. 36) $ydx = ady$ & $dx = \frac{ady}{y}$, sed x est Logarithmus ordinatæ y, ergo dx est ejus fluxio, ergo $dL.\ y = \frac{ady}{y}$ hoc est, fluxio Logarithmi est æqualis fluxioni variabilis propositæ divisæ per ipsam variabilem, & ductæ in constantem quæ sit subtangens Logarithmicæ ad quam pertinet species Logarithmi assumpti.

Et è converso, si habeatur hæc fluxio $\frac{ady}{y}$, ejus fluens est Logarithmus ipsius quantitatis y ex eâ Logarithmicâ desumptus, cujus subtangens est a.



41. Theor. VI. *Spatium Logarithmicum A B P M duabus ordinatis A B, P M, arcu B P & abscissâ A M comprehensum, æquale est rectangulo subtangentis & differentiæ ordinatarum.*

Ductâ enim per punctum P tangente P T, compleatur rectangulum T F P M, agatur per B recta E Q, parallela T M, secans T F in E & M P in Q; per m ordinata m p alteri M P infinitè propinqua; & per p recta f r parallela T M, occurrens T F in f & M P in r; His positis (ob triangula P r p, P M T similia) erit P r : p r = P M : M T, seu P F, ideóque rectangulum M m p r æquale erit rectangulo P F f r. Quarè si area logarithmica A B P M divisa intelligatur in rectangula innumera ut M p,

Mp, rectangulum EFPQ divisum erit in totidem rectangula ut Fr correspondentibus Mp, æqualia, & proinde area logarithmica ABPM æqualis est rectangulo EFPQ. Q. E. D.

Hinc *spatium Logarithmicum ABPM est ut ordinatarum AB, PM differentia PQ*, ob datam subtangentem TM (36.)

Trilineum verò logarithmicum BPQ = PQ × MT — AM × BA; & producta AB ut rectæ FP occurrat in C, erit trilineum logarithmicum BPC = AC × CP — CB × MT.

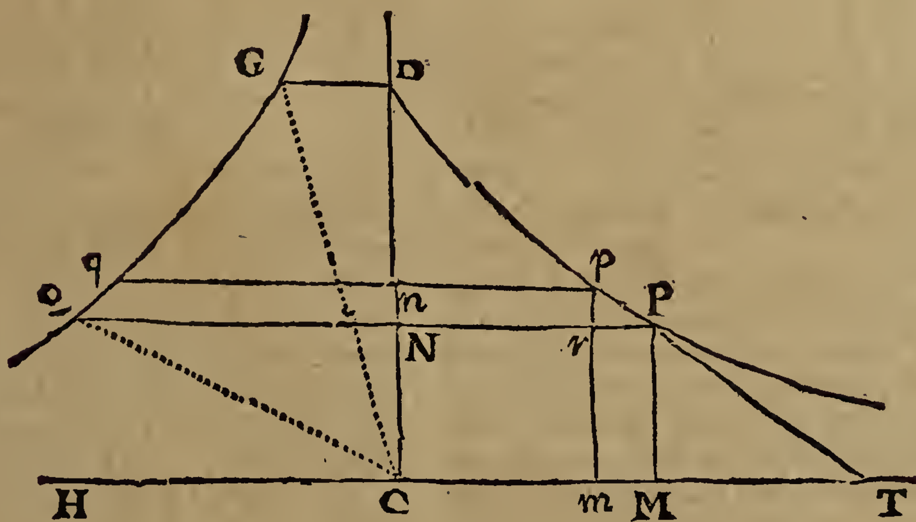
42. Coroll. 1. *Hinc spatium logarithmicum infinitè protensum OOPM, quâ parte logarithmica ad asymptotum MO continuò accedit, duplum est trianguli PTM.* Nam ob distantiam infinitam MO evanescit ordinata AB, fitque spatium OoPM, æquale rectangulo TFPM, sub ordinatâ PM & subtangente MT contento.

43. Cor. 2. *Tangens PT (producta si opus est) secet ordinatam AB in I, & spatium logarithmicum BPC erit ut BI inter logarithmicam & tangentem intercepta.* Nam ob triangulorum TFP, ICP, similitudinem, est TF ad FP, (seu AC ad MT) ut CI ad CP, & ideò AC × CP = MT × CI. Quarè (41) trilineum BPC = AC × CP — MT × CB = MT × CI — MT × CB = MT × BI. Est igitur, ob datam MT, trilineum BPC ut BI.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECTIO I.

44. 44. Theor. VII. *Asymptotis orthogonalibus CH, CD descripta sit hyperbola Qq G, & per punctum D in asymptoto CD datum, logarithmica DpP axem habens CH productum; per punctum D agatur ad hyperbolam ordinata DG, & per punctum alterum quodvis N ordinata NQ quæ producta logarithmicæ occurrat in P; erit area hyperbolica NQGD, ad dignitatem hyperbolæ seu ad rectangulum CD × DG, in ratione rectæ NP ad subtangentem logarithmicæ.*

Agatur enim altera qp ipsi QP infinitè propinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem CT perpendiculum pm secans QP in r & perpendiculum PM; PT tangat logarithmicam in P; erit ob triangula prP, PMT similia, pr (seu Nn): Pr = PM (seu CN): MT, & (ex naturâ hyperbolæ *per theor. 4. de hyp. lib. 1.*) NQ : DG = CD : CN; ideóque per compositionem rationum & ex æquo NQ × Nn : Pr × DG = CD : MT; Quarè ob datas CD & MT, summa omnium rectangulorum NQ × Nn, in quæ dividi potest area NQGD, hoc est, hæc area ipsa est ad rectangulum sub datâ GD, & summâ omnium Pr, seu totâ rectâ NP, ut CD ad MT, proindèque NQGD × MT = NP × GD × CD, & hinc NQGD : GD × CD = NP : MT. Q. E. D.

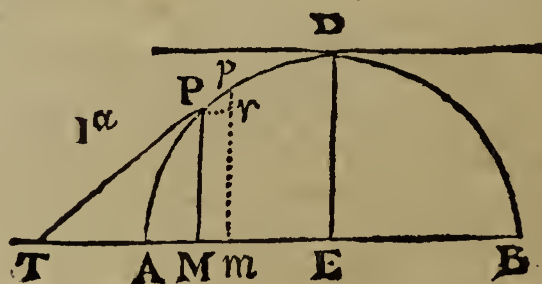


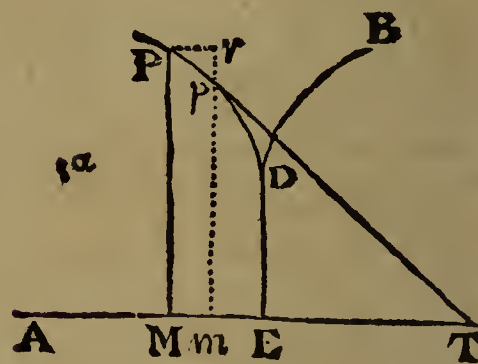
45. Coroll. *Hinc* (ob datas MT, GD, CD) *area hyperbolica NQGD & proindè sector CGQ ipsi æqualis* (377. lib. 1.) *est ut recta NP productio ordinatæ QN, inter asymptotum hyperbolæ CD & logarithmicam intercepta.*

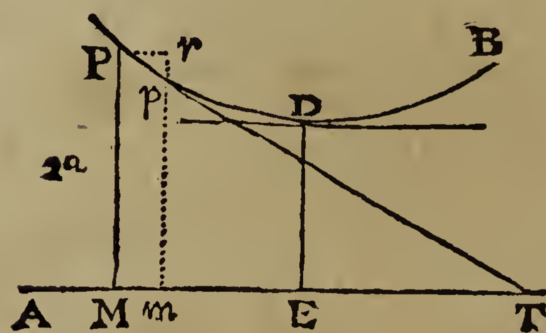
46. *Scholium.* Cùm Ill. Marchio *Polenus* in Epistolâ ad *Hermannum* Patavii an. 1729. editâ,

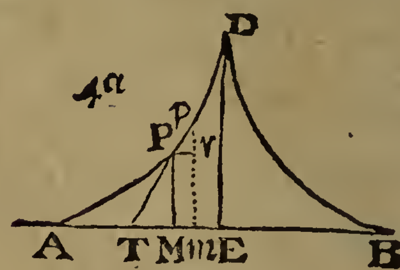
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECTIO I.

editâ, ità facilem & expeditam logarithmicæ descriptionem organicam, pro ingenii sui sagacitate invenerit, ut curva illa sectionibus conicis haud difficilius construatur, cùmque logarithmica per lineas rectas id præstet quod hyperbola per sectores vel quadrilatera sua, in problematum constructionibus quæ per areas hyperbolicas absolvuntur, loco hyperbolæ non malè usurparetur logarithmica, quamvis si problema ad merum calculum reducatur, æquè benè possint usurpari spatia hyperbolica, quàm abscissæ logarithmicæ. Quomodo autem constructiones quæ per spatia hyperbolica fiunt, ad logarithmicam transferantur, pluribus exemplis ostendemus deinceps.









De Maximis & Minimis.

47. Theor. *Si quantitas variabilis*, (quam exponat recta P M curvæ P D B ordinata.) *ad certum usque terminum D continuò crescat & posteà decrescat, vel contrà decrescat primùm & deindè crescat.* Actaque sit altera ordinata p m priori P M infinitè propinqua, & per punctum P recta P r abscissæ A P parallela secans p m in r, *ratio incrementi vel decrementi evanescentis p r ordinatæ P M, ad incrementum evanescens M m abscissæ A M in puncto D ubi ordinata M P omnium maxima vel minima evadit, infinita est vel nulla.*

Per punctum P ducatur P T tangens curvam in P, & abscissæ occurrens in T, & propter similitudinem triangulorum p r P P M T, erit p r ad P r, seu M m ut P M ad M T. Sed si coincidente puncto P cum D, tangens P T evadat abscissæ A E parallela & proindè M P fiat maxima vel minima ordinata E D ut in figurâ 1ª. & 2ª. punctum T in infinitum abit, & ideò ratio P M ad M T seu ratio p r ad M m nulla est. Contrà verò si coincidente P cum D, tangens P T cum ordinatâ maximâ vel minima D E conveniat, ut in figurâ 3. & 4. evanescit subtangens M T & ratio P M ad M T, sive p r ad M m infinita evadit.

48. *Coroll.* 1. Ut ex datâ æquatione inter abscissam A M & ordinatam M P, inveniatur valor abscissæ A E cui maxima vel minima applicata E D ordinatur, sumenda est æquationis fluxio, & ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abscissæ, seu ratio p r ad M m, eaque vel infinito vel nihilo æquanda est, aut quod idem est, factâ M m constante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis supponenda.

49. *Corol.* 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non sit ordinata curvæ, potest illa supponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti si proposita es-

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

PROP. I. THEOR. I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus, est ut spatium movendo confectum.

NAM cùm motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc ([a]) est, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amissus, ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in ([b]) spatiis liberis solâ vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: ([c]) dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motûs illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

Sit A ad A — B ut B ad B — C & C ad C—D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q.E.D.*

PRO-

ta esset quantitas variabilis $ax^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, poneretur $ax^2 - x^3 = bby$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x, & ordinata y, & hinc, sumptis fluxionibus, foret $2axdx - 3x^2dx = bbdy$, & $2ax - 3x^2 = \frac{bbdy}{dx} = 0$ adeòque $2ax - 3xx = 0$ & $x = \frac{2}{3}a$. Si itaque loco x substituatur $\frac{2}{3}a$ in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9}a^3 - \frac{8}{27}a^3 = \frac{4}{27}a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2axdx - 3x^2dx$, nihilo fuisset æquata.

(a) * *Hoc est, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.)

(b) * *In spatiis liberis*, id est, in quibus nullum aliud est obstaculum præter medii resistentiam velocitati proportionalem. 49.

(c) * *Dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest*, hoc est, usque ad motus exstinctionem. (Ostendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando resistitur motui in ratione velocitatis). Cùm ergo motus ad exstinctionem usque amissus, sit ipse motus totus; & motus amissi sint ut spatia movendo confecta (*per Theor.*) erit motus totus ad motûs partem amissam post datum spatium descriptum, ut spatium ad exstinctionem usque motûs descriptum ad illud datum spatium. Unde liquet, spatium, quod corpus ad motûs usque exstinctionem describit, finitum esse, cùm datam habeat rationem ad spatium finitum.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. I. Prop. II. Theor. I.

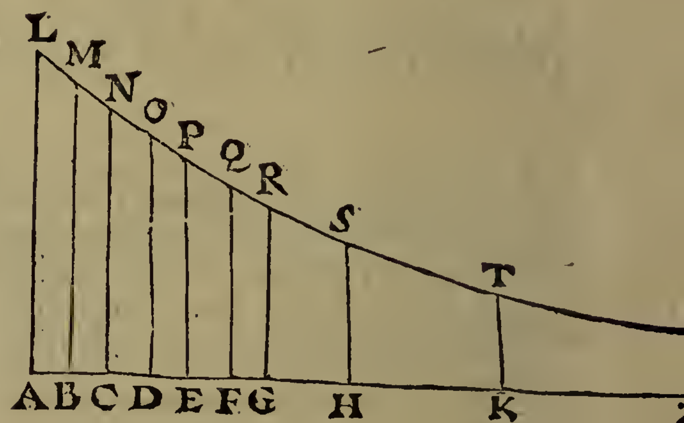
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: (d) erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (*per lem.* 1. *lib.* 11.) continuè proportionales. (e) Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continuâ, qui per saltum capiuntur omisso passim æquali termino-

(d) * *Erit decrementum velocitatis*. (15) ut resistentia ob datum temporis momentum, ideoque (*per hyp.*) ut velocitas.

(e) 50. *Proinde si ex æquali* &c. Linea recta A Z in particulas æquales A B, B C, C D &c. divisa, exponat tempus, & perpendicula A L, B M, C N &c. exponant velocitates ipsis singulorum temporum A B, B C, C D &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progressione geometricâ decrescente. Proindè si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut A E, E H, H K &c. erunt velocitates A L, E P, H S &c., ipsis temporum initiis ut termini qui è progressione geometricâ per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum B M, C N &c. & F Q, G R &c. numero. Componuntur autem horum terminorum A L, E P, H S &c., rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio A L ad E P, componitur ex rationibus A L ad B M, B M ad C N &c., quæ tum magnitudine, tum numero æquales sunt rationibus E P ad F Q, F Q ad G R &c. ex quibus componitur ratio E P ad S H, & ità porrò. Quarè ratio A L ad E P æqualis est rationi E P ad H S, & hæc æqualis rationi H S ad K T. Manifestum autem est (33) curvam L M N S T, ad quam terminantur perpendicula omnia A L, B M, C N &c., esse Logarithmicam.

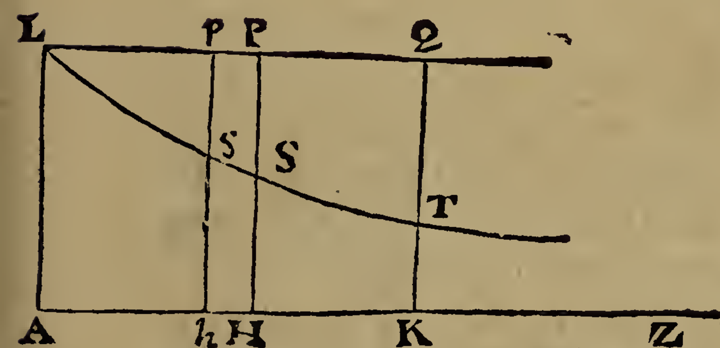


51.

norum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter ſe iiſdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compoſitæ inter ſe eædem ſunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, ſunt in progreſſione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut reſiſtentiæ impulſus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, ſemper continuè proportionales, erunt in hoc etiam caſu continuè proportionales. *Q. E. D.*

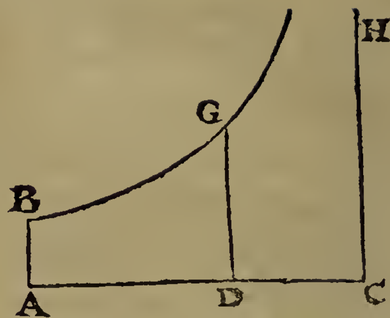
Caſ. 2. Et diviſim velocitatum differentiæ, hoc eſt, earum partes ſingulis temporibus amiſſæ, ſunt ut totæ: ſpatia autem ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitatum partes amiſſæ (*per prop.* 1. *lib.* 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol.



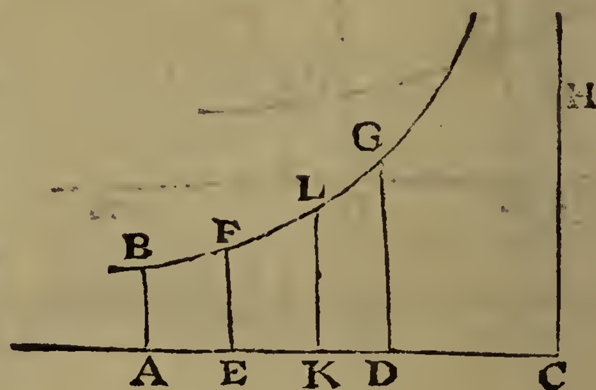
51. Si aſymptoto A Z deſcripta ſit Logarithmica quævis L S T, ad aſymptotum verſus Z accedens, & ordinata A L exponat velocitatem corporis initio motûs, abſciſſæque A H, A K, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ H S, K T, ut velocitates reſiduæ elapſis temporibus A H, A K, & ideò ductâ per punctum L rectâ L Q, aſymptoto A Z parallelâ, & ordinatas productas H S, K T ſecante in P, Q, erunt P S, Q T ut velocitates amiſſæ, atque etiam ut ſpatia deſcripta, temporibus A H, A K, vel L P, L Q. Ductâ ordinatâ, h s, alteri H S, infinitè propinquâ, ſpatium velocitate uniformi A L, tempuſculo h H deſcriptum in vacuo, erit ad ſpatium eodem tempore cum velocitate H S, confectum in medio reſiſtente, ut rectangulum H P × H h, ad rectangulum S H × H h, ſeu aream H S s h (12) & ideò ſi totum tempus A H in particulas innumeras ut h H diviſum ſit, erit ſpatium cum velocitate A L, in vacuo deſcriptum toto tempore A H, ad ſpatium eodem tempore percurſum in medio reſiſtente ut rectangulum A P ad aream Logarithmicam A L S H; ſed area A L S H, æqualis eſt rectangulo ſubtangentis Logarithmicæ in P S, (39) & ideò ſi aſſumpta ſit A L ſubtangenti æqualis, eſt area A L S H, æqualis rectangulo A L × P S; Quarè in hâc hypotheſi, erit ſpatium prius ad poſterius ut L P, ad P S. 50.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. II. THEOR. II.



Corol. Hinc si asymptotis rectangulis *A C*, *C H* describatur hyperbola *B G*, sintque *A B*, *D G* ad asymptoton *A C* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *A C*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium eo tempore descriptum per lineam *A D*. (f) Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *D C* in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & (g) partes rectæ *A C* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione.

PRO-



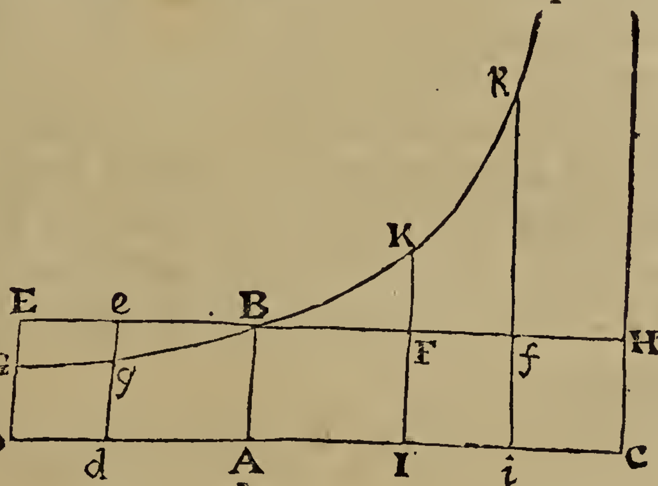
(f) * *Nam si area illa per motum puncti D* sive ordinatæ D G *augeatur uniformiter ad modum temporis*, exhibeatque proindè tempus, *decrescet recta D C, in ratione geometricâ* (380. lib. 1.) *ad modum velocitatis*, & ideò velocitatem poterit exponere (*per Cas.* 1. *Dem.*) & quia recta A C exponit velocitatem ipso motûs initio, & D C, velocitatem residuam elapso tempore A B G D erit A D ut velocitas amissa, atque ideò ut spatium descriptum (*per prop.* 1. *hujus*). Quia verò coincidentibus punctis D & C, area ABGD infinita evadit, manifestum est tempore infinito finitum spatium A C describi.

(g) * *Et partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione &c.* Nam si area A B G D ductis ordinatis F E, L K in partes æquales A B F E, E F L K, K L G D divisa sit, erunt lineæ CA, C E, C K, C D in progressione geometricâ decrescente (380. *lib.* 1.) hoc est CA : CE = CE : CK = CK : CD, & dividendo A E : E K = E K : K D = C A : C E. Decrescunt ergo partes rectæ A C in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ A E, E K, K D &c., spatia temporibus A B F E, E F L K, K L G D, descripta, & tota recta A D spatium toto tempore A B G D descriptum.

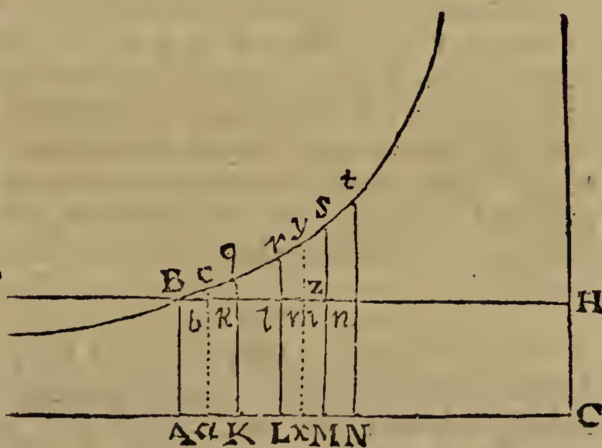
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*, & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.



(h) Resolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum tem-



porum

(h) * *Resolvatur enim &c.* Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. III. PROBL. I.

porum æqualium. (i) Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK* ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC*, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (*per motûs legem* II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. & (k) propterea (*per lem.* I. *lib.* II.) in progressione geometricâ. Quare si rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. (l) æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. (m) Est autem area *ABqK* (*per corol.* 3. *lem.* VII. & *lem.* VIII. *lib.* I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}$ *kq* seu *AC* ad $\frac{1}{2}$ *AK*, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi.

Et

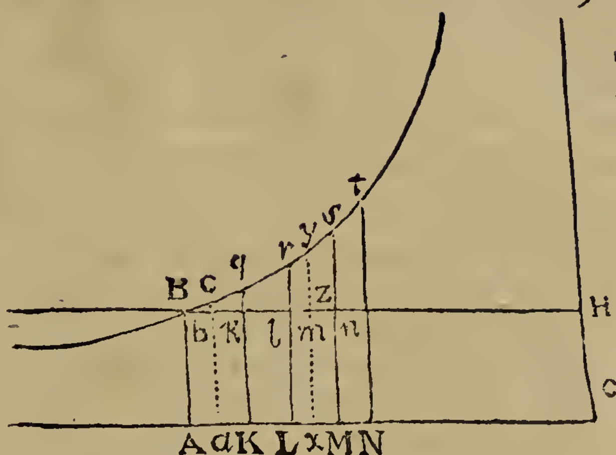
(i) * *Fiat AC ad AK &c.* Cùm enim sit AKkB, proportionalis resistentiæ principio temporis secundi, si fiat AKkB ad ABHC seu AK ad AC, ut resistentia illa ad gravitatem, rectangulum AH exponet vim gravitatis datam; & simili modo, cum sit Al, ad Ak, ut resistentia initio temporis tertii ad resistentiam initio temporis secundi, erit, ex æquo perturbare Al ad AH, seu AL ad AC, ut resistentia in principio temporis tertii ad gravitatem, & ità deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem resistentia retardat, de vi gravitatis auferenda est vis resistentiæ ut habeatur vis absoluta quâ corpus deorsum urgetur.

(k) * *Et propterea.* Rectangula ABHC, KkHC, LlHC &c. differentiis suis Ak, Kl &c., proportionalia, erunt in progressione geometricâ (*per Lem.* I. *lib.* 2.)

(l) * *Æquales.* (380) lib. I.)

(m) *Est autem area ABqK* (*per cor.* 3. *Lem. VII. & lem. VIII. lib.* I.) *ad aream Bkq ut Kq ad* $\frac{1}{2}$ *kq seu ut AC ad* $\frac{1}{2}$ *AK.* Etenim per ea Lemmata has areas pro rectilineis sumi posse constat, erigatur in medio partis AK perpendicularis ac ad Hyperbolam usque, facile constabit ex Elementis trapezium ABqK fore ad Triangulum Bkq ut tota ea perpendicularis ac (pro quâ Kq sumi poterit) ad portionem ejus bc intrà Triangulum comprehensam, quæ erit (*ex konst. &* 2â. 6ti. *Elem.*) = $\frac{1}{2}$ kq, est verò ex natura Hyperboles ea perpendicularis ac ad AB, ut AC ad Ca sive AC — $\frac{1}{2}$ AK & dividendo, est ea perpendicularis ac ad ac — ab sive bc quæ est $\frac{1}{2}$ kq ut AC ad AC — AC + $\frac{1}{2}$ AK sive $\frac{1}{2}$ AK; Ergo area ABqK est ad aream Bqk ut AC ad $\frac{1}{2}$ AK, sive ut Rectangulum ABCH ad Rect. $\frac{1}{2}$ ABkK, seu *ut vis gravitatis* quam exponit Rectang. AH ad *resistentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. Ak. Cùm enim sit AK ut velocitas toto primo tempore acquisita, erit $\frac{1}{2}$ AK ut velocitas in medio temporis primi acquisita; resistentiæ autem sunt velocitatibus analogæ.

Et (n) ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proindè cùm areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque (o) ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q.E.D.*



Et (p) ſimilis eſt demonſtratio motûs expoſiti in aſcenſu, *Q. E. D.*

Co-

(n) *Et ſimili argumento areæ.* Sumptis enim iſtis areis pro Trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares x z y in medio partium A K, K L, L M, M N ad Hyperbolam uſque, & (*ex elementis*) facile conſtabit quod area tota ſinguli trapezii (v. gr. r L M s) eſt ad ejus areæ portionem ſupra B H poſitam (nempe r l m s) ut linea tota x y per medium trapezii ducta ad ejus partem z y ſupra B H, ſed ex naturâ Hyperbolæ eſt ea perpendicularis x y ad A B ſive x z, ut A C ad abſciſſam C x illi perpendiculari reſpondentem (quæ eſt C L — $\frac{1}{2}$ L M), & dividendo, eſt ea perpendicularis x y ad ejus partem z y ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & eam perpendicularem (hoc eſt, in exemplo aſſumpto, ut A C ad A L + $\frac{1}{2}$ L M). Ergo area tota ſinguli trapezii ad ejus areæ portionem ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & medium partis cujuſvis aſſumptæ, ſive (aſſumpta communi altitudine A B) ut Rectangulum A H, ad Rectangulum ſub A B & lineâ inter A & medium partis aſſumptæ comprehenſa; ſed illud eſt ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut reſiſtentia in medio temporis cui reſpondet pars aſſumpta, ergo alternando, area ſinguli trapezii eſt ad vim gravitatis ut portio trapezii ſupra B H ad reſiſtentiam ſive ad velocitatem in medio temporis cui reſpondet trapezium, ſed areæ totæ trapeziorum ſunt ubique æquales, & vis gravitatis ſemper eadem, conſtans ergo eſt eorum ratio; ergo, portiones trapeziorum ſuper B H, ut r l m s ſunt ſicut reſiſtentiæ ſive ut velocitates, adeóque ut ſpatia ſingulis tempuſculis quibus reſpondent deſcripta. 50.

(o) * *Atque ideò deſcriptis ſpatiis analogæ.* Spatia enim ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates per Prop. II. hujuſce libri.

(p) *Et ſimilis eſt demonſtratio.* Reſolvatur enim rectangulum D B in rectangula innumera D k, K l, L m, M n &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, & erunt nihil D k, D l, D m, D n &c., ut velo-

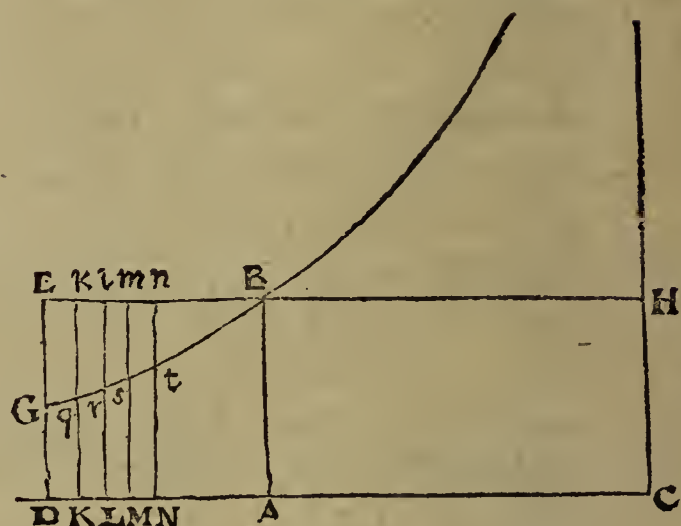
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. III. PROBL. I.

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim reſiſtentiæ, quâ (q) in fine temporis illius impeditur.

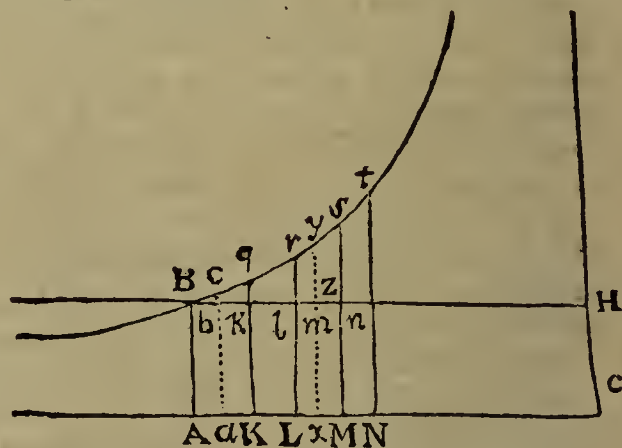
Co-

citates totæ amiſſæ in principio ſingulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (*per hyp.*) velocitatem corporis & reſiſtentiam medii velocitati proportionalem initio aſcenſus, rectangula A E, A k, A l, A m, A n &c., exponent velocitates reſiduas, reſiſtentiaſque medii initio ſingulorum temporum æqualium. Fiat A C, ad A k, ſive Rectang. A H ad Rectang. A k, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam principio temporis ſecundi, & vi gravitatis addatur reſiſtentia (quod gravitas & reſiſtentia corporis aſcendentis motum retardent) & erunt D E H C, K k H C, L l H C, M m H C &c., ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum retardatur, atquè ideò (*per mot. leg.* 2.) vel *per not.* 18.) ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula D k, K l, L m, M n &c., & proptereà (*per Lem.* 1. *Lib.* 2.) in progreſſione geometricâ. Quarè ſi rectæ K k, L l, M m, N n &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ D G q k, k q r L, L r s M, M s t N &c. æquales, ideóque tum temporibus, tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ.

Erigatur in medio partis D K perpendicularis uſque ad E B, erit area D G q K ad aream G E k q ut pars ejus perpendicularis ad Hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam uſque ad E B, ſed (*per Theor.* 4. *de Hyperbola*, ea ordinata ad Hyperbolam eſt ad A B ſive ad totam perpendicularem, ut A C ad ejus ordinatæ abſciſſam, ideoque dividendo, eſt ea ordinata ad perpendicularis partem reliquam uſque ad lineam E B, ſive eſt area D G q K ad aream G E k q ut A C ad portionem abſciſſæ inter A & perpendicularem, & aſſumptâ communi altitudine A B, ut Rectangulum A H ad Rectangulum ſub A B & portione abſciſſæ inter A & perpendicularem, ideoque area D G q K ad aream G E k q ut vis gravitatis ad reſiſtentiam ſi-



ve velocitatem reſiduam in medio temporis primi, cùmque vis gravitatis ſit ubique eadem & areæ D G q K, q K L r, ubique æquales, areæ G E k q, k q r l, &c. erunt ſemper ut reſiſtentiæ in ſingulis temporibus ſive ut velocitates, ideoque ut ſpatia ſingulis tempuſculis deſcripta, ac per conſequens areæ totæ G E n t, erunt ut ſpatia toto tempore G D N t deſcripta, dum areæ A B N n erunt ut velocitates in fine eorum temporum reſiduæ.



(q) * *In fine temporis illius impeditur.* Eſt enim velocitas dato tempore, A B r L acquiſita, ad velocitatem alio quovis tempore A B t N acquiſitam, ut rectangulum A l ad re-

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu (r) decrescit in progressione geometricâ.

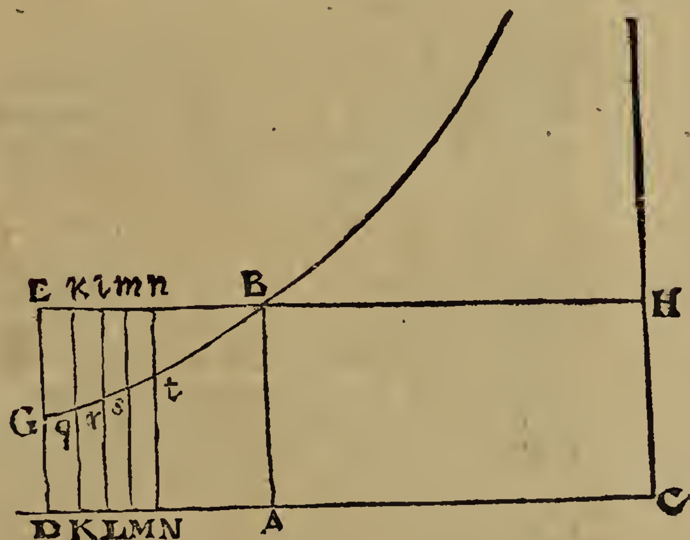
Corol. 3. (f) Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus

51.

rectangulum A n, sivè ut linea data A L, ad lineam A N, (ex dem.), & ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, seu cum tempore continuò crescit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C & ordinatâ N t cum asymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc est, tempus fit infinitum & velocitas maxima; Quarè velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, est ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquisitam ut A C ad A L, seu ut rectangulum A H, ad rectangulum A I, hoc est, (*ex dem.*) ut vis gravitatis ad vim resistentiæ in fine temporis A B r L.

(r) * *Decrescit in progressione geometricâ.* In ascensu corporis temporibus D G q k, D G r l, D G s M &c. in arithmeticâ progressione crescentibus, abscissæ C D, C K, C L, &c. in progressione geometricâ decrescunt (380. *lib.* 1.) sed singulæ abscissæ illæ sunt (*ex dem.*) ut summa velocitatis maximæ quam exponit linea C A, & velocitatis residuæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M &c., in fine temporis D G q k, vel D G r L, vel D G s M &c. Quarè tempore aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis maximæ ac velocitatis in ascensu residuæ decrescit in progressione geometricâ. Simili modo in descensu corporis patet quod crescentibus temporibus (vid. fig. notæ super.) A B q k, A B r L, ABsM &c., in progressione arithmeticâ, abscissæ C A, C K, C L, C M &c., decrescunt in progressione geometricâ (380. *lib.* 1.), sed abscissæ illæ sunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C & velocitatis acquisitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M &c., crescente igitur tempore in progressione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, & velocitatis dato quovis tempore in descensu acquisitæ, decrescit in progressione geometricâ. Hinc si summa illa in ascensu & differentia in descensu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum Logarithmi.

(f) * *Sed & differentiæ spatiorum.* Nam si in ascensu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N &c. æqualia, erit spatium primo tempore descriptum ut G E k q = D K × D E — D G q K; spatium tempore secundo descriptum ut q k l r = K L × D E — K q r L (sive quia K q r L = D G q K) = KL×DE — D G q K, & ità de cæteris. Quarè differentia spatiorum primo & secundo tempore descriptorum est ut D K × D E — K L × D E, id est, ob datam D E, ut D K — K L; & simili argumento differentia spatiorum secundi & tertii temporis est ut



K L — L M; differentia spatiorum tertii & quarti temporis ut L M — M N. Erunt igitur differentiæ spatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur ut differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N &c., sed (*ex dem.*) termini D K, K L, L M, M N &c., decrescunt ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Ergò differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N &c., decrescunt ut D K, K L, L M, M N &c., seu ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Eadem est demonstratio pro descensu.

temporum differentiis deſcribuntur, decreſcunt in eâdem progreſſione geometricâ.

Corol. 4. Spatium verò à corpore deſcriptum differentia eſt duorum ſpatiorum quorum alterum eſt ut tempus ſumptum ab initio deſcenſus, & (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipſo (u) deſcenſûs initio æquantur inter ſe.

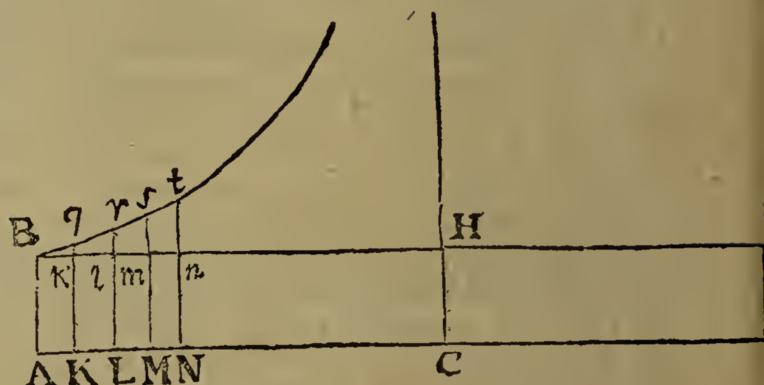
PRO-

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam ſpatium tempore quovis A B t N, in deſcenſu deſcriptum, eſt ut area B t n, eſt autem area B t n = A B t N — A B n N, & eſt A B n N ut velocitas tempore A B t N acquiſita.

(u) * *Deſcenſûs initio æquantur.* Deſcenſûs initio eſt area naſcens A B q K æqualis rectangulo A B K k.

52. *Scholium.* Ex demonſtratis non ſolùm corporis aſcendentis aut è quiete deſcendentis motus determinatur, ſed etiam motus ejuſdem datâ cum velocitate deorſum projecti facilè inveniri poteſt. Nam velocitas projectionis vel æqualis eſt velocitati maximæ, quam in figuris ſuperioribus exponit linea A C, ſive rectangulum A H, aut velocitate maximâ minor eſt, aut eâ major. Si 1um. motus corporis deorſum verticaliter projecti æquabilis eſt, ob reſiſtentiam gravitati æqualem & contrariam. Si 2um. in lineâ A C (*vid. fig. prop.* 3.) capiatur A L, ad A C, ut velocitas projectionis data ad maximam, ſive ut reſiſtentia ad gravitatem, & tempore quovis L r t N, corpus deſcribet, ſpatium l r t n, & in fine illius temporis habebit velocitatem L l n N, eodem modo ac ſi è quiete cadendo tempore A B r L, acquiſiviſſet datam projectionis velocitatem A B l L, & deindè in motu perſeveraſſet.

53. Verùm ſi velocitas projectionis major ſit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere poteſt, mutanda erit Newtoni conſtructio. Cæteris enim manentibus ut in conſtructione pro corporum deſcenſu, producantur rectæ A C, & B H, ad a & b, ut ſit rectangulum A B b a ad rectangulum C H b a, ut reſiſtentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum A B b a, cùm reſiſtentia ſit ipſi ſemper proportionalis, & corpus deſcendendo tempore quovis A B t N, deſcribet ſpatium

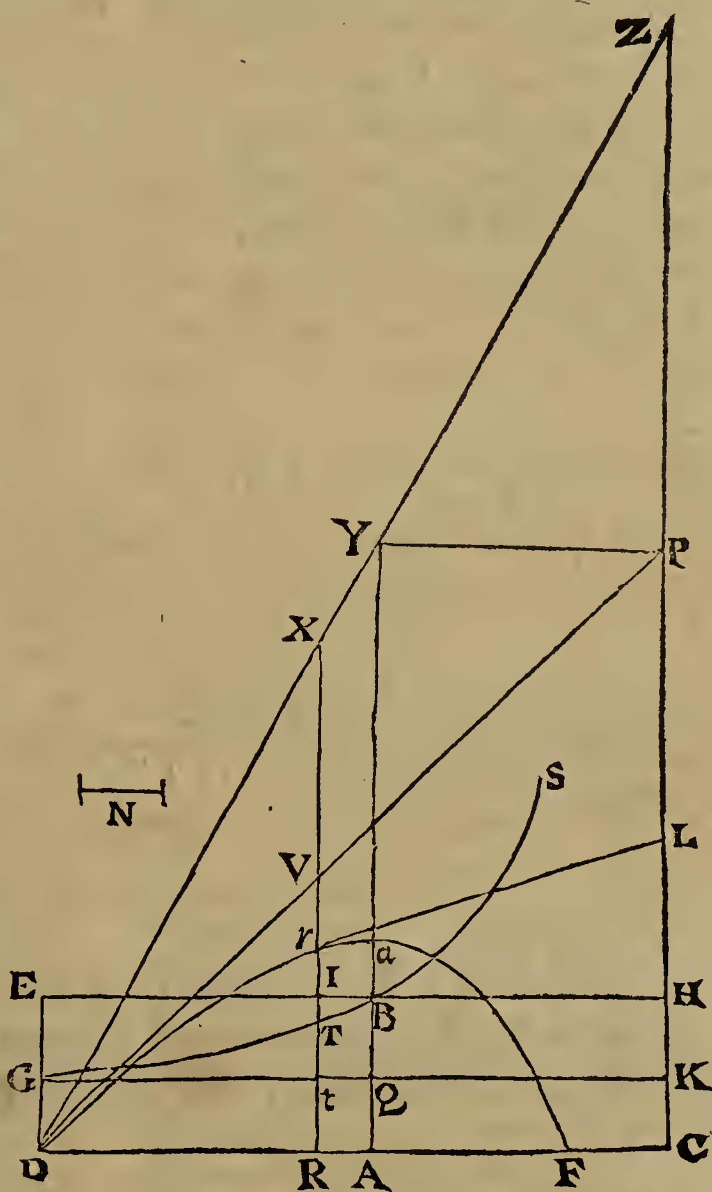


A B b a × A N + C a × B t n, & velocitatem habebit N n b a, & tempore infinito deſcribet ſpatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali ſive maximæ velocitati quam corpus è quiete cadendo acquirere poteſt. Reſolvatur enim rectangulum A H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cùm enim reſiſtentia gravitatem ſuperet, velocitas decreſcit) & erunt, nihil A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates amiſſæ, & ideò rectangula a B, a k, a l, a m, a n, &c., ut velocitates reſiduæ reſiſtentiis proportionales, principio ſingulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem reſiſtentia retardat, de vi reſiſtentiæ ſubducatur gravitas C H b a, & manebunt rectangula ABHC, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula A k, K l, L m, M n, & propterea per Lem. 1. Lib. 2. in progreſſione geometricâ. Quarè (380. lib. 1.) erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque temporibus ſemper æqualibus analogæ. Elapſo igitur tempore quovis A B t N, corporis velocitas reſidua erit ut rectangulum N n b a, ſive ut recta N a, ſed ſpatia ſunt ut velocitas & tempus conjunctim, ergo

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quòd vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitatis proportionalem patientis.

Et loco quovis *D* egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* (x) demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A*, ut (y) sit *DA* ad *AC* ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (z) (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP*, ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC*, *CP* describatur hyperbola quævis *GTBS* secans



ergo spatia singulis tempusculis descripta; sunt ut ea velocitas N a ducta in tempus M s t N, id est ut N C × t N × M N + C a × t N × M N = A B H C × M N + C a × M s t N, (ob N C × t N = A B × C A, per theor. 4. de Hyp.) Quarè (componendo) spatium totum tempore A B t N descriptum, erit ut A B H C × A N + C a × A B t N = A B b a × A N + C a × B t n, ob A B t N = A B × A N + B t n. Q. E. D.

(x) * *Demittatur perpendiculum P C*, & quoniam D P exponit velocitatem projectionis, CP exponet velocitatem verticalem, & D C velocitatem horizontalem, *per leg. motûs cor.* 1. & 2. 53

(y) * *Ut sit D A ad A C ut resistentia &c.*, aut, quod idem est (*per cor.* 1. *prop.* III.) ut sit D A ad A C ut velocitas verticalis C P ad velocitatem maximam seu terminalem.

(z) * *Vel (quod perinde est) ut sit rectangulum &c.* Nam cùm sit D P ad C P

perpendicula *D G*, *A B* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *D G K C* cujus latus *G K* fecet *A B* in *Q*. Capiatur linea N in ratione ad *Q B* quâ *D C* fit ad *C P*; & ad rectæ *D C* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *R T*, quod hyperbolæ in *T*, & rectis *E H*, *G K*, *D P* in *I*, *t* & *V* occurrat; in eo cape *V r* æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel (a) quod perinde eft, cape *R r* æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore *DRTG* perveniet ad punctum *r*, defcribens curvam lineam *D r a F*, quam punctum *r* femper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem *a* in perpendiculo *AB*, & poftea femper appropinquans ad afymptoton *P C*. Eftque velocitas ejus in puncto quovis *r* ut curvæ tangens *r L*. *Q. E. I.*

Eft

ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proinde ex lege refiftentiæ ut refiftentia tota fub initio ad refiftentiam ex motu in altitudinem, & cùm fit D A ad A C ut refiftentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (*per hypothefim*), erit per compofitionem rationum & ex æquo D A × D P ad A C × C P ut refiftentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

(a) * *Vel quod perinde eft, cape R r æqualem &c.* Cùm enim fit (per hyp.) N : Q B = D C : C P, & D C : C P = D R : R V, ob triangula fimilia D R V, D C P; erit N : Q B = D R : R V, & ideo R V = $\frac{DR \times QB}{N}$. Sed rectangulum G E I t = G t × G E = D R × Q B = G T I E + t G T, & ideo $\frac{GTIE}{N} = \frac{DR \times QB - tGT}{N} = RV - \frac{tGT}{N}$. Quare fi capiatur V r = $\frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N}$ = R V − V r = R r.

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) (b) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (*per legum corol.* 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cùm resistentia sit ut motus, (c) distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus descripta, erit (*per prop.* II. hujus) ut (d) linea DR, (e) altitudo verò (*per prop.* III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, (f) æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cùm igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & prop-

(b) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Est enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

(c) * *Distinguetur etiam hæc &c.* In eâ, quam tractamus, resistentiæ hypothesi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur & dividuntur in vacuo; quod in aliis resistentiæ hypothesibus fieri non potest. Cùm enim resistentia velocitati proportionalis est, spatia velocitatibus separatis & conjunctis eodem temporis momento describenda vi resistentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter se ratione.

(d) * *Ut linea D R.* Exponitur enim corporis velocitas horizontalis sub motûs initio per lineam D C. Unde tempus exponi poterit per aream hyperbolicam D R G T, & spatium hoc tempore descriptum per lineam D R, *per cor. prop.* II. hujus.

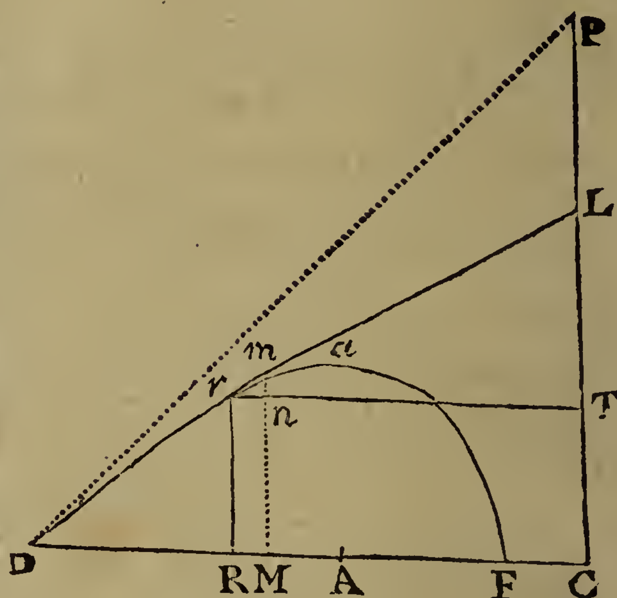
(e) * *Altitudo verò &c.* Cùm enim sit D A ad A C ut resistentia verticalis ad gravitatem (*per hyp.*); area G T I E, seu ei æqualis $DR \times AB - RDGT$, erit ut altitudo motu verticali descripta (*per prop.* III. *hujus*); & quia) *per construct.*) est $Rr = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideoque ob datum N, Rr ut $DR \times AB - RDGT$, erit altitudo ut R r.

(f) * *Æqualis est rectangulo &c.* Nam coincidente puncto t cum G, evanescit T t respectu R t seu A Q, fitque area evanescens R D G T æqualis R D G t seu $DR \times AQ$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

propterea ut corpus moveatur in linea $D\,r\,a\,F$, quam punctum r (g) perpetuò tangit. *Q. E. D.*

Co-



(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem D A est ad A C ut resistentia ex motu verticali sub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius ascensûs corporis erit D A B G (*per Prop.* III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem D A, & ideo ad maximam suam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo A B a, & postea semper appropinquat ad asymptoton P C (*per* Cor. *Prop.* II). Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur r T horizontali D C parallela & verticali C P occurrens in T, verticalis M m ipsi R r infinitè propinqua secet r T in n & tangentem r L seu curvam in m: & quoniam motus corporis in loco r per arcum r m dividi potest in motum horizontalem r n & verticalem n m; erit velocitas horizontalis ad verticalem ut r n ad n m, & ad obliquam secundùm tangentem curvæ ut r n ad r m. Sed ob similitudinem triangulorum r n m, r T L, est r n : m n = r T vel R C : T L, & r n : r m = R C : r L. Quare cùm R C sit ut velocitas horizontalis corpori in loco r residua ex velocitate D C quam sub initio motus habebat in loco D (*per Cor. Prop.* II.); erit T L ut velocitas verticalis corpori residua ex velocitate initiali C P, & r L ut velocitas obliqua in arcu r m ex duabus r T, & T L composita. Est itaque velocitas & proinde resistentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens r L.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci potest tangens r L. Nam velocitas verticalis L T in loco r est ad velocitatem verticalem C P in loco D, ut rectangulum R B ad rectangulum D B (*vide figuram textûs*) sive ut R A ad D A (*per Prop.* III.); ideoque $L\,T = \frac{C\,P \times R\,A}{D\,A}$.

56. Ex superiori constructione facilè deducitur æquatio ad trajectoriam D r a F. Positis enim $D\,P = b$, $D\,C = e$, $C\,P = f$, $A\,C = g$, $A\,B = h$, $R\,r = y$, & $D\,R = x$, erit (*per theor.* 4um. *de hyperb. lib.* 1.) $D\,C\,(e) : A\,C\,(g) = A\,B\,(h) : G\,D = \frac{gh}{e}$, & $R\,C\,(e - x) : A\,C\,(g) = A\,B\,(h) : R\,T = \frac{gh}{e-x}$; ideoque $Q\,B = A\,B - G\,D = \frac{eh - gh}{e}$, & areæ hyperbolicæ R D G T elementum nascens $R\,T \times dx = \frac{g\,h\,dx}{e-x}$, ac proinde area $R\,D\,G\,T = g\,h.\,S.\frac{dx}{e-x}$, Præterea (per constr.) est $C\,P\,(f) : D\,C\,(e) = Q\,B\,\frac{(eh - gh)}{e} : N = \frac{eh - gh}{f}$, & $R\,r = y = \frac{D\,R \times A\,B - R\,D\,G\,T}{N}$. Est & $D\,R \times A\,B = h\,x$. Quare erit $y = \frac{fx}{e-g} - \frac{fg}{e-g} \times S.\frac{dx}{e-x}$. Est etiam (*per constr.*) D A seu $e - g$ ad A C seu g ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, & ideo per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas verticalis*, quam exponit recta C P seu f, ad *velocitatem terminalem*; & ideo si velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{g} - a.\,S.\frac{dx}{e-x}$ & sumptis fluxionibus $dy = \frac{a\,dx}{g} - \frac{a\,dx}{e-x}$. Si ponatur R C sive $e - x = z$; erit

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR\times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque si producatur RT ad X ut (h) sit RX æqualis $\frac{DR\times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY secans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Co-

erit $-dx = dz$, & $\frac{a\,dx}{e-x} = \frac{a\,dz}{z}$, ideoque $-a.\,S.\frac{dx}{e-x} = a.\,S.\frac{dz}{z} = a.\,L.z = a.L.e-x$ (40). Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e - x + Q$ *const.* Et quia evanescente y, evanescit quoque x, invenitur constans $Q = -a.\,L.\,e$, & hinc $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e - x - a.L.e = \frac{ax}{g} - a.L.\,\frac{e}{e-x}$. Est enim $L.e - L.e-x = L.\,\frac{e}{e-x}$, & signis mutatis $L.\,e-x - L.\,e = -L.\,\frac{e}{e-x}$. 57

57. Ex hac æquatione alia deducitur inter DV & Vr. Si enim dicantur $DV = v$ & $Vr = z$, erit ob triangula DCP, DRV similia, $DP\,(b) : DV\,(v) = DC\,(e) : DR\,(x) = \frac{ev}{b}$, & ideo $e - x = \frac{eb - ev}{b}$ & $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; similiter erit $DC\,(e) : CP\,(f) = DR\left(\frac{ev}{b}\right) : VR = \frac{fv}{b}$, ideoque $y = Rr = VR - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.L.\frac{b}{b-v}$, & $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a.\,L.\,\frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonstr.) $a = \frac{fg}{e-g}$, atque ideo $ae - ag = fg$, & $fg - ae = -ag$; quare erit etiam $z = a.\,L.\,\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$.

(h) * *Ut sit* RX *æqualis* $\frac{DR\times AB}{N}$ vel quod idem est, *si compleatur Parallelogrammum* $ACPY$ erit $AY = CP$, *si jungatur* DY *secans* CP *in* Z, *& producatur* RT *donec occurrat* DY *in* X valor RX qui hoc modo reperitur idem erit cum valore $\frac{DR\times AB}{N}$ ipsi assignato (*vide fig. text. pag.* 28) erit enim $DA : AY\,(CP) = DR : RX = \frac{CP\times DR}{DA}$; jam verò $\frac{CP}{DA} = \frac{AB}{N}$, quippe per nat. Hyper. est $AB : DG$ (sive QA) $= DC : AC$ & convertendo $AB : AB - AQ$ (sive QB) $= DC : DA = \frac{DC\times QB}{AB}$, ergo $\frac{CP}{DA} = \frac{AB\times CP}{DC\times QB}$, sed $\frac{CP}{DC\times QB} = \frac{1}{N}$ ex construct. ergo $\frac{CP}{DA} = \frac{AB}{N}$, & $\frac{CP\times DR}{DA}$ qui est valor RX repertus per constructionem, idem est ac valor $\frac{AB\times DR}{N}$ ipsi assignatus per Hypothesim. Quoniam igitur $RX = \frac{DR\times AB}{N}$, & $Xr = RX - Rr = \frac{DR\times AB}{N} - \frac{DR\times AB}{N} + \frac{RDGT}{N}$; erit $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & prop-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. I. Prop. IV. Probl. II.

Corol. 2. Unde ſi capiantur innumeræ $C R$, vel, quod perinde eſt, innumeræ $Z X$ in progreſſione geometricâ; erunt totidem $X r$ in (i) progreſſione arithmeticâ. Et hinc curva $D r a F$ (k) per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D, diametro $D G$ deorſum productâ, & latere recto quod ſit ad $2 D P$ ut reſiſtentia tota ipſo motus initio ad vim gravitatis, parabola conſtruatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D ſecundum rectam $D P$, ut in medio uniformi reſiſtente deſcribat curvam $D r a F$, ea ipſa erit quâcum exire debet de eodem loco D, ſecundum eandem rectam $D P$, ut in ſpatio non reſiſten-

propterea, ob datam N, X r eſt ut area R D G T, ideoque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

(i) * *In progreſſione arithmeticâ.* Nam (380. lib. 1.) temporibus ſeu areis R D G T in progreſſione arithmeticâ creſcentibus, abſciſſæ R C in progreſſione geometricâ decreſcunt, & vice versâ. Quare verticalibus X r, quæ ſunt ut areæ R D G T, in progreſſione arithmeticâ creſcentibus, correſpondentes abſciſſæ R D decreſcent in progreſſione geometricâ, & contra. Sed ob triangulorum D R X, D C Z ſimilitudinem, eſt D C ad D Z ut D R ad D X, & diviſim ut R C ad Z X: quare ob datas D C & D Z, eſt Z X ad R C in datâ ratione, & ideo Z X creſcit vel decreſcit in eâdem ratione cum R C.

(k) 58. *Per tabulam Logarithmorum facilè delineatur.* Dicantur enim, ut ſuprà n. 56. $DC = e$, $CP = f$, $AC = g$, $a = \frac{fg}{e-g}$ $DR = x$, $Rr = y$; & erit (56) $y = \frac{ax}{g} - aL\frac{e}{e-x}$.

Ob triangula D A Y, Y P Z ſimilia, eſt D A ſeu $e - g$ ad A Y vel C P ſeu f, ut Y P vel A C ſeu g ad P Z, ideoque $PZ = \frac{fg}{e-g} = a$. Triangula ſimilia D R X, Y P Z dant etiam Y P ſeu g ad P Z ſeu a, ut D R ſeu x ad R X, & propterea $RX = \frac{ax}{g}$. Unde cùm ſit $RC = e - x$, æquatio $y = \frac{ax}{g} - a\,L.\frac{e}{e-x}$ fiet $Rr = RX - PZ \times L.\frac{DC}{RC}$. Verùm cùm $PZ.\ L.\frac{DC}{RC}$ ſit Logarithmus rationis D C ad R C in Logarithmica cujus ſubtangens eſt a ſive P Z, dicendo ut ſubtangens tabularum ad P Z, ita $L.\frac{DC}{RC}$ è tabulis deſumptus ad ejuſdem quantitatis Logarithmum in Logarithmicâ cujus ſubtangens eſt P Z. Invenietur itaque $PZ \times L.\frac{DC}{RC}$

ope

ſiſtente deſcribat parabolam. Nam (l) latus rectum parabolæ hujus, DE MOTU CORPORUM.

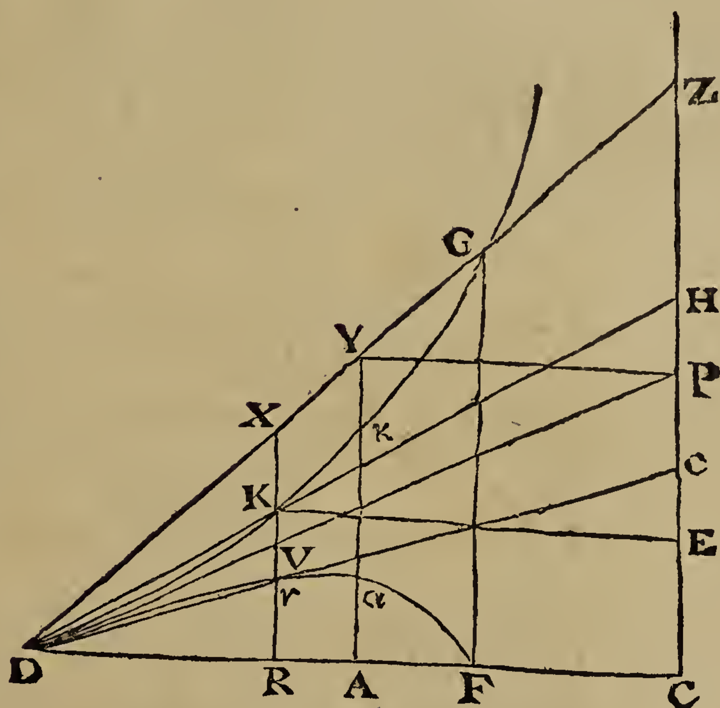
ope tabulæ vulgaris Logarithmorum, & inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, & ſic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

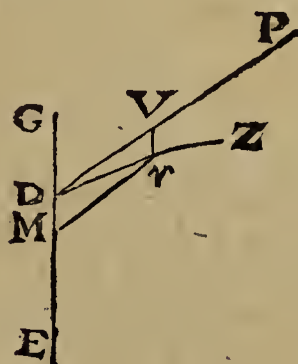
59. Ex his ſimpliciſſima deducitur trajectoriæ D r a F per Logarithmicam conſtructio. Iiſdem enim poſitis quæ in corollario 1° hujus præſcripta ſunt, aſymptoto C Z & ſubtangente P Z deſcribatur per punctum D Logarithmica D K k G ſecans R X in K. Capiatur X r = R K, ſeu R r = X K, & punctum r erit in trajectoriâ quæſitâ D r a F. Nam ſi ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E ſeu R K Logarithmus rationis D C ad K E vel R C (34), ideoque erit (58) R r = R X — R K = X K, & hinc R K = R X — R r = X r. Q. E. D.

60. Hæc conſtructio hoc etiam commodi habet, quod ſtatim inveniantur altitudo maxima A a & horizontalis amplitudo D F. Eſt enim A a = Y k; & ſi ex puncto G interſectionis Logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs: nam coincidente X cum G fit X K ſeu R r = o, & ideo coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam ſecat, invenitur, ſi capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H Logarithmicam ſecans in K, & ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c ſecabit in puncto quæſito r; erit enim R K : C H ſeu Z c = D r : D c = X r : Z c, ideoque X r = R K.

61. Quoniam velocitas projectionis eſt ad velocitatem terminalem, quæ data eſt, ut D P ad P Z (58); ſi manet velocitas projectionis & linea D P, manebit quoque Logarithmicæ ſubtangens P Z; & ideo una eademque Logarithmicæ ſpecies deſcribendæ trajectoriæ D r a F ſufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

(l) 62. *Latus rectum parabolæ hujus &c.* Eſt enim V r ſpatium infinitè parvum quod corpus vi gravitatis deſcendendo deſcribit in medio reſiſtente, quodque eodem tempuſculo dato deſcriberet in medio non reſiſtente (6). Sed corpus in medio non reſiſtente projectum vi gravitatis deſcriberet arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abſciſſa D M = 62.

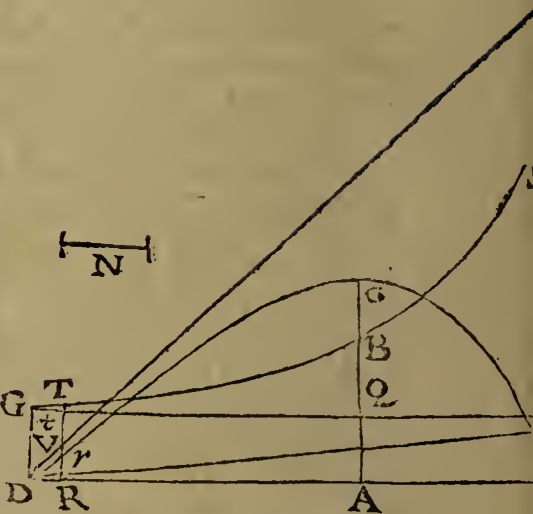




V r, ordinata M r æqualis & parallela D V (40. *lib.* 1.), & (*per theor.* 1. *de parabola lib.* 1.) rectangulum ſub latere recto & abſciſſâ D M ſeu V r æquatur quadrato ordinatæ M r ſeu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipſo motus initio eſt $\frac{DV^2}{Vr}$.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. I. Prop. IV. Probl. II.

hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\,quad.}{Vr}$; & Vr (m) est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, (n) parallela est ipsi DK, ideoque Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id est (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$ & latus rectum $\frac{DV\,quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id (o) est (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; (p) hoc est, ut resistentia ad gravitatem. *Q.E.D.*



Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; & resistentia medii ipso motûs initio detur, inveniri potest curva $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex datâ velocitate (q) datur latus rectum parabolæ, ut notum est.

(m) * *Vr* est $\frac{tGT}{N}$ (*per constr.*) *seu* $\frac{DR \times Tt}{2N}$; evanescente enim D R seu G t, triangulum t G T fit $\frac{1}{2}\,Gt \times Tt = \frac{1}{2}\,DR \times Tt$, & hinc $\frac{tGT}{N} = \frac{DR \times Tt}{2N}$.

(n) * *Parallela est ipsi D K*, ob K C = D G, & subtangentem hyperbolæ æqualem abscissæ D C (*per theor.* 1. *de hyp. lib.* 1.). Cùm autem evanescit G T t, fit T t ad t G seu D R ut ordinata G D seu C K ad subtangentem, sive ad D C, & ideo $Tt = \frac{CK \times DR}{DC}$. Et *N* erat $\frac{QB \times DC}{CP}$ (*per constr.*). Quare si loco *N* & T t, hi valores substituantur in quantitate $\frac{DR \times Tt}{2N} = Vr$, invenietur $Vr = \frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$.

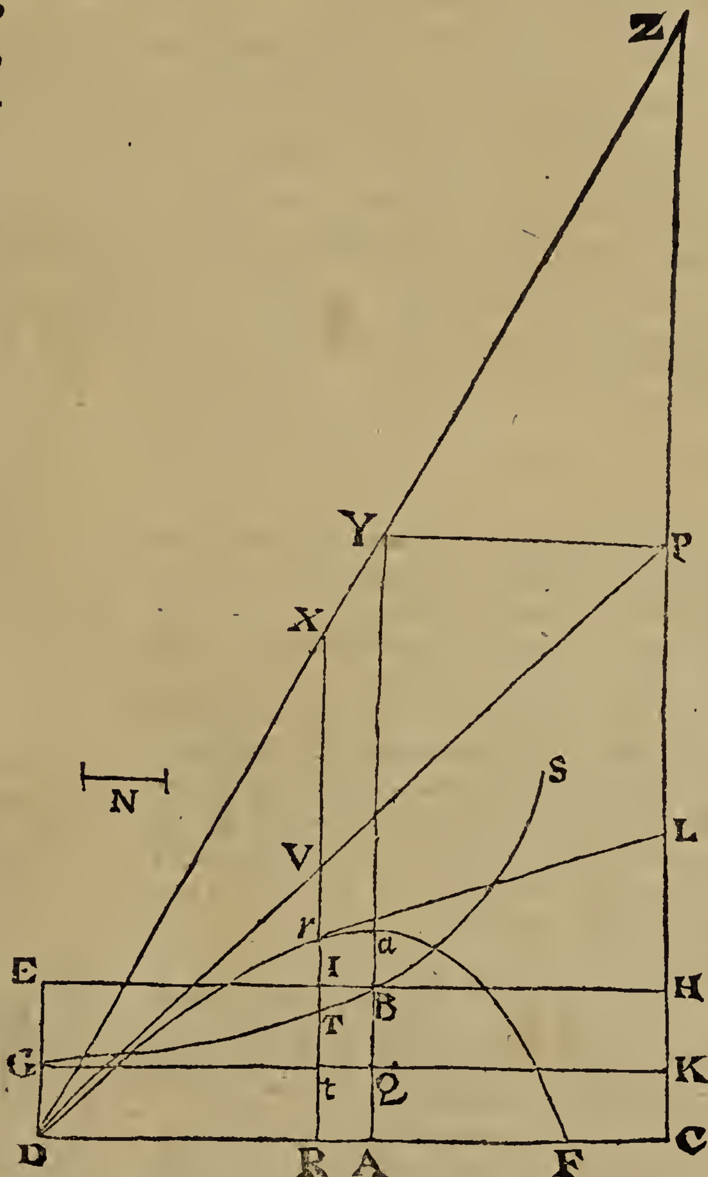
(o) * *Id est, ob proportionales Q B & C K, D A & A C &c.* Nam (*per theor.* 4. *de hyp.*) A B est ad G D (sive A Q vel C K) ut D C ad A C, & divisim Q B est ad C K ut D A ad A C, id est $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

(p) * *Hoc est, ut resistentia ad gravitatem*, per construct. Probl. II.

(q) * *Datur latus rectum parabolæ &c.* Datâ velocitate secundum directionem tangentis D P, datur tum spatium finitum in medio non resistente tempore dato æquabiliter descriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habetur

Et ſumendo 2 *D P* ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur *D P*. Dein ſecando *D C* in *A*, ut ſit *CP* × *AC* ad *D P* × *D A* in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum *A*. (r) Et inde datur curva *D r a F*.

Corol. 5. Et contra, ſi datur curva *D r a F*, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia medii in locis ſingulis *r*. (ſ) Nam ex datâ ratione *CP* × *A C* ad *D P* × *D A*, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motus, tum latus rectum parabolæ: (t) & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis *r L*, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis *r*.



Corol. 6. Cùm autem longitudo 2 *D P* ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in *D*; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentiatur ſpatium verticale finitum V r eodem tempore vi gravitatis deſcriptum, id eſt, dantur ordinata & abſciſſa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per theor. 1. de parab.)

(r) * *Et inde datur curva* D r a F, non ſolum conſtructione per hyperbolam, ſed etiam conſtructione illâ quæ per Logarithmicam abſolvitur (59.) Nam inventâ D P, ſumenda eſt Logarithmicæ ſubtangens P Z ad D P in ratione gravitatis ad reſiſtentiam ſub initio motûs; & ideò Logarithmicæ ſubtangens P Z erit etiam ad D P ut 2 D P ad latus rectum parabolæ.

(ſ) * *Nam ex datâ ratione* C P × A C ad D P × D A, id eſt (per conſtr.) ratione gravitatis ad reſiſtentiam totam ſub motus initio, dabitur reſiſtentia, ob datam gravitatem (*per hyp.*); & quia C P × A C eſt ad D P × D A ut 2 D P ad latus rectum parabolæ (*per cor.* 3.), dabitur illud latus rectum.

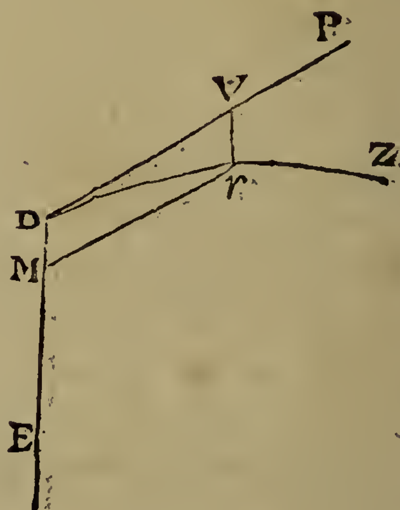
(t) * 63. *Et inde datur etiam velocitas ſub initio motûs.* Nam dato latere recto para- 62,

in eâdem ratione, (u) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (x) patet longitudinem 2 *D P* augeri in ratione illâ simplici, ideoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo *CDP* mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam *D r a F* ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco *D*, secundum angulos diversos *CDP*, *CDp*, & cognoscantur loca *F*, *f*, ubi incidunt in horizontale planum *D C*. Tum, assumptâ quâcunque longitudine pro *D P* vel *Dp*, fingatur quod resistentia in *D* sit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur

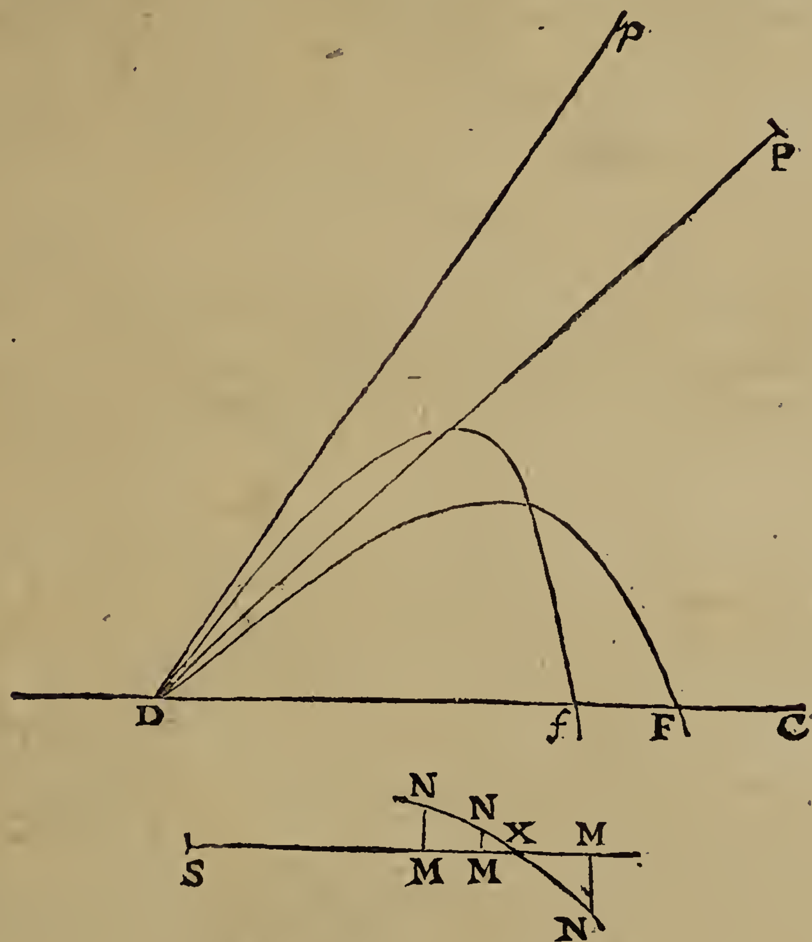
parabolæ D r Z; quam grave in medio non resistente describit, & datâ positione tangentis D P cum diametro D E, parabola describi potest; datur autem in singulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam describentis: Sit enim abscissa D M verticali V r æqualis & parallela, & ordinata M r etiam æqualis & parallela tangenti D V; datur tum velocitas quam corpus grave è puncto V cadendo per altitudinem datam V r habet in r, tum tempus quo altitudinem illam describit, & hinc datur tempus idem quo motu uniformi describit spatium datum D V (40. *lib.* 1.), ideoque datur velocitas uniformis per tangentem D P, quæ est ipsa velocitas projectionis in D.

(u) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cùm velocitas secundùm tangentem D V uniformis supponatur (40. *lib.* 1.); Si, dato tempore quo describitur D V, velocitas illa crescat, crescet D V in eadem ratione, manente spatio verticali V r hoc eodem tempore dato descripto; sed latus rectum parabolæ D r Z est $\frac{DV^2}{Vr}$ (*per cor.* 3.) & quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente V r, crescit ut D V^2. Quare latus rectum parabolæ D r Z augetur in ratione duplicatâ velocitatis.



(x) * *Patet longitudinem* 2 D P. *&c.* Gravitas dicatur G, resistentia initio motûs *R*, latus rectum parabolæ, ut suprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; & erit 2 D P : $\frac{DV^2}{Vr}$ = G : *R*, ideoque 2 D P = $\frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc est, datis V r & G, 2 D P est ut $\frac{DV^2}{R}$, & quia *R* est ut velocitas, seu ut D V, erit etiam 2 D P ut D V, sive ut velocitas (*per notam superiorem*).

tur ratio illa per longitudinem quamvis SM. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ assumptâ $D\,P$, inveniantur



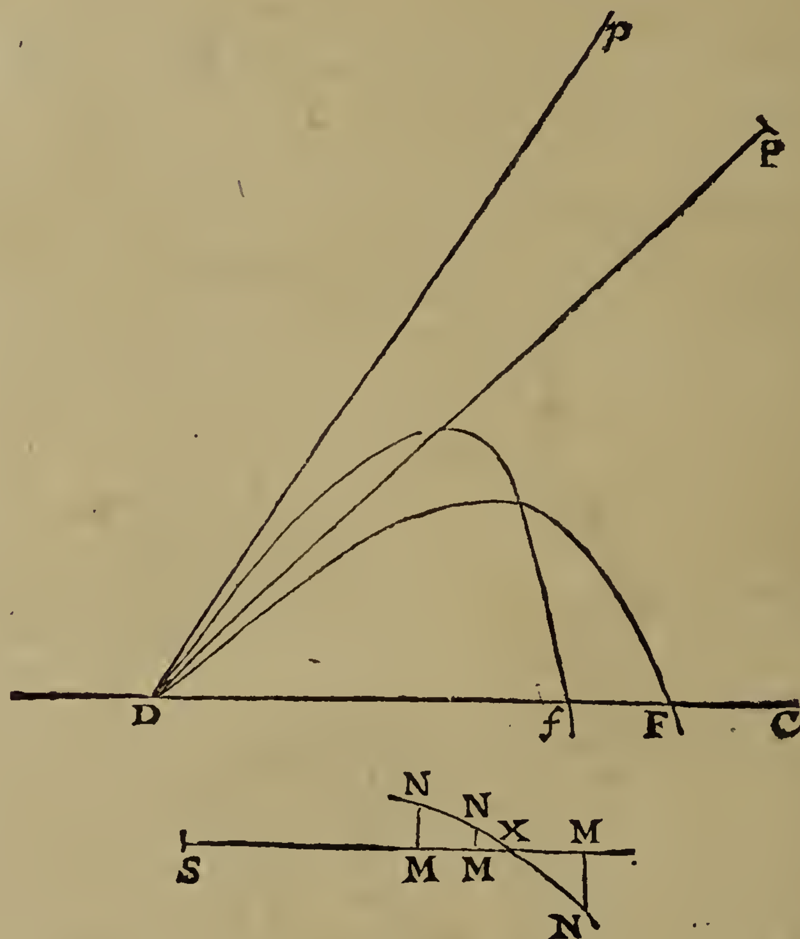
longitudines $D\,F$, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & expo-

(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim D P longitudine & positione, dantur C P & D C, & datâ ratione resistentiæ in D ad gravitatem dantur D A & A C per constructionem problematis istius: His autem datis, curva D r a F (vide figuras superiores) describi potest, & hinc invenitur amplitudo horizontalis D F constructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59). Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{a.x}{g} - a.L.\frac{e}{e-x}$ (63) in qua ut fit $x = DF$, ponenda est $y = 0$, & æquatio fiet $\frac{a\,x}{g} = L.\frac{e}{e-x}$, ex quâ per regressum serierum, vel per alias approximationes invenietur x per g & e, seu D F per A C & D C.

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa*; & si nihil est residui, rectè assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem; si quid residui fuerit, *exponatur differentia per M N.* Nam si rectè assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem, curva D r a F per constructionem vel per computationem descripta similis est trajectoriæ quam corpus in medio resisten- 64.

 te

exponatur differentia per perpendiculum *M N*. Idem fac iterum ac tertiò, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *S M*, & colligendo novam differentiam *M N*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ



S M, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *N N N* secans rectam *S M M M* in *X*, & (a) erit *S X* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam inve-

te reverâ describit, & hinc homologarum in illis curvis linearum debet esse ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate & angulo projectionis æquali P D C vel p D C, atque ex ratione resistentiæ ad gravitatem datam; & curva per constructionem delineata determinatur per longitudinem assumptam D P vel D p, quæ velocitatem datam semper potest exhibere, per angulum P D C vel p D C, & per rationem linearum D A, A C, seu rationem resistentiæ ad gravitatem, si recte assumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam & curvam hoc modo per constructionem descriptam est in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio est eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ similes sunt.

(a) 66. *Et erit* S X *vera ratio resistentiæ ad gravitatem.* Nam ubi M N seu differentia rationum $\frac{\text{F f}}{\text{D F}}$, quæ per computatio-

invenire oportuit. Ex (b) hac ratione colligenda eſt longitudo *D F* per calculum ; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem *D P*, ut longitudo *D F* per experimentum cognita ad longitudinem *D F* modò inventam, erit vera longitudo *D P*. Quâ inventâ, habetur tum curva linea *D r a F* quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Cæterùm, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis; (†) hypotheſis eſt magis mathematica quàm naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in dupli-

tionem & per experimentum inventæ ſunt, nulla eſt, ratio reſiſtentiæ ad gravitatem rectè aſſumpta fuit (65). Quare cùm S M aſſumptam illam rationem exponat, & evaneſcat M N ubi S M fit S X, patet in hoc caſu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem rectè exponi per lineam S X. Itaque ſi innumeræ abſciſſæ S M aſſumptæ fuiſſent, & innumeræ ordinatæ N M per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam reſiſtentiæ ad gravitatem determinaret per ejus interſectionem X cum lineâ S M; ideoque ſi multa fiunt tentamina, ſicque plura obtineantur puncta N, & per ea ducatur curva regularis N N X N, illa quàm proximè punctum X quæſitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio ſumus tradituri.

(b) *Ex hac ratione colligenda eſt &c.* Sit, exempli causâ, ratio aſſumpta reſiſtentiæ ad gravitatem 1 ad 10, ſeu $SM = \frac{1}{10}$; inventa autem ſit $SX = 2\ SM = \frac{2}{20} = \frac{1}{5}$; erit reſiſtentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione & aſſumptâ longitudine D P colligenda eſt longitudo D F ſeu amplitudo jactûs (64); & quoniam inventâ verâ ratione reſiſtentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per conſtructionem inventa ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſtente, reverâ deſcribit (65), erit amplitudo D F per calculum inventa ad amplitudinem D F per experimentum cognitam, ut aſſumpta longitudo D P ad veram longitudinem D P pro trajectoriâ in medio reſiſtente deſcriptâ. Hàc autem longitudine inventâ, habetur (*per cor.* 4.) tum curva linea D r a F quam corpus reipsâ deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis (*per cor.* 5.) 66.

(†) 67. Ex ſupra demonſtratis determinari poſſent motus corporis in medio quod reſiſtit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem ſi corpus ſolâ vi inſitâ in hoc medio feratur, pars illa reſiſtentiæ quæ eſt uniformis, tanquam vis conſtans gravitatis quâ corporis aſcendentis motus retardatur, conſideranda eſt, & in ſuperioribus conſtructionibus pro corporis aſcenſu, non gravitas, ſed ea reſiſtentia uniformis data per lineam A C, vel per rectangulum A H exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea A C gravitatem & reſiſtentiæ partem uniformem ſimul junctas, ſi corpus aſcendit, & exceſſum gravitatis ſupra eam reſiſtentiæ partem uniformem, ſi corpus deſcendit, exponet. Quâ ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum ſolâ vi inſitâ moti, tum vi gravitatis urgente aſcendentis & deſcendentis in medio quod reſiſtit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

Etc-

plicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (*per motûs leg.* II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege resistentiæ.

(c) *Etenim actione &c.* Hæc patent per demonstrata (8).

68. *Scholium.* Ex æquatione ad curvam D r a F, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per Logarithmicam satis elegans constructio, quâ usi sunt *Varignonius* & *Hermannus.* Eam hîc exponemus breviter. Deinde cùm in superioris propositionis corollario ultimo & alibi postea describenda sit curva regularis quæ per data puncta transeat, hoc problema, quod NEWTONUS in Epistolâ ad *Oldenburgum* anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dicit quod solvere desideraverit, solvemus.

69. Iisdem positis quæ in superiori constructione NEWTONI, sit D P $= b$, D V $= v$, V r $= z$, & D P ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; & erit (57) $z = a.\,\mathrm{L}.\,\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. Oportet curvam D r a F ex hac æquatione per Logarithmicam construere. In rectâ P O ad D P normali capiatur P Z $= a$, asymtoto P O & subtangente P Z describatur per punctum D Logarithmica D H O, cujus D Z erit tangens, & per punctum quodvis V in linea D P agatur V H parallela P O Logarithmicæ occurrens in H & tangenti D Z in L, capiaturque verticalis V R pars V r æqualis H L. Punctum r erit in trajectoriâ quæsitâ D r a F. Nam ducto ex H ad P O perpendiculo H X, erit (*per constr.*) V P $=$ H X $= b - v$, P Z $= a$, & hinc PX$=$HV$=$PZ$\times$L. $\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{HX}} = a.\mathrm{L}.\,\frac{b}{b-v}$ (34). Et ob triangula D V L, D P Z similia, D P (b) : P Z (a) $=$ D V (v) : V L $= \frac{av}{b}$. Quare erit H V—L V $= a.\mathrm{L}.\,\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = z =$ V r. Q. E. D.

70. *Cor.* 1. Si per punctum A NEWTONI constructione determinatum erigatur verticalis A B secans D P in B, & per B erigatur ad D P perpendiculum B G secans D Z in E & Logarithmicam in G, capiaturque B a æqualis G E, erit A a maxima altitudo Jactûs.

71. *Cor.* 2. Punctum r quo trajectoria rectam D c ex D ductam ad P C, secat, invenitur, si in lineæ Z O capiatur Z Q æqualis P c, jungatur D Q logarithmicam secans in H, demittatur ex H ad D P, perpendiculum H V, & ex V ad

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

ad D C perpendiculum V R, quod rectam D c secabit in puncto quæsito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo D F, capiendo Z Q æqualem P C, & reliqua perficiendo ut modo diximus. Nam ob parallelas V r & P c, H V & Q P, est P c : V r = P D : D V = D Z : D L = Q Z : H L; sed (*per constr.*) Q Z = P c: ergo V r = H L, ideoque punctum r est in trajectoria T r a F (69).

72. Ex demonstratis inveniri potest angulus elevationis P D C, sub quo corpus datâ velocitate D P projectum transibit per punctum r in verticali V R datum. Dicantur D R $= c$, R r $= e$, D Z $= f$, D L $= x$, H L $=$ V r $= z$, V R $= z + e = y$; & ob triangula D L V, D Z P similia erit D Z (f) : D P (b) = D L (x) : D V $= \frac{bx}{f}$, & ob angulum D R V rectum D V^2 = D R^2 + V R^2, hoc est, $\frac{bbxx}{ff} = cc + yy$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter transversa est $\frac{2cf}{b}$, diameter conjugata $2c$, abscissa à centro sumpta x, & ordinata y seu $z + e$, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc constructio. Per punctum D ducatur infra lineam D P recta D E parallela P Z & æqualis R r, per E agatur E K parallela D Z secans H V in M; & erit L M = D E = R r $= e$, ideoque H M $= z + e = y$, atque E M = D L $= x$, & proinde centrum hyperbolæ est in E; cùmque semidiameter transversa sit $\frac{cf}{b} = \frac{DR \times DZ}{DP}$, si capiatur in linea D P pars D N æqualis D R, & per punctum N erigatur ad D P perpendiculum N T, secans E K in T & D Z in t, erit D P ad D Z ut D N seu D R ad D t seu E T, ideoque E T $= \frac{DR \times DZ}{DP}$, & propterea E T semidiameter transversa, E M abscissa, & M H ordinata hyperbolæ T H o, cujus semidiameter conjugata æquatur D R. Hæc itaque hyperbola occursu suo cum Logarithmicâ D H o determinabit punctum H, ex quo si demittatur ad D P perpendiculum H V, secans D Z in L, dabuntur D V & H L æqualis V r, ideoque dabitur etiam V R = V r + R r. His autem datis, datur angulus elevationis P D C, cujus sinus est V R, posito sinu toto D V. 72.

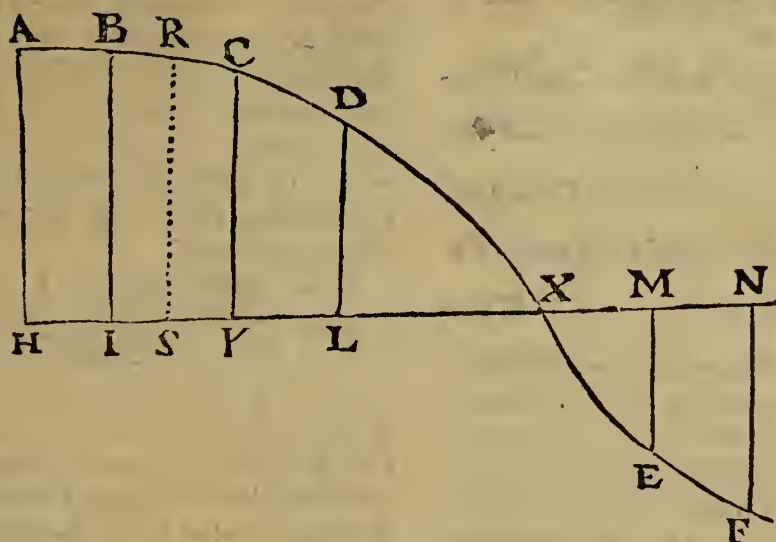
73. Si verò quæratur angulus projectionis P D C, ut corpus per punctum R in horizontali D C datum transeat, fiet R r $= e = 0$, & æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{bbxx}{ff} = cc + zz$, ob $y = z + e = z$. In constructione verò coincidet punctum E cum puncto D, & T cum t, cæteris manentibus ut supra. Et quia si per hyperbolæ & Logarithmicæ intersectionem H ducatur recta D H secans P o in Q, est Q Z = P C (71.); liquet in eo casu esse Q Z sinum anguli elevationis P D C, existente radio seu sinu toto D P. Observandum porro est, quod si in his constructionibus hyperbola Logarithmicam nusquam

quam attingat, problema eſt impoſſibile; quod ſi eam bis ſecet, anguli duo ſatiſfaciunt. Patet quoque datam ſemper eſſe rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque ſitum ſit punctum r, vel R; eſt enim D R ad $\frac{DR \times DZ}{DP}$ in ratione datâ D P ad D Z.

74. Angulus elevationis P D C maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur D X ipſi D P perpendicularis quæ ſit ad D P ut eſt D P ad P Z: jungatur Z X Logarithmicam ſecans in H, & ex D per H ducatur recta D H ſecans P O in Q; erit Q Z ſinus anguli quæſiti, exiſtente ſinu toto D P. Sit enim D R amplitudo horizontalis maxima $= c$, $DV = v$, $VR = Vr = z$, & erit ob angulum D R V rectum $vv - zz = cc$, & ſumptis fluxionibus $2vdv - 2zdz = 2cdc = 0$ (48), ideoque $vdv = zdz$. Sed (69) $z = aL\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = aLb - aL\,b-v - \frac{av}{b}$, & ſumptis fluxionibus $dz = \frac{adv}{b-v} - \frac{adv}{b} = \frac{avdv}{bb-bv}$. Quare erit $zdz = \frac{azvdv}{bb-bv} = vdv$, & ideo $az = bb - bv$, ac proinde $DP(b) : PZ(a) = HL(z) : PV(b-v)$; verùm ob triangulorum D V L, D P Z ſimilitudinem eſt $DP : DZ = PV : ZL$; unde per compoſitionem rationum & ex æquo $DP^2 : PZ \times DZ = HL : ZL$, & quia $DP^2 = DX \times PZ$ (*per conſtr.*), erit $DX : DZ = HL : LZ$. Quapropter punctum H per æquationem $az = bb - bv$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam X Z; cùmque idem punctum in Logarithmica eſſe oporteat ut determinetur maxima amplitudo D R, ſi per interſectionem H rectæ X Z & Logarithmicæ D H o ducatur recta D Q ſecans P o in Q, habebitur Q Z ſinus anguli P D C (73) maximæ amplitudini D R convenientis. Q. E. D.

75. Jam ſi oporteat curvam regularem deſcribere, per data quotlibet puncta tranſeuntem, uti poſſumus generali methodo, quam Newtonus in Arithmeticâ univerſali tradidit, quamque deinde in Problematis 55,

58 &



58 & 61. adhibuit. Hæc ſunt ipſius verba:
„Cùm curva non datur ſpecie, ſed deter-
„minanda proponitur, poſſiſque pro arbitrio
„æquationem fingere quæ naturam ejus ge-
„neraliter contineat, & hanc pro eâ deſig-
„nandâ tanquam ſi daretur aſſumere, ut ex
„ejus aſſumptione quomodocumque per-
„veniatur ad æquationes ex quibus aſſump-
„ta tandem determinetur. Si itaque curva
„generis dati per data puncta delineanda
„ſit, aſſumatur generalis ad curvam illam
„æquatio cum terminorum coëfficientibus
„indeterminatis, & curvâ ad rectam ali-
„quam poſitione datam relatâ, ex ſingulis
„punctis datis in rectam illam demittantur
„perpendiculares aut rectæ aliæ inter ſe pa-
„rallelæ, quæ datæ erunt ut & earum ab-
„ſciſſæ a dato in rectâ illâ puncto compu-
„tatæ; deinde in aſſumptâ æquatione loco
„abſciſſæ variabilis x & ordinatæ etiam va-
„riabilis y ſcribantur abſciſſæ & ordinatæ
„per puncta data determinatæ, & tot inde
„obtinebuntur æquationes quot ſunt puncta
„data per quæ curva tranſire debet, atque ex
„illis æquationibus, generalis æquationis
„aſſumptæ coëfficientes determinabuntur.
Hujus methodi exemplum ſit ſolutio Lemmatis 5. lib. 3. Principiorum, quod ita propoſitum eſt: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta tranſibit; cujus Lemmatis ſolutionem dedit ibidem NEWTONUS, ſed ſine demonſtratione, quæ tamen ex ejuſdem auctoris differentiali methodo colligi poteſt.

76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam 76. quamvis poſitione datam H N demittantur perpendicula quotcumque A H, B I, C K, D L, E M, F N, &c.; poſitiſque abſciſsâ variabili H S $= x$, & ordinatâ R S $= y$, aſſumatur generalis ad parabolam A B D E F æquatio $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ &c., ſintque A, B, C, D, E, &c. cum ſuis ſignis indeterminatæ. Dicantur A H $= a$, B I $= f$, C K $= g$, D L $= h$, M E $= -k$, & H I $= l$, H K $= m$, H L $= n$, H M $= t$, &c. Ponantur 1°. $y = a$ & $x = 0$; 2°. $y = f$, & $x = l$; 3°. $y = g$ & $x = m$; 4°. $y = h$, & $x = n$; 5°. $y = -k$, & $x = t$ atque ita deinceps, & loco y & x ſeorſim ſubſtituantur hi valores in æquatione generali aſſumpta, quæ in has mutabitur:

II. $a = A$

$$f = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 + El^4 + \&c.$$
$$g = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4 + \&c.$$
$$h = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + \&c.$$
$$-k = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + \&c.$$

Subducantur æquationes inferiores ex ſuperioribus, nimirum ſecunda ex primâ, tertia ex ſecundâ, & ita deinceps. Differentia verò primæ ac ſecundæ ordinatæ per primum intervallum H I diviſa dicatur b, id eſt, $b = \frac{a-f}{l}$; ſecundæ ac tertiæ ordinatæ differentia per ſecundum intervallum I K diviſa dicatur 2 b, id eſt, $2b = \frac{f-g}{m-l}$, & ita de cæteris. Prodibunt æquationes ſequentes.

III. $b = \frac{a-f}{l} = -B - Cl - Dl^2 - El^3$

$2b = \frac{f-g}{m-l} = -B - Cl - Cm - Dl^2 - Dlm - Dm^2 - El^3 - El^2m - Elm^2 - Em^3$

$3b = \frac{g-h}{n-m} = -B - Cm - Cn - Dm^2 - Dmn - Dn^2 - Em^3 - Em^2n - Emn^2 - En^3$

$4b = \frac{h+k}{t-n} = -B - Cn - Ct - Dn^2 - Dnt - D^2 - En^3 - En^2t - Ent^2 - Et^3$

Simili modo capiantur adhuc æquationum istarum differentiæ, & dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum H K, I L, K M, & differentiæ sic divisæ dicantur c, 2 c, 3 c, ut hic factum videtur.

IV. $c = \frac{b - 2b}{m} = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$.

$2c = \frac{2b - 3b}{n-l} = C + Dl + Dm + Dn + El^2 + Elm + Em^2 + Eln + Emn + En^2$.

$3c = \frac{3b - 4b}{t-m} = C + Dm + Dn + Dt + Em^2 + Emn + En^2 + Emt + Ent + Et^2$.

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum H L, I M, divisæ dicantur d, 2 d, & erunt æquationes.

V. $d = \frac{c - 2c}{n} = -D - El - Em - En$

$2d = \frac{2c - 3c}{t-l} = -D - El - Em - En - Et$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum H M divisa dicatur e, & erit.

VI. $e = \frac{d - 2d}{t} = E$.

Si plura fuissent puncta data, pluresque ideo fuissent æquationes, eodem modo pergendum esset usque ad differentiam ultimam: quæ hic est differentia quarta, & sic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis assumptæ, & deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, & A hoc modo.

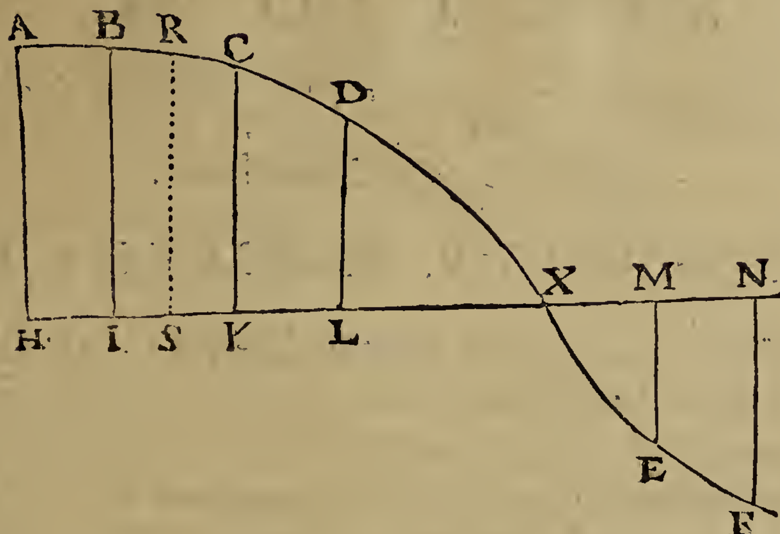
VII. Quoniam $e = E$, & (V) $d = -D - El - Em - En$, erit $D = -d - el - em - en$; & quia (IV) est $c = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$ ideoque $C = c - Dl - Dm - El^2 - Elm - Em^2$ si loco E & D substituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + dl + dm + elm + enl + emn$. Et simili modo si in æquatione (III.) $b = -B - Cl - Dl^2 - El^3$, substituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B = -b - cl - dlm - elmn$.

VIII. Cùm igitur sit (II.) $A = a$, æquatio assumpta $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, in hanc abit $y = a - x.(b + cl + dlm + elmn) + x^2.(c + dl + dm + elm + enl + emn) - x^3.(d + el + em + en) + ex^4 = a - bx - clx + cx^2 - dlmx + dlx^2 + dmx^2 - dx^3 - elmnx + elmx^2 + enlx^2 + emnx^2 - elx^3 - emx^3 - enx^3 + ex^4$, seu $y = a + b.(-x) + c.(-x \times \overline{l-x}) + d.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x}) + e.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x})$ + &c. In quâ æquatione patet terminorum progressus, & quomodo datâ abscissâ H S seu x inveniri compendiosè possit correspondens ordinata S R seu y. Nam si dicantur $-x$ seu $-HS = p$; $-IS \times p$; seu $-x \times \overline{l-x} = q$; $+SK \times q$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} = r$; $+SL \times r$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x} = s$, ita scilicet pergendo ad usque perpendiculum penultimum, quod hic est D L; erit R S seu $y = a + bp + cq + dr + es$ + &c.

IX. Atque hæc ipsa est regula quam Newtonus casu secundo Lemmatis V. lib. III. sic tradit: collige perpendiculorum A H, B I, C K &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2 b, 3 b, 4 b &c; secundas per intervalla bina divisas c, 2 c, 3 c, 4 c &c; tertias per intervalla terna divisas d, 2 d, 3 d, &c.; quartas per intervalla quaterna divisas e, 2 e, &c. Et sic deinceps. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es$ + &c. ubi observandum est, præponenda esse signa negativa terminis H S, I S &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, & signa affirmativa terminis S K, S L &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, assumptâ

quâ-



quâlibet abſciſſâ HS, invenietur valor ordinatæ correſpondentis SR, ſingulaque parabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y = o$, & deinde quæratur valor abſciſſæ x, cognoſcetur punctum X quo parabola rectam HN interſecat.

77. XI. Si perpendiculorum HA, IB, KC, LD &c. æqualia ſunt intervalla HI, IK, KL &c.; cæteris ut ſupra (I) nominibus ſervatis, poſitoque intervallo $HI = l = 1$, erunt $HK = m = 2$, $HL = n = 3$, $HM = t = 4$, &c. & perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna, quaterna, & diviſæ erunt (III, IV, V, VI) quæ ſequuntur.

Differentiæ primæ per intervalla diviſæ, $b = a - f$, $2b = f - g$, $3b = g - h$, $4b = h + k$.

Differentiæ ſecundæ per intervalla bina diviſæ, $c = \frac{a - 2f + g}{2}$, $2c = \frac{f - 2g + h}{2}$, $3c = \frac{g - 2h - k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla terna diviſæ, $d = \frac{a - 3f + 3g - h}{6}$, $2d = \frac{f - 3g + 3h + k}{6}$.

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna diviſæ, $e = \frac{a - 4f + 6g - 4h - k}{24}$.

XII. Ponantur $a - f = \beta$, $a - 2f + g = \varkappa$, $a - 3f + 3g - h = \delta$, $a - 4f + 6g - 4h - k = \varepsilon$, 77.
& erit $b = \beta$, $c = \frac{\varkappa}{2}$, $d = \frac{\delta}{6}$, &c $= \frac{\varepsilon}{24}$. Quare ſi hi valores ſubſtituantur in æquatione ſupra (VIII.) inventâ, $y = a + b.(-x) + c.(-x \times l - x) + d.(-x \times l - x \times m - x) + e.(-x \times l - x \times m - x \times n - x) +$ &c., illa in hanc mutabitur

$$y = a + \beta(-x) + \frac{\varkappa(-x \times 1 - x)}{2} + \frac{\delta.(-x \times 1 - x \times 2 - x)}{2 \times 3} + \frac{\varepsilon.(-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x)}{2 \times 3 \times 4} + \text{\&c.}$$

Quapropter ſi in hâc ultimâ æquatione dicantur $-$HS, ſeu $-x = p$; $\frac{1}{2}p$ in $-$IS, ſeu $\frac{-x \times 1 - x}{2} = q$; $\frac{1}{3}q$ in $+$SK, ſeu $\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x}{2 \times 3} = r$; $\frac{1}{4}r$ in $+$SL, ſeu $\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x}{2 \times 3 \times 4} = s$; & ita pergatur ad uſque perpendiculum penultimum, erit $y = a + \beta p + \varkappa q + \delta r + \varepsilon s +$ &c. ut NEWTONUS in caſu primo Lemmatis V. lib. III. determinavit. De hoc problemate Lector conſulat clariſſimos auctores, *Hermannum* in Appendice ad Phoronomiam, *Craigium* in Tractatu de Calculo fluentium, maximè verò *Stirling* in libro de Interpolatione ſerierum, in quo totam hanc materiam copiosè & ſagaciter explicat.

SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ per medium similare movetur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressione geometricâ inversè; & quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis & resistentia medii, & (d) resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD sumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ $BklmG$, centro C asymptotis rectangulis CD, CH descriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & (e) erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & vicissim $AB - Kk$ ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, (f) cùm AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut $AB\,q$. Et simili argumento erunt $Kk - Ll$, $Ll - Mm$, &c. ut Kk *quad.* Ll *quad.* &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata sunt ut earundem differentiæ (†); & idcirco cùm quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum diffe-

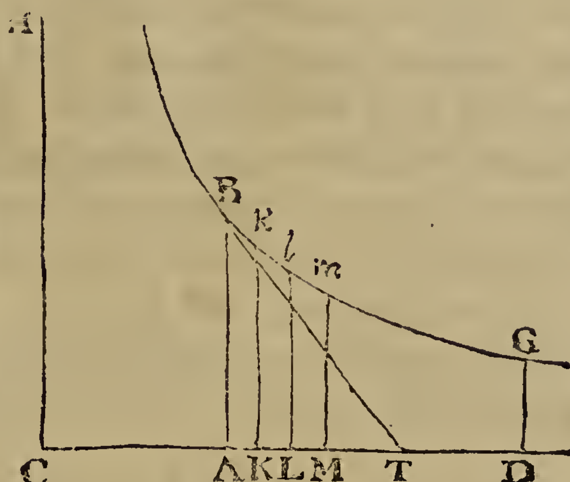
(d) * *Et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis*; dato nempe temporis momento, (1. 15.)

(e) * *Et erit A B ad K k ut C K ad C A*, (per theor. 4. de hyp.)

(f) * *Undè cùm AK, & AB × CA dentur.* A K quidem (ex hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur, quæ per lineas æquales A K, K L &c. exponuntur) & A B × C A (*per theor. 4. de hyp.*)

(†) * Scilicet ex naturâ Hyperbolæ inter suas Asymptotos, fluxiones ordinatarum sunt ut earum ipsarum ordinatarum qua-

differentiæ, (g) similis erit ambarum progressio. (h) Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis AK exponatur per lineam AB, & velocitas initio secundi KL per lineam Kk, & longitudo primo tempore descripta per aream $AKkB$; velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes Ll, Mm, &c. & longitudines descriptæ per areas Kl, Lm, &c. Et compositè, si tempus totum exponatur per summam partium suarum AM, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum $AMmB$. Concipe jam tempus AM ita dividi in partes AK, KL, LM, &c. ut sint CA, CK, CL, CM, &c. in progressione geometricâ; & (i) erunt partes illæ in eâdem progressione, & (k) velocitates AB, Kk, Ll, Mm, &c. in progressione eâdem inversâ, (l) atque spatia descripta Ak, Kl, Lm, &c. æqualia. *Q. E. D.*



Corol.

quadrata; Æquatio enim Hyperbolæ inter suas Asymptotos est $xy = a^2$; Æquatio fluxionalis $xdy + ydx = 0$; & $dy = -\frac{ydx}{x}$, cùm verò sit $\frac{y}{a^2} = \frac{1}{x}$, fit $dy = -\frac{yydx}{a^2}$, cùm ergo dx sit fluxio sibi semper æqualis, & a^2 sit quantitas constans, est dy ut $-yy$.

(g) * *Similis erit ambarum progressio*; & ideo velocitates singulis temporum æqualium A K, K L, L M &c. initiis exponi possunt per lineas A B, K k, L l &c.

(h) * *Quo demonstrato, consequens est ut areæ* A B K k, K k l L, L l m M, &c. *sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus* A B, K k, L l &c., temporiculis A K, K L, L M &c., *describuntur* (14).

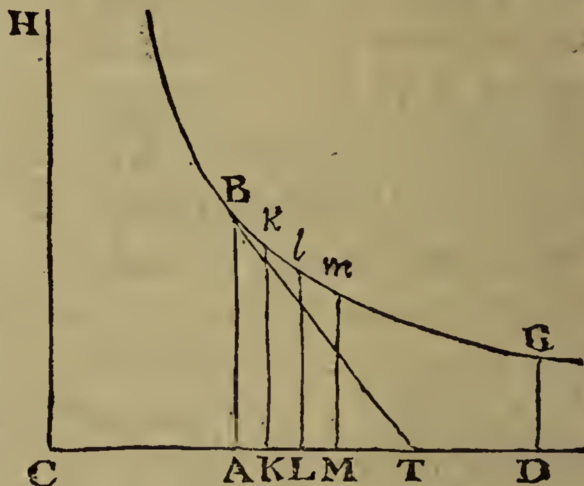
77. (i) 78. * *Et erunt partes illæ* A K, K L, L N, &c. quæ sunt differentiæ linearum CA, CK, CL, CM, &c. in eâdem progressione. Differentiæ enim cujusvis progressionis geometricæ, sunt in eâdem progressione geometricâ. Nam cùm sit C A : C K = C K : C L = C L : C N &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus & consequentia ex consequentibus C A : C K = A K : K L = K L : L M &c.

(k) * *Et velocitates* A B, K k, L l, M m *&c., in progressione eâdem inversâ*. Siquidem (*per theor.* 4. *de hyp.*) est A B ut C A, inversè, K k ut C K inversè.

(l) * *Atque spatia descripta*, A B k K, K k l L, L l m M &c., æqualia (380. lib. 1.)

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. V. Theor. III.

Corol. 1. Patet ergo quòd, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate primâ *AB*, in medio non resistente describere posset, (m) per rectangulum *AB* × *AD*.



Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi *AB* in medio non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica *ABGD* ad rectangulum *AB* × *AD*.

Corol.

(m) 79. * *Per rectangulum* A B × A D. Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore AK, describet corpus spatium AB×AK, dum in medio resistente describit spatium A B k K, tempore K L velocitate A B describet spatium A B × K L, dùm in medio resistente describit spatium K k l L, & ità deinceps (14. lib 1.); Quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non resistente describet corpus spatium A B × (A K + K L + L M) = A B × A M; & tempore A D, spatium A B × A D. Et quoniam ipso motûs initio, est area ABkK, æqualis rectangulo A B × A K, atque spatia in medio resistente & in medio non resistente descripta temporis momento A K, sunt etiam æqualia, liquet spatium in medio resistente descriptum tempore quovis A D, esse ad spatium eodem tempore in medio non resistente descriptum velocitate A B, ut est area hyperbolica A C G D ad rectangulum A B × A D.

80. Ex corollario primo sequitur, tempore infinito spatium infinitum describi in medio quod resistit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evanescet G D, hoc est, velocitas tota extincta non erit, nisi infinita evadat recta A D, hoc est nisi tempus motûs sit infinitum, tuncque infinita fit area A B G D, seu spatium descriptum est infinitum.

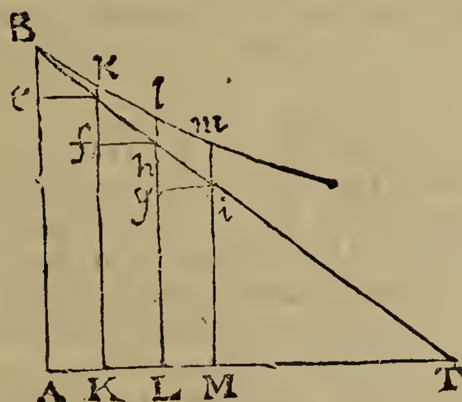
Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motûs initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *A C*, in medio non resistente, generare posset velocitatem *A B*. Nam si ducatur *B T* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat asymptoto in *T*; (n) recta *A T* æqualis erit ipsi *A C*, & (o) tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *A B*.

Corol. 4. (p) Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol.

(n) * *Recta A T æqualis erit ipsi A C.* (Per theor. 1. de Hyp.)

(o) * *Et tempus exponet.* Ordinatæ K k, L l, M m, &c. rectæ B T, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demissa sint ad A B, K k, L l, &c. perpendicula K e, h f, i g, &c. & sumptis temporibus quam minimis A k, k L, L M, æqualibus erunt B e, k f, h g æquales, sed resistentia prima temporis momento A K, tollit velocitatem A B — K k, seu B e, & eadem uniformiter continuata temporis momento K L, sive A K, tolleret etiam velocitatem k f = B e, & temporis momento L M, seu A K, velocitatem g h = B e, atque ità deinceps; Quarè resistentia prima uniformiter continuata tempore A T tolleret velocitatem totam A B, quia A B æqualis est omnibus differentiis B e, k f, g h, &c. usque ad T; vis autem centripeta quæ tempore A K, producit velocitatem B e, æqualis est vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem B e extinguit, seu æqualis est resistentiæ primæ, & illa vis centripeta uniformis manens toto tempore A T, totam velocitatem A B, produceret, quam resistentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergò resistentia prima æqualis



est vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore A T sive A C, in medio non resistente generare posset velocitatem A B. 80.

(p) * *Et indè datur etiam proportio.* Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates quas dato tempore producunt (13. *lib.* 1.) & ideò erit resistentia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui resistentia illa æqualis supponi potest, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. V. Theor. III.

Corol. 5. Et vice versâ, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; (q) datur tempus *AC*, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis *AB*: & inde datur punctum *B* per quod hyperbola asymptotis *CH*, *CD*, describi debet; ut (r) & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illá *AB*, tempore quovis *AD*, in medio similari resistente describere potest.

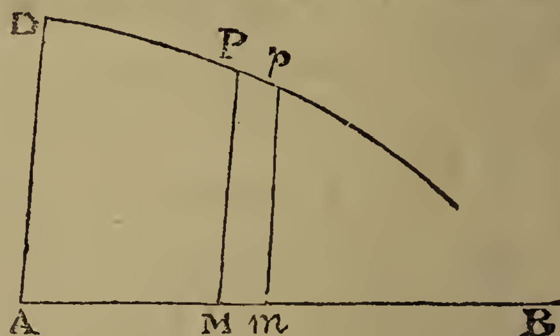
(q) *Datur tempus AC quo vis resistentiæ æqualis generare possit velocitatem AB.* Si enim detur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem A B generare potest. Tempora autem quibus diversæ vires centripetæ eamdem velocitatem generare possunt, sunt inversè ut illæ vires; Ergo si datur ratio vis centripetæ cui resistentia est æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem A B generare potest ad tempus quo vis, cui resistentia est æqualis eam velocitatem generat, hoc est datur tempus A C.

(r) * *Ut & spatium ABGD.* His enim datis, datur tùm area A B G D, tùm rectangulum AB×AD, tùm spatium quod corpus tempore A D, cum datâ velocitate uniformi A B, describeret in medio non resistente, ideóque cum sit A B × A D, ad A B G D, ut spatium tempore A D & velocitate A B in medio non resistente descriptum ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente (*per cor.* 2.) hoc spatium dabitur.

81. *Scholium.* Hujus propositionis constructio ad Logarithmicam reduci facilè posset; sed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod sequitur, solutionem analyticam tradituri, ut inventionis fons ipse aperiatur.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis solâ vi insitâ lati in medio quod resistit in ratione compositâ ex simplici ratione densitatis medii, & quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.



E loco A egrediatur corpus cum velocitate datâ *c* & tempore *t* describat rectam AM $= s$, sitque ejus velocitas in M $= v$ densitas medii in eodem loco $= k$, & resistentia *r* erit (17.) $r\,ds = -v\,dv$. Ponatur resistentia $r = \frac{kv^n}{a^n}$, sitque *a* quantitas data, & habebitur $\frac{kv^n ds}{a^n} = -v\,dv$, & hinc $k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$. Per punctum M, erigatur ad A M, perpendiculum M P quod exponat medii densitatem *k* in loco M, sitque DPp curva quam punctum P perpetuò tangit, & erecto altero perpendiculo m p priori M P infinitè propinquo ut sit M m $= ds$, erit elementum M P p m $= k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$, sumptisque fluentibus, area A D P M $= \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n}$; Quia verò evanescente areâ A D P M, evanescit quoque *s*, & sit $v = c$, erit $o = \frac{Q - a^n c^{2-n}}{2-n}$, & ideo constans $Q = a^n c^{2-n}$, atque ità A D P M $= \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porrò si densitas *k*, seu P M, est ut functio quævis spatii descriptis *s* sive A M, poterit curva D P p describi, ac proindè in hâc Hypo-

Hypotheſi dato ſpatio deſcripto, dabitur per quadraturam areæ A D P M, velocitas, & contrà datâ velocitate dabitur area A D P M, & hinc dabitur ſpatium deſcriptum A M, inde etiam (14. *lib.* 1.) datâ velocitate aut ſpatio dabitur tempus t, & contrà.

83. Si $n=2$, fit $2-n=0$, & ideò reſumenda eſt æquatio MPpm $=-a^n v^{1-n} dv = -\frac{a^2 dv}{v}$, quæ, ſumptis fluentibus, abit in hanc A D P M $= Q - a^2 L.v$, & quia poſitâ areâ A D P M $=0$, fit $v=c$, erit $Q=a^2 L.c$, ideoque A D P M $= a^2 L.c - a^2 L.v = a^2 L.\frac{c}{v}$. Sit A D P M $=b$, logarithmus numeri $h=1$, ſeu $L.h=1$, erit $b\,L.h = a^2 L.\frac{c}{v}$, & $\frac{b}{a^2}\times L.h = L.\frac{c}{v}$, ſeu $L.\,h^{\frac{b}{a^2}} = L.\frac{c}{v}$, ac proindè $h^{\frac{b}{a^2}} = \frac{c}{v}$, & $v = \frac{c}{h^{\frac{b}{a^2}}}$. Quarè dato ſpatio, dabitur velocitas, & hinc dabitur tempus (14) & contrà.

84. Sit denſitas uniformis ſeu $k=1$, erit $k\,ds = ds = -a^n v^{1-n} dv$, ſumptiſque fluentibus $s = \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$.

Undè reperitur $v = \frac{[a^n c^{2-n} + (n-2)s]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{n}{2-n}}}$.

Invenitur tempus per formulam $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{a^n v^{1-n} du}{v} = -a^n v^{-n} dv$. Et ſumptis fluentibus, fit $t = \frac{Q - a^n v^{1-n}}{1-n} = \frac{a^n c^{1-n} - a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia poſito $t=0$, fit $v=c$, & proindè $Q = a^n c^{1-n}$.

85. Si $k=1$, & $n=1$, hoc eſt, ſi denſitas eſt uniformis & reſiſtentia ut velocitas erit (84) $s = ac - av$; & quia (*ibid.*) $dt = -a^n v^{-n} dv = -\frac{a\,dv}{v}$, erit $t = Q - a L.v = a L.c - a L.v = a L.\frac{c}{v}$, quod poſito tempore $t=0$, fiat $v=c$ & proindè $Q = a L.c$.

86. Si $k=1$, & $n=2$, erit (84) $t = \frac{a^2 c - a^2 v}{cv}$, & quia (ibid.) $ds = -a^n v^{1-n} dv = -\frac{a^2 dv}{v}$, erit $s = Q - a^2 L.v = a^2 L.c - a^2 L.v = a^2 L.\frac{c}{v}$.

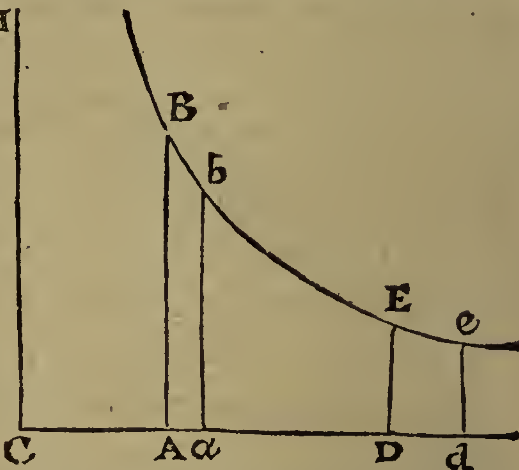
87. Si in æquatione ſpatii & velocitatis ſuprà inventâ, velocitas v, ſupponatur $=0$, erit $s = \frac{a^n c^{2-n}}{2-n}$, ſi n eſt numerus binario minor, at ſi n eſt numerus binario major, cum ſit $s = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n}{2-n}\times c^{2-n} - v^{2-n}$ ut loco $2-n$, quæ eſt quantitas negativa, expreſſio $n-2$, quæ eſt poſitiva, ſubſtitui poſſit, fiet $s = -\frac{a^n}{n-2}\times\frac{1}{c^{n-2}} - \frac{1}{v^{n-2}} = -\frac{a^n}{n-2}\times\frac{v^{n-2} - c^{n-2}}{c^{n-2}v^{n-2}} = \frac{a^n}{n-2}\times\frac{c^{n-2} - v^{n-2}}{c^{n-2}v^{n-2}}$; ſi fiat ergo $v=0$ erit $s = \frac{a^n \times c^{n-2}}{n-2\times 0} = \infty$; & ubi $n=2$, erit (86) $s = a^2 L.\frac{c}{0} = \infty$. Quarè ſi n eſt numerus poſitivus binario minor, deſcripto ſpatio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at ſi n binario æqualis eſt vel major, ſpatium infinitum conficitur, priuſquam velocitas evaneſcat. 87.

88. Si in æquationibus temporis & velocitatis, velocitas v evadat $=0$, erit (84) $t = \frac{a^n c^{1-n}}{1-n}$, ſi n eſt numerus unitate minor, at erit $t=\infty$, ſi n eſt unitate major, & (85) $t = a L.\frac{c}{0} = \infty$, ubi $n=1$. Quapropter ſi numerus poſitivus n eſt unitate minor, velocitas tempore finito extinguitur, ſpatio etiam finito deſcripto (87). Si n eſt unitati æqualis vel ipsâ major, velocitas nonniſi tempore infinito extingui poteſt, & ſpatium finitum eſt, ſi n eſt numerus binario minor, infinitum verò, ſi n binario æqualis vel major (87.).

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. VI. THEOR. IV.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciproce ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcriptâ hyperbolâ quâvis *B b E e* ſecante perpendicula *A B*, *a b*, *D E*, *d e*, in *B*, *b*, *E*, *e*, (f) exponantur velocitates initiales per perpendicula *A B*, *D E*, & tempora per lineas *A a*, *D d*. Eſt ergo ut *A a* ad *D d* ita (per hypotheſin) *D E* ad *A B*, & ita (ex (t) naturâ hyperbolæ) *C A* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. (u) Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ *A B*, *D E* ſunt ultimis *a b*, *de*, & propterea dividendo partibus etiam ſuis amiſſis *A B* — *a b*, *D E* — *d e* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

(x) Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tem-

(f) * *Exponantur velocitates initiales &c.* Cùm enim corpora duo ſimilia homogenea & æqualia ſupponantur, eorum motus conſiderari poſſunt tanquam motus unius ejuſdemque corporis variis celeritatis gradibus acti (*ut in prop.* 5.) ideóque (*per coroll.* 1. *prop.* 5.) velocitates initiales exponi poſſunt per lineas A B, D E, tempora per lineas A a, D d, velocitates in fine illorum temporum reſiduæ per lineas a b, d e, & ſpatia his temporibus deſcripta per areas Hyperbolicas A B b a, D E e d.

(t) * *Ex naturâ Hyperbolæ.* (Per theor. 4. de Hyperb.)

(u) * *Ergò areæ A B b a, D E e d,* (378. Lib. 1.)

(x) * *Namque motuum partes amiſſæ &c.* (2).

tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & resistentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, (y) ideoque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. Et (z) ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. VII. THEOR. V.

(a) *Corol.* 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportio-

(y) * *Ideoque retinebunt velocitates* in ratione primâ, ob datas corporum massas (6. lib. 1.)

(z) * *Et ob datam velocitatum rationem* (12.)

89. Tota propositionis hujus demonstratio per Analysim hoc modo exponitur. Sit globi cujusvis massa m, velocitas data initio motûs c, in fine temporis t sit v, resistentia data initio motûs r, & quia ejusdem corporis resistentiæ in diversis locis sunt ut velocitatum quadrata (*per Hyp.*) erit cc, ad vv, ut r, ad resistentiam elapso tempore t, quæ proindè erit $\frac{rvv}{cc}$. Sed (2) resistentia $\frac{rvv}{cc}$ est ut motûs decrementum $-m\,dv$ directè, & temporis momentum dt, inversè, hoc est, $\frac{rvv}{cc} = -\frac{m\,dv}{dt}$, & hinc $dt = -\frac{mcc\,dv}{rvv}$, sumptisque fluentibus $t = Q + \frac{mcc}{rv}$. Ponatur $t = 0$, & fiet $v = c$; adeóque $Q = -\frac{mc}{r}$, quo valore substituto fit $t = \frac{mcc - mcv}{rv}$. Capiatur tempus t, ut motus primus mc, directè & resistentia prima r, inversè, hoc est t ut $\frac{mc}{r}$, & erit $\frac{mc}{r}$ ut $\frac{mcc - mcv}{rv}$, ideóque mcv, ut $mcc - mcv$, & dividendo per c, mv ut $mc - mv$; & compositè fiet mc, ut $mc - mv$, id est, motus amissus $mc - mv$, ut motus primus mc; & hinc ob datam massam m, erit etiam c, ut $c - v$, id est, velocitas amissa $c - v$, ut velocitas prima c; indè etiam erit c, ad $c - c + v$, seu v, hoc est velocitas prima c, ad residuam v, in ratione datâ. Jam si spatium tempore t descriptum dicatur s, erit (13) $ds = v\,dt$, & quia v est ut data c, erit ds ut $c\,dt$, sumptisque fluentibus ob datam c, fiet s ut ct. Q. E. D.

90. Quoniam spatium s est ut ct, & t ut $\frac{mc}{r}$, erit etiam s ut $\frac{mcc}{r}$; globi cujus massa m diameter sit D, & datâ globi densitate erit massa m, ut volumen (2. *lib.* 1.) hoc est, ut diametri cubus D^3; Quare erit s ut $\frac{D^3cc}{r}$. Si præterea datâ velocitate c, resistentia r est ut diametri D, dignitas cujus index n, hoc est r ut D^n, & proindè velocitate non datâ, resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut $\frac{D^3cc}{D^n cc}$, seu ut D^{3-n}. Ex quibus patent corollaria quæ sequuntur.

(a) * *Cor.* 1. Nam in Hypothesi corollarii hujus est $n = 2$. adeóque s ut D.

89.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. VII. Theor. V.

tionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas & maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (*per hypotheſin*) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (*per hanc propoſitionem*) eſt in ratione priore directè & ratione poſteriore inversè, id eſt, ut diameter directè & velocitas inversè; ideoque ſpatium, tempori & velocitati proportionale, eſt ut diameter.

([b]) *Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac ſub initio.

([c]) *Corol.* 4. Quòd ſi globi non ſint homogenei, ſpatium à globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (*per hanc propoſitionem*) augetur

(b) * *Cor.* 2. In hypotheſi corollarii hujus eſt $n = \frac{3}{2}$, ideóque s ut $D^{3-\frac{3}{2}}$, ſeu ut $D^{\frac{3}{2}}$.

(c) * *Cor.* 4. Sít globi m denſitas δ, adeóque (2 *lib.* 1.) maſſa m ut δD^3, & hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$. Quarè ſi ponatur reſiſtentia r, ut $D^n cc$, erit s ut δD^{3-n}, hoc eſt, ſpatium s, quod datâ denſitate δ, erat ut D^{3-n}, augeri debet in ratione denſitatis δ.

tur in ratione motus directè, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

(d) *Corol.* 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (*per hanc propoſitionem*) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

(e) LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coëfficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in arithmeticâ per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum: ſed prima naſcentium proportio.

(d) * *Cor.* 5. Reſiſtentia r, quæ antè erat ut $D^{n} cc$, augeatur in ratione quâvis a, ſeu ſit r ut $a D^{n} cc$, & quia s eſt ut $\frac{\delta D^{3} cc}{r}$, (*cor.* 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^{3} cc}{a D^{n} cc}$, ſeu ut $\frac{\delta D^{3-n}}{a}$, ſpatium igitur diminuendum eſt in ratione majoris reſiſtentiæ. 90

(e) * *Lem.* 2. Totum iſtud Lemma num. 137. & ſequentibus Lib. 1. fusè expoſitum videat lector.

tio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. (f) Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus (g) lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur verò lemma in hunc modum.

Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi

(f) *Lateris autem.* Sic lateris x, in quantitate genitâ $x^n y^m$ poſiti, coefficiens eſt $\frac{x^n y^m}{x}$, ſeu $x^{n-1} y^m$.

(g) * *Senſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum* A, B, C *momenta dicantur* a, b, c, ità ut dum A fit $A + a$, B evadat $B + b$, C evadat $C + c$ &c., *momentum vel mutatio geniti rectanguli AB, erit* $aB + bA$ &c., vel ſi loco litterarum A, B, C, &c. utamur litteris minuſculis x, y, z &c. quibus variabiles quantitates conſuevimus ſignificare, & loco a, b, c, &c. ſcribamus dx, dy, dz &c. ſenſus Lemmatis eſt momentum ſeu fluxionem rectanguli xy, eſſe $ydx + xdy$, fluxionem ſolidi xyz, eſſe $yzdx + xzdy + xydz$, & genitarum quantitatum x^2, x^3, x^4, $x^{\frac{1}{2}}$ &c. momenta eſſe $2xdx$, $3x^2dx$, $4x^3dx$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ &c. reſpectivè; & genitæ $x^n y^m$, momentum eſſe, $ny^m x^{n-1}dx + mx^n y^{m-1}dy$ &c.

ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit A $-\frac{1}{2}a$ in B$-\frac{1}{2}b$, seu AB $-\frac{1}{2}a$B $-\frac{1}{2}b$A $+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit A $+\frac{1}{2}a$ in B $+\frac{1}{2}b$ seu AB $+\frac{1}{2}a$B $+\frac{1}{2}b$A $+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & (h) manebit excessus aB $+ b$A. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum aB $+ b$A. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (*per cas.* 1.) erit gC $+ c$G, id est (si pro G & g scribantur AB & aB $+ b$A) aBC $+ b$AC $+ c$

(h) * *Et manebit excessus a* B $+ b$ A.

1us. *Casus.* Sit Rectangulum O A B C sub duabus variabilibus OA, OB continuè crescentibus; sumantur hinc inde ab A partes æquales Ae, Af; & a B partes æquales Bg, Bh, ita ut, si a & b sint quantitates momentis linearum OA, OB proportionales sit ef $= a$, & gh $= b$: Compleantur Rectangula OgEe, OhFf, ducatur FE, quæ transibit per C punctum concursus linearum AC, BC (ob parallelas, & lineas ef & gh similiter, nempe bifariam, sectas in A & B). Dico quòd summa Trapeziorum EFef & EFgh æqualis erit momento Rectanguli OACB; obtinetur verò Trapeziorum summa, sumendo differentiam Rectangulorum OeEg, OfFh, quæ est Of $\times$ Oh $-$ Oe $\times$ Og, sive $\overline{\text{OA}+\text{Af}} \times \overline{\text{OB}+\text{Bh}} - \overline{\text{OA}-\text{Ae}} \times \overline{\text{OB}-\text{Bg}}$, & vocando OA, A; OB, B; Af $=$ Ae $= \frac{1}{2}a$, Bh $=$ Bg $= \frac{1}{2}b$ differentia Rect. erit $\overline{A+\frac{1}{2}a} \times \overline{B+\frac{1}{2}b} - \overline{A-\frac{1}{2}a} \times \overline{A-\frac{1}{2}b} = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab - AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA - \frac{1}{4}ab = aB + bA$. 90.

Ut verò probetur summam Trapeziorum EFef & EFgh æqualem esse momento Rectanguli OACB, observandum primò: Quòd si lineæ quævis ST, VX, utcumque inæquales, in lineam SV sint perpendiculares jungaturque TX, & in medio lineæ SV erigatur perpendicularis YZ, erit Trapezium STXV æquale Rectangulo SV $\times$ YZ: Itaque Trapezium EFef erit æquale Rectangulo AC $\times$ ef, & Trapezium EFgh æquale Rectangulo BC $\times$ gh. Præterea quoniam ef & gh sunt momentis linearum OA, OB proportionales, hoc est, proportionales velocitatibus quibus lineæ OA, OB crescunt, sive, quod idem est, celeritatibus quibus, dum Rectangulum OACB crescit, lineæ AC, BC antrorsum feruntur, Rectangula AC $\times$ ef & BC $\times$ gh, erunt ut lineæ illæ AC, BC & earum velocitates conjunctim.

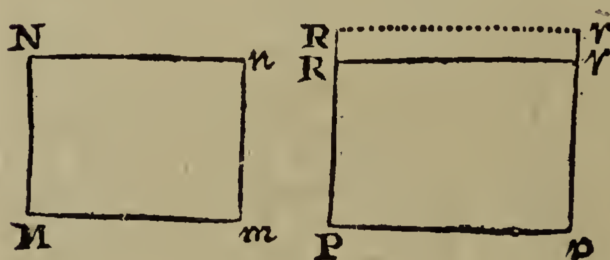
Mutatio autem geniti Rectanguli OACB proportionalis est causæ quæ eam producit, ea autem causa est motus linearum variabilium AC, BC quo antrorsum feruntur dum lineæ OA, OB crescunt, & quamvis dum illæ lineæ AC, BC moventur, interim lineæ OA, OB crescant, incrementi hujus nulla habenda est ratio dum Rectanguli fluxionem sive incrementum nascens consideramus, etenim in ipso hujus incrementi nascentis ortu illæ productiones linearum OA, OB nihil planè sunt, & cùm primum sunt aliquid jam aliæ AC, BC prioribus majores

$+ cAB$. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuo ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli A B, momentum $aB + bA$ erit $2aA$, ipſius autem A^3, id eſt contenti A B C, momentum $aBC + bAC + cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt naA^{n-1}. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, (i) erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu ipſius A^{-1} eſt

jores aſſumuntur, ergo momentum Rectanguli O A C B ſive ejus mutationis momentanea cauſa, ex lineis A C & BC & velocitatibus quibuſcum feruntur, determinanda eſt.



Sint verò Rectangula M N m n, P R p r, quorum lineæ M N, P R ſint æquales, concipiantur aliæ lineæ hiſce etiam æquales quæ ab M N & P R profectæ motu uniformi & parallelo ſecundum lineas M m & P p ferantur, ita ut eodem tempore ad m n & p r perveniant, manifeſtum eſt (*per* 1. 6[i]. *Elem.*) areas M n, P r fore ut lineæ M m P p, & pariter velocitates linearum ab M N & P R profectarum in eadem fore ratione, ideoque areas M n, Pr, fore in ratione earum velocitatum. Quòd ſi lineæ N M, P R ſint inæquales, areæ erunt ut lineæ illæ MN, PR & earum velocitates conjunctim, & quævis incrementa Rectangulorum NMmn, P R p r æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideoque & naſcentia incrementa erunt in eâ Ratione. Unde tandem ſequitur quòd incrementum Rectanguli OABC ex motu lineæ A C natum, eſt ut illa linea A C & ejus velocitas conjunctim, & quod incrementum ejuſdem Rectanguli O A C B ex motu lineæ B C natum, eſt ut illa linea B C & ejus velocitas conjunctim, ideoque totum momentum Rectanguli O A C B eſt ſumma factorum linearum AC & B C per velocitates quibus feruntur reſpectivè ductarum, ideoque ut ſumma Rectangulorum $AC \times ef$ & $BC \times gh$, ſive denique ut ſumma Trapeziorum E F e f, E F g h. Q. E. D.

2[us]. *Caſus.* Facilè hæc applicantur ad eos caſus ubi vel ambæ lineæ O A, O B decreſcunt, vel unâ creſcente altera [decreſcit], quippe varianda ſunt ſolummodo ſigna juxta has hypotheſes.

Vide aliam hujus caſûs demonſtrationem (num. 160. lib. 1.).

(i) * *Erit momentum ipſius* 1, *id eſt nihil.* Ponatur enim $\frac{1}{A} = B$ & erit $\frac{1}{A} \times A = AB = 1$, ſed momentum rectanguli AB eſt $aB + bA$ (*per caſ.* 1.) & momentum conſtantis 1 nullum eſt; Quarè erit $aB + bA = 0$, & hinc $bA = -aB = -\frac{a}{A}$, undè momentum b ipſius B ſeu $\frac{1}{A}$ eſt $b = \frac{-a}{A^2}$

$\frac{-a}{A^{2}}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^{n}}$ in A^{n} ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A^{n}}$ ductum in A^{n} unâ cum $\frac{1}{A^{n}}$ in $n a A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipſius $\frac{1}{A^{n}}$ ſeu A^{-n} erit $-\frac{n a}{A^{n+1}}$. *Q.E.D.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. LEMMA II.

Caſ. 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ ſit A, momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2 A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per caſ. 3: ideoque momentum ipſius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ ſive $\frac{1}{2} a A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter ſi ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^{m} æquale B^{n}, ideoque $m a A^{m-1}$ æquale $n b B^{n-1}$, & $m a A^{-1}$ æquale $n b B^{-1}$ ſeu $n b A^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id eſt, æquale momento ipſius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur genitæ cujuſcunque $A^{m} B^{n}$ momentum eſt momentum ipſius A^{m} ductum in B^{n}, unà cum momento ipſius B^{n} ducto in A^{m}, id eſt $m a A^{m-1} B^{n} + n b B^{n-1} A^{m}$; idque ſive dignitatum indices m & n ſint integri numeri vel fracti, ſive affirmativi vel negativi. Et par eſt ratio contenti ſub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, ſi terminus unus datur, (k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem ter-

$= -a A^{-2}$. Similiter ſi ponatur $\frac{1}{A^{n}} = B$, & ideò $\frac{1}{A^{n}} \times A^{n} = A^{n} B = 1$, erit per caſ. 3. & 1. $n a A^{n-1} B + b A^{n} = 0$ & $b A^{n} = -n a A^{n-1} B = \frac{-n a A^{n-1}}{A^{n}} = \frac{-na}{A}$, atquè adeò b, ſeu momentum ipſius $\frac{1}{A^{n}}$, erit $\frac{-n a}{A^{n+1}}$. Simili modo patent caſus 5. & 6. 90.

(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Qnoniam enim A, B, C, D, E, F, ſunt continuè proportionales, erit $D : C = C : B = \frac{C C}{D} = C C D^{-1}$ & ſimiliter invenitur $A = \frac{C^{3}}{D^{2}} = C^{3} D^{-2}$, $E = \frac{D^{2}}{C}$, $F = \frac{D^{3}}{C C}$ &c.

termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut — 2 A — B, D, 2 E, 3 F.

(l) *Corol.* 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

(m) *Corol.* 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In epistolâ quâdam ad D. *J. Collinium* nostratem 10. Decem. 1672. datâ, cùm descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicatâ; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo* (n) *ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verùm etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de* (o) *curvitatibus,* (p) *areis, longitudinibus,*

Quarè ob datum C, cujus nullum est momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per cas. 3. & 4.) $-2dC^3D^{-3}$ $-dC^2D^{-2}$, d, $\frac{2dD}{C}$, $\frac{3dD^2}{CC}$, & multiplicando singulos terminos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum $-2C^3D^{-2}$ $-C^2D^{-1}$, D, $\frac{2D^2}{C}$, $\frac{3D^3}{CC}$, hoc est $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$. Est autem 2 numerus intervallorum inter terminum A, & terminum datum C, sicut & intervallorum inter E & C, 1 intervallum inter B & C, ac inter C & D, & 3, numerus intervallorum inter C & F. Quarè patet veritas corollarii.

(l) * *Cor.* 2. Sit $A:B = C:D$, seu $BC = AD$ & BC, rectangulum datum erit (per cas. 1.) $ad + dA = 0$, & hinc $aD = -dA$ ideóque $a:-d = A:D$.

(m) * *Cor.* 3. Sit $A^2 + B^2 = C^2$, & quadratum C^2 sit datum, erit (per cas. 3.) $2aA + 2bB = 0$, ideóque $Aa = -bB$, & proinde $a:-b = B:A$. In iis duobus corollariis necessum est ut variabili unâ crescente, decrescat altera, & idcircò dum momentum unius positivum est, alterius momentum est negativum.

(n) * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. lib. 1.) vide Marchionis *Hospitalii* Analysim infinitè parvorum, ubi methodus illa tangentium fusè & perspicuè exponitur.

(o) *De curvitatibus* (216. lib. 1.).

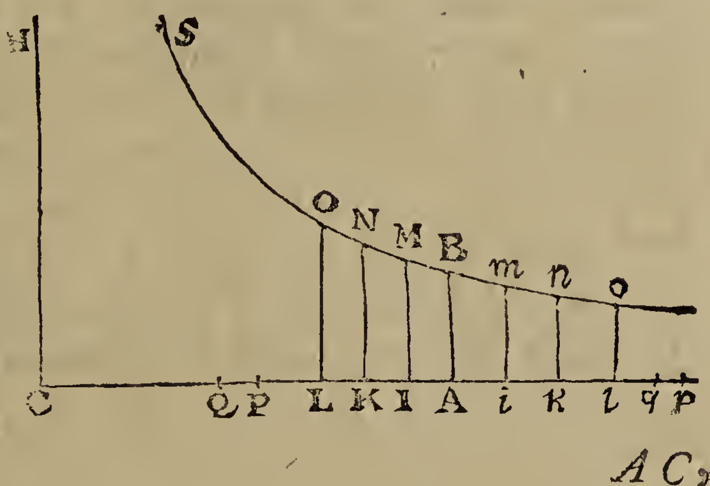
(p) * *Areis, longitudinibus* &c. Hæc plurimis exemplis, tum 1°. tum 2°. libro contentis manifesta sunt. Vide tractatum NEWTONI de quadraturâ curvarum.

bus, (q) *centris gravitatis curvarum &c. neque* (*quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis*) *ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti quâ æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente. (r)

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (*addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit*) *investigentur vires absolutæ; dico quòd vires illæ absolutæ sunt in progressione geometricâ.*

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP, quæ sit media proportionalis inter AK & AC,



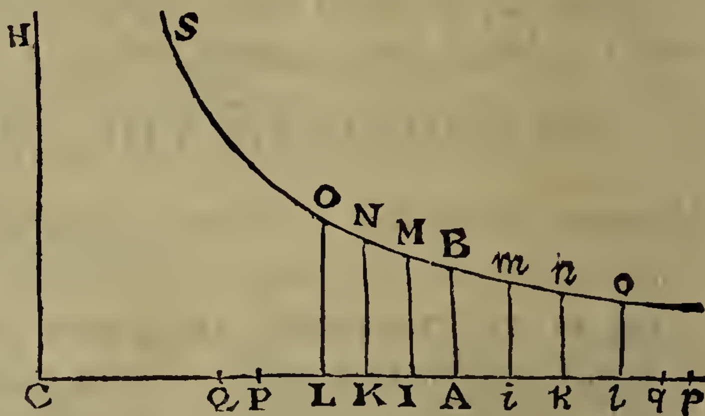
(q) * *Centris gravitatis* (66. lib. 1.).

(r) In præcedentibus Editionibus istud scholium hoc modo se habebat.

In litteris quæ mihi cum Geometrâ peritissimo G. G. *Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cùm significarem me compotem esse methodi determinandi maxima & minima, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus. (*Datâ æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versâ*) eamdem celarem; Rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit, à meâ vix abludentem, præterquàm in verborum & notarum formulis, & ideâ generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. I. Prop. VIII. Theor. VI.

AC, (f) ideoque in subduplicatâ ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam *KL*, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* asymptotis rectangulis *CA*, *CH* describatur hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB*, *KN*, *LO* occurrens in *B*, *N*, *O*. Quoniam *AK* est ut *APq*, erit hujus momentum *KL* ut (t) illius momentum 2 *APQ*: id est, ut *AP* in *KC*, nam velocitatis incrementum *PQ* (*per motûs leg.* II.) proportionale est vi generanti *KC*. Componatur ratio ipsius *KL* cum ratione ipsius *KN*, & fiet



rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc est, ob (u) datum rectangulum $KC \times KN$, ut *AP*. Atqui areæ hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut *AP*. Componitur igitur area tota hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* semper proportionalibus, & (x) propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. (y) erunt in progressione geometricâ. *Q. E. D.* Et (z) simili argumento, in ascensu corporis, sumen-

(f) * *Ideòque in subduplicatâ ratione resistentiæ.* Ob datam AC.

(t) * *Ut illius momentum* 2 *APQ*. Cùm enim sit $AK \times AC = AP^2$ (*per constr.*) erit $AC \times KL = 2\ AP \times PQ$ (*per cas.* 1. & 3. *Lem.* 2.) id est, ob datam AC; KL est ut $AP \times PQ$, & quia velocitatis incrementum PQ, dato temporis momento genitum (*per mot. leg.* 2.) proportionale est vi generanti KC, erit KL, ut $AP \times KC$.

(u) * *Ob datum rectangulum* $KC \times KL$ (per theor. 4. de hyp.).

(x) * *Et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est*; dato enim temporis momento, spatium descriptum est ut velocitas (12).

(y) * *Erunt in progressione geometricâ* (379. lib. 1.).

(z) * *Et simili argumento.* Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC, resistentia per lineam indefinitam Al,

mendo, ad contrariam partem puncti A, æquales areas $ABmi$, $imnk$, $knol$, &c. constabit quod vires absolutæ AC, iC, kC, lC, &c. sunt continuè proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ lC, kC, iC, AC, IC, KC, LC, &c. erunt continuè proportionales. *Q. E. D.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. VIII. THEOR. VI.

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam $ABNK$; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas AC, AP & AK respectivè; & vice versâ. ([a])

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, ([b]) exponens est linea AC.

Corol. 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ([c]) ad medii resistentiam illam cognitam.

PRO-

A l, vis absoluta velocitatem minuens in ascensu corporis per summam C l, velocitas corporis per lineam A p quæ sit media proportionalis inter A l & A C, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam l k, & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam p q; & describatur ut suprà hyperbola S B o; Quoniam A l est ut A p², erit hujus momentum k l ut illius momentum 2 A p q, id est, ut A p in l C; nam velocitatis decrementum p q (*per mot. leg.* 2.) proportionale est vi generanti l C, componatur ratio ipsius k l cum ratione ipsius l o, & fiet rectangulum k l × l o ut A p × l C × l o, hoc est, ob datum rectangulum l C × l o, ut A p. Ergo, coeuntibus punctis k, l, area hyperbolica k n o l = k l × l o, est ut A p. Componitur igitur area tota hyperbolica 2 A B o l ex particulis k n o l velocitati A p semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B m i; i m n k; k n o l, &c. & vires absolutæ l C, k C, i C, A C, &c. erunt in progressione geometricâ. Q. E. D. 90.

(a) * Simili modo si in ascensu corporis, spatium usque ad motûs extinctionem describendum exponatur per aream hyperbolicam A B n k exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas A C, A p, A k respectivè; & vice versâ.

(b) * *Exponens est linea A C.* Fiat enim A P = A C, & quia (*per constr.*) A P² = A K × A C, erit etiam A K = A C, ideóque coincidente ordinatâ K N, cum asymptoto C H, area hyperbolica ABNK, infinita evadet, & spatium descendendo descriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, resistentia & velocitas corporis exponentur per lineam A C, eritque proinde resistentia gravitati æqualis, & propterea velocitas A C maxima.

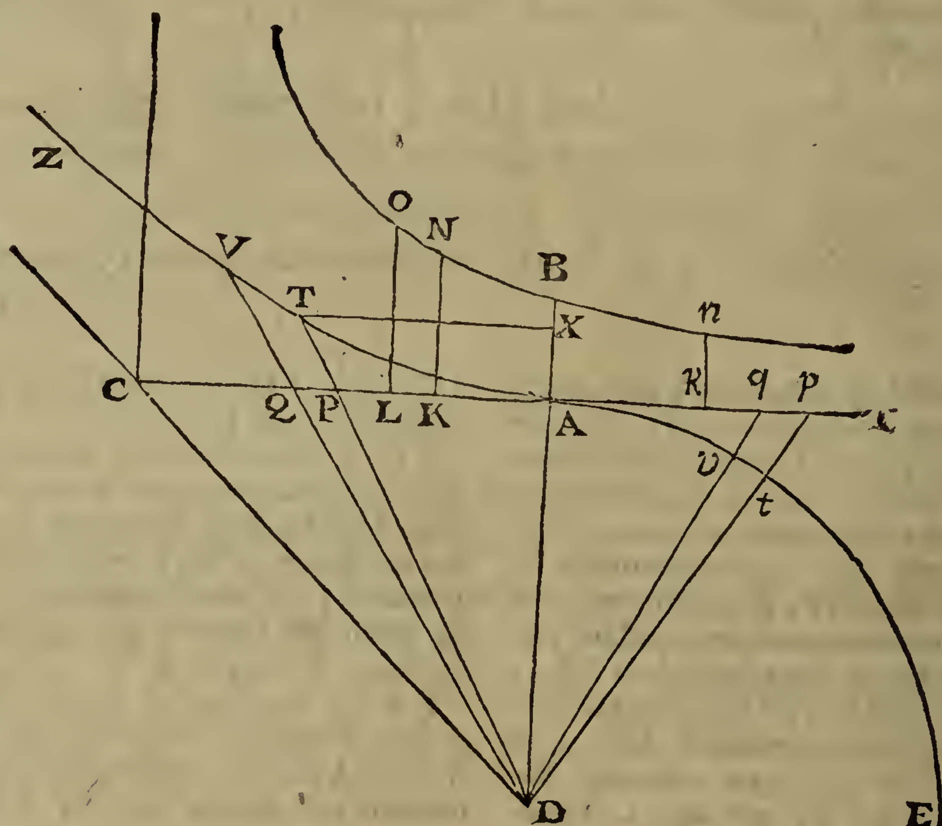
(c) * *Ad medii resistentiam illam cognitam.* Cùm enim velocitates sint in subduplicatâ ratione resistentiarum (*per hyp.*) & resistentia sit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima est, (*per cor.* 2.) ve-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. IX. Theor. VII.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quòd, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi à loco summo ut sector hyperbolæ.

Rectæ *AC*, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* semidiametro *AD* descri-



batur tum circuli quadrans *AtE*; tum hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A*, & asymptoton *DC*. Ducantur *Dp*, *DP*, & erit sector circularis *AtD* ut tempus omne ascendendi ad locum summum; &

velocitas maxima erit ad velocitatem datam in subduplicatâ ratione gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

& sector hyperbolicus *ATD* ut tempus omne descendendi à loco summo: Si modò sectorum tangentes *Ap*, *AP*, sint ut velocitates.

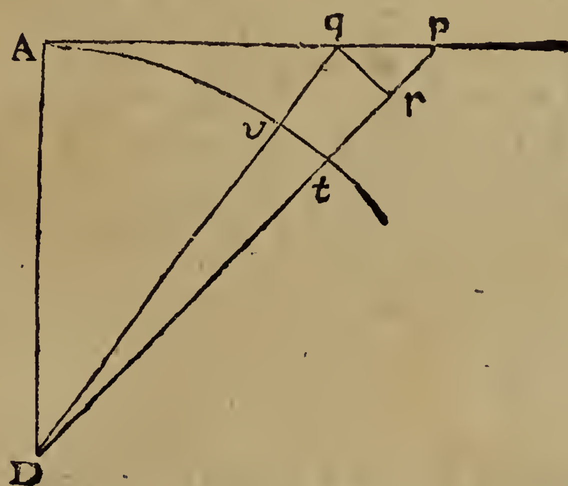
Cas. 1. Agatur enim *D v q* abscindens sectoris *A D t* & trianguli *A D p* momenta, seu particulas quàm minimas simul descriptas *t D v* & *q D p*. Cùm particulæ illæ, ob angulum communem *D*, sunt in ([d]) duplicatâ ratione laterum, erit particula *t D v* ut $\frac{qDp \times tD\ quad.}{pD\ quad.}$, id est, ob datam *t D*, ut $\frac{qDp}{pD\ quad.}$. Sed *p D quad.* est *A D quad.* + *A p quad.* id est, ([e]) *A D quad.* + *A D* × *Ak*, seu *A D* × *Ck*; & ([f]) *qDp* est ½ *A D* × *p q*. Ergo sectoris particula *t D v* est ut $\frac{pq}{Ck}$, id est, ut velocitatis decrementum quàm minimum *p q* directè, & vis illa *C k* quæ velocitatem diminuit inversè; ([g]) atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis respondens. Et componendo fit summa particularum omnium *t D v* in sectore *A D t*, ut summa particularum temporis singulis velocita-tis

90.

(d) * *In duplicatâ ratione laterum.* Nam si ex puncto q ducatur ad D p lineola q r parallela ipsi v t, duo triangula evanescentia D q r, D v t similia sunt & in ratione duplicatâ laterum D q, D v, (*per prop.* 19. *lib.* 6. *Elem.*) & triangulum D q p æquale est triangulo D q r evanescente p r respectu D q; est igitur p D² ad t D², seu A D², ut triangulum q D p ad triangulum t D v, & ideo t D v $= \frac{AD^2 \times qDp}{pD2}$, undè ob datum circuli radium A D, particula t D v est ut $\frac{qDp}{pD^2}$.

(e) * *Id est.* Nam A C × A k, seu A D × A k = A p² (*per construεt. prop.* 8.) & A D² + A D × A k = A D × (AC + Ak) = A D × C k.

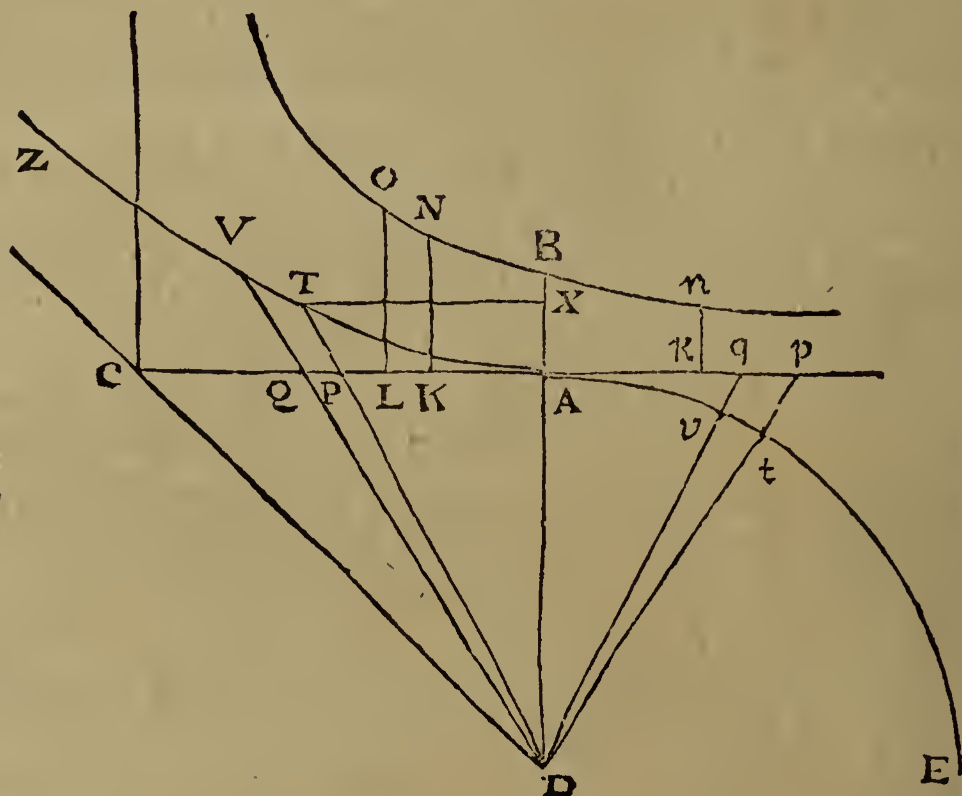
(f) * *Et q D p est* ½ *A D* × *p q*, ob A D basi p q productæ normalem.



(g) * *Atquè ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens* (18).

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. IX. Theor. VII.

tis decrescentis Ap particulis amissis pq respondentium; usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus ADt est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. *Q. E. D.*



Cas. 2. Agatur DQV abscindens tum sectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quàm minimas TDV & PDQ, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id est (si TX & AP parallelæ sint) ut (h) DXq ad DAq vel TXq ad APq, & divisim ut $DXq-TXq$ ad $DAq-APq$. (i) Sed ex naturâ hyperbolæ $DXq-TXq$ est ADq, & per hypo-

(h) * *Ut* DX^2 *ad* DA^2, ob triangula DTX, DPA similia (*per prop.* 2. *lib.* 6. *Elem.*)

(i) * *Sed ex natura hyperbolæ &c.* Quoniam (*per theor.* 2. *de hyperb.*) rectangulum $\overline{2AD+AX}\times AX$, est ad quadratum ordinatæ TX, ut latus transversum est ad latus rectum, hæc verò Hyperbola est æquilatera, erit (*per theor.* 5. *de hyperb.*) $TX^2=\overline{2AD+AX}\times AX$. Sed est $\overline{2AD+AX}\times AX=DX^2-DA^2$ (*per prop.* 6. *lib.* 2. *Elem.*) ergò $TX^2=DX^2-DA^2$, ac proinde $DX^2-TX^2=DA^2$.

(k) hypothesin APq est $AD \times AK$. Ergo particulæ sunt ad invicem ut ADq ad $ADq - AD \times AK$; id est, ut AD ad $AD - AK$ seu AC ad CK: ideoque sectoris particula TDV est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo (l) ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideo ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur; ut summa particularum sectoris ATD, id est, tempus totum ut sector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC, spatium quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABNK$, quâ spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cùm sit AC ad AP ut AP ad AK, erit (*per corol.* 1. *lem.* 11. *hujus*) LK ad PQ ut 2 AK ad AP, hoc est, ut 2 AP ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}$ PQ ut AP ad $\frac{1}{4}$ AC vel AB; est & KN ad AC vel AD ut (m) AB ad CK; itaque ex æquo $LKNO$ ad DPQ ut AP ad CK. (n) Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rursus ex æquo $LKNO$ est ad DTV ut AP ad AC; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta $LKNO$ & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ (†) ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio geni-

(k) * *Et per hypothesim* AP^2 *est* $AD \times Ak$, seu $AC \times Ak$ (*per construct. prop.* 8.)

(l) * *Ob datas* AC & AD. Est enim $PDQ = \frac{1}{2} AD \times PQ$, & ideò $TDV = \frac{\frac{1}{2} AD \times AC \times PQ}{CK}$.

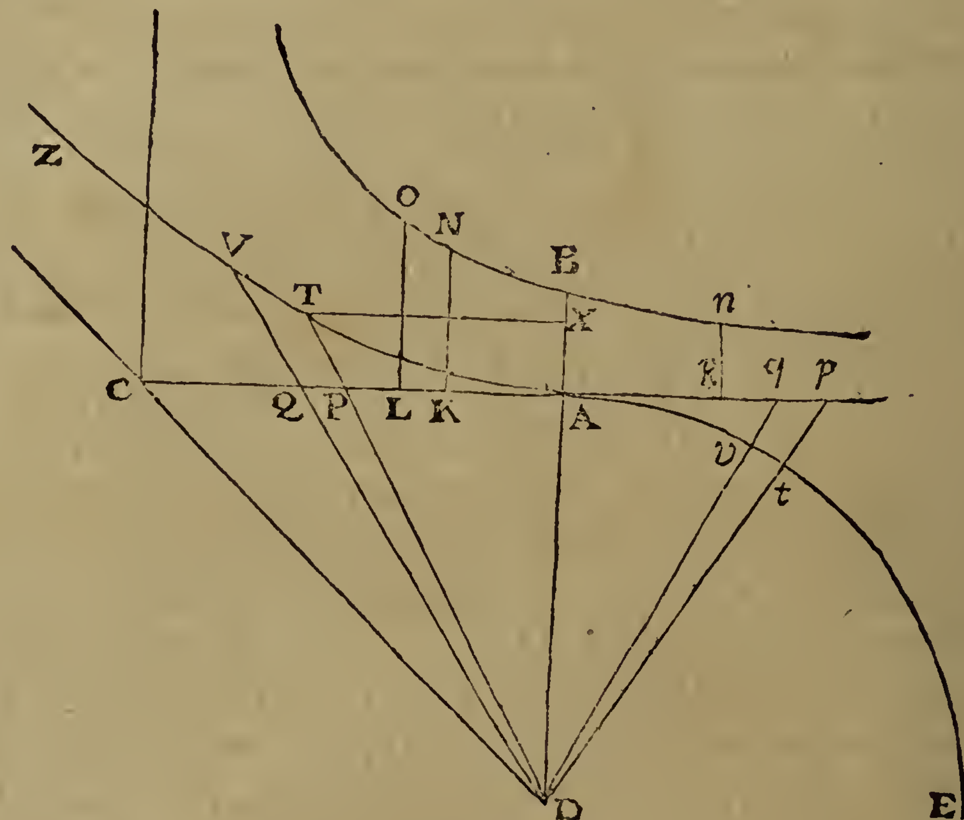
(m) * *Ut* AB *ad* CK (per theor. 4. de hyperb. 90.

(n) * *Sed erat* DPQ *ad* DTV *&c.* Suprà cas. 2.

(†) * *Ut spatia simul descripta* (11).

genitæ *ABNK* & *ATD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. (o) Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quòd ſpatium illud omne ſit ad



ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad ſectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad ſectorem hyperbolicum *ATD*.

(o) * *Idem conſequitur* &c. Eadem eſt prorſus demonſtratio, ſi loco AK & QP ſubſtituantur Ak & qp, & ad primum demonſtrationis caſum attendatur.

91. *Cor.* Velocitas Ap corporis in medio reſiſtente aſcendentis ad maximam altitudinem ABnk, eſt ad velocitatem AP corporis in eodem medio è quiete deſcendentis per æquale ſpatium ABNK, ut ſecans anguli ADp ad radium, aut quod idem eſt, ut tangens Ap anguli ADp, ad ejuſdem ſinum. Quoniam enim (*per hyp.*) area ABNK, æqualis eſt ABnk, erit (380. *Lib.* 1.) $Ck : AC = AC : CK$, & dividendo $Ak : AC = AK : CK$, & alternando, $Ak : AK = AC : CK = Ck$ (ſive $AC + Ak$) $: AC$, & ideò $Ak \times AC : AK \times AC = AC^2 + Ak \times AC : AC^2$; Sed (*per conſtruct. prop.* 8.) $AC \times Ak = Ap^2$, & $AC \times AK = AP^2$. Quare $Ap^2 : AP^2 = AC^2 + Ap^2$ ſeu $Dp^2 : AC^2$, & hinc $Ap : AP = Dp : AC$, ſeu AD. Q. E. D.

ATD. Nam velocitas in medio non resistente (p) foret ut tempus *ATD*, & in medio resistente est ut *AP*, id est, ut triangulum *APD.* Et (q) velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD.*

Corol. 4. (r) Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum *Ap D* ad sectorem circularem *At D*; sive ut recta *Ap* ad arcum *At.*

Corol. 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem *AP*, acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in spatio non resistente cadendo acquirere posset, (s) ut sector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus,

(p) * *Foret ut tempus A T D.* Cresceret enim uniformiter, ideóque ut tempus (25. *lib.* 1.)

(q) * *Et velocitates illæ initio descensûs æquantur inter se* ob resistentiam respectu gravitatis nullam, ubi velocitas nascitur. Cùm igitur velocitates in medio non resistente sint semper inter se ut areæ A T D, & in medio resistente sint ut triangula A P D, erit velocitas in medio resistente tempore finito A T D acquisita ad velocitatem initio descensûs in eo medio resistente ut triangulum finitum A P D, ad triangulum nascens A P D, & erit velocitas initio descensûs in medio non resistente ad velocitatem in eodem medio tempore finito A T D acquisitam, ut area nascens A T D (æqualis areæ nascenti A P D) ad aream finitam A T D; Quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito A T D cadentis in medio resistente est ad velocitatem quam eodem tempore in medio non resistente cadendo acquireret ut triangulum A P D ad sectorem hyperbolicum A T D.

(r) * *Eodem argumento.* Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus A t D, & in medio resistente est ut A p, id est, ut triangulum a p D ob datam A D, & velocitates illæ in fine ascensûs, ubi evanescunt, æquantur inter se, perindè ut areæ evanescentes A t D, A p D; est autem triangulum A p D $= \frac{1}{2}$ A D × A p, & sector circularis A t D, $= \frac{1}{2}$ A D × A t. Quarè A p D est ad A t D, ut A p ad A t.

91.

92. Hinc si velocitas ascensûs A p in medio resistente velocitati maximæ A C æqualis fuerit, erit velocitas A p seu A C, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum A C D, ad octantem circuli, sive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem est, ut quadratum circulo circumscriptum ad circuli aream. Dum enim fit A p $=$ A C, triangulum A p D æquatur triangulo A C D, & sector A t D, octanti circuli, ideóque arcus A t est pars octava peripheriæ; & triangulum A C D est ad sectorem A t D, ut A C ad arcum A t, ac prætereà triangulum A C D, ob A C $=$ A D; est pars octava quadrati circulo circumscripti.

(s) * *Ut sector A D T ad triangulum A D C.* Cùm enim A P exponat velocitatem tempore A T D in medio resistente acquisitam, sumatur A Y talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non resistente productam, & erit per Coroll. 3. A P ad A Y ut A P D, ad A T D, cùmque etiam A C exponat velocitatem maximam,

pus, quo velocitatem *Ap* in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut (t) arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima (*per corol.* 2. & 3. *theor.* VI. *lib.* II.) inde-

ximam, erit A Y ad A C ut tempus quo prior celeritas A Y in medio non resistente acquiri potest, ad tempus quo velocitas maxima A C in medio etiam non resistente acquireretur, & cùm tempus quo celeritas A Y acquiritur, exprimatur per aream A T D, erit A Y ad A C ut A T D ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non resistente acquiritur, itaque cùm sit A P : A Y = A P D : A T D & A Y : A C = A T D : ad hanc aream, erit ex æquo A P : A C = A P D, ad hanc aream, sed sumptâ communi altitudine D A est A P ad A C = Tri. A P D ad Tri. A D C; ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non resistente acquiritur, est area A D C. Undè sequitur quòd corpus in medio resistente, velocitatem maximam A C acquirere cadendo non potest nisi tempore infinito. Cùm enim sit A P = A C, coincidit D T cum Hyperbolæ A T V asimptoto DC, & sector A D T fit infinitus.

(t) * *Ut arcus At, ad ejus tangentem A p.* Siquidem (*per cor.* 4.) velocitas A p in medio resistente tempore A t D extinguenda, est ad velocitatem eodem tempore in spatio non resistente extinguendam ut triangulum A p D ad sectorem A t D; & etiam ut tempus quo velocitas A p in spatio non resistente extingueretur ad tempus A t D quo altera velocitas in spatio non resistente extinguitur, quod idem est cum eo quo velocitas A p in spatio resistente extinguitur. Quare tempus quo velocitas A p, in spatio non resistente evanesceret est ad tempus A t D quo in spatio resistente extingueretur ut triangulum A p D, ad sectorem A t D, sive tangens A p ad ejus arcum A t. Patet ergò propositum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem A p in medio resistente ascendendo amittere potest, est ad tempus quo velocitatem maximam A C in spatio non resistente ascendendo amitteret, vel descendendo acquireret, ut sector circularis A t D, ad triangulum A D C, seu ut arcus A t ad radium A D. Nam in medio non resistente velocitas A p est ad velocitatem A C, ut tempus A p D, quo generatur vel extinguitur velocitas A p, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas A C, quod proindè erit $\frac{AC \times ApD}{Ap}$, seu $\frac{1}{2}$ A D × A C, hoc est, triangulum A D C. Cùm igitur tempus quo velocitas A p, in medio resistente extinguitur, exponatur per sectorem A t D, patet propositum.

94. Tempus quo corpus in medio resistente descendendo acquirit velocitatem A P, vel ascendendo amittit velocitatem A p, est ad tempus quo eandem velocitatem in medio non resistente acquirit vel amittit, ut sector A D T, vel A D t, ad triangulum A D P, vel A D p, respectivè. Etenim (*per cor.* 5. & *not.* 93.) tempus quo in medio resistente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, est ad tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas maxima A C, ut A D T vel A D t, ad A D C; Et tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas A C, est ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem spatio non resistente, velocitas A P vel A p, ut A C ad A P vel A p, & sumptâ communi altitudine D A ut A D C ad A P D vel A p D. Quare (ex æquo) tempus quo in medio resistente ge-

(u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; (x) dabitur tum velocitas *AP*

generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, eſt ad tempus quo velocitas eadem in ſpatio non reſiſtente producitur vel amittitur, ut A D T ad A D P, vel A D p. Q. E. D.

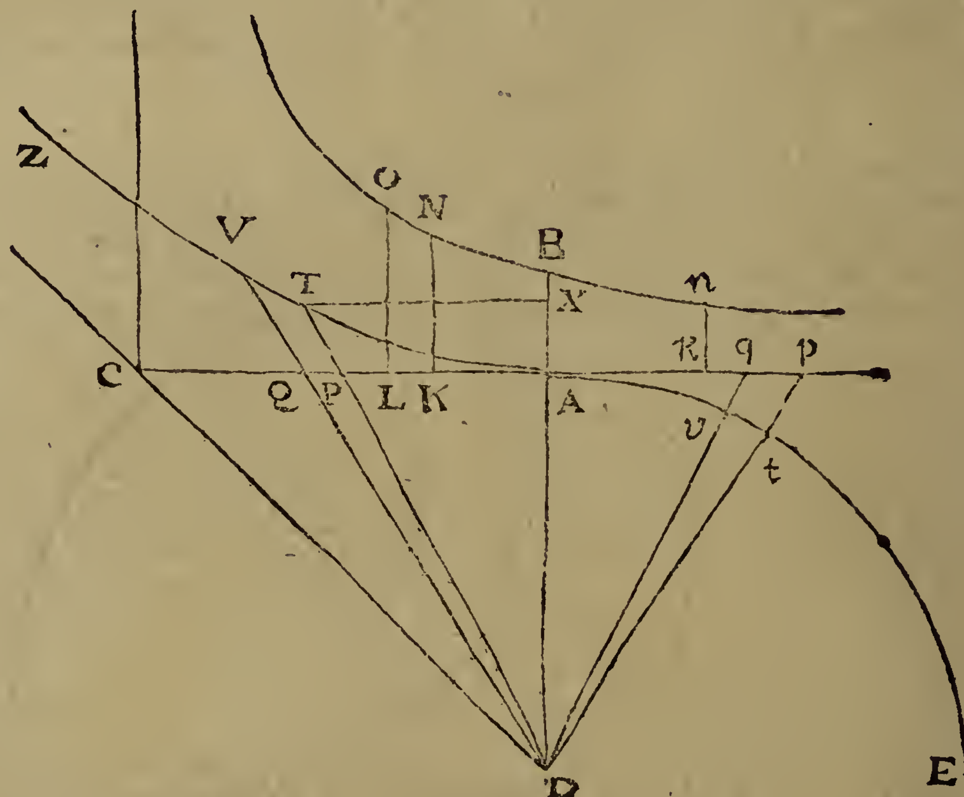
95. Si celeritas A p corporis in medio reſiſtente aſcendentis maximæ A C æqualis fuerit, erit A D p = A D C, & ſector A D t, circuli octans. Quare tempus quo corpus in medio reſiſtente aſcendendo amittere poteſt velocitatem maximam A C eſt ad tempus quo eandem in ſpatio non reſiſtente amitteret, ut circuli octans ad triangulum A D C, hoc eſt, ut area circuli ad quadratum circumſcriptum, ſeu etiam ut 8ª. pars peripheriæ ad radium.

(u) 96. *Indèque datur tempus*. Cùm enim vires acceleratrices uniformes, ſint ut velocitates quas generant directè & tempora quibus illas generant inversè (13. *lib*. 1.) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis ſollicitatur, ſeu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terreſtrium gravitatem, datâque ſimul velocitate quam vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita eſt. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut a ad b, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore x genita c, & velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato t generat C, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$. Undè invenitur tempus $x = \frac{bct}{aC}$. 96.

(x) * *Dabitur tum velocitas* A P, vel A p. (Per cor. 5. & not. 92).

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.

AP vel *Ap*, (y) tum area *ABNK* vel *ABnk*, (z) quæ eſt ad ſectorem *ADT* vel *ADt* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam ante inventâ, uniformiter deſcribi poteſt.



Corol. 7. (a) Et regrediendo, ex dato aſcenſûs vel deſcenſûs ſpatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

PRO-

(y) * *Tum area ABNK vel ABnk.* Eſt enim (*per conſtruct. prop.* 8.) AC : AP = AP : AK, & AC : Ap = Ap : Ak, & ideò datis AC & AP vel Ap dabuntur AK vel Ak, & areæ correſpondentes ABNK, ABnk, quæ per tabulas Logarithmorum inveniri poſſunt (384. *lib.* 1.).

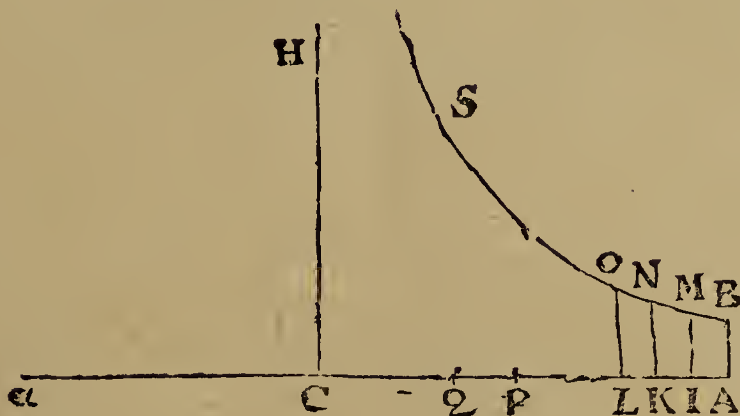
(z) * *Quæ eſt ad ſectorem ADT, vel ADt.* (per cor. 1. & 2.).

(a) 97. *Et regrediendo.* Nimirum capienda eſt area ABnk, vel ABNK ad triangulum ADC in datâ ratione ſpatii dati aſcenſûs vel deſcenſûs ad duplum ſpatii, quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem maximam AC acquirat, atque ità dabitur Ak vel AK. Et hinc dabitur Ap vel AP, ſeu velocitas; ex his autem dabitur ſector ADt vel ADT, ſeu tempus (*per cor.* 5.). Nam ſpatium quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit, ut velocitatem maximam AC acquirat, dicatur *A*, tempus quo ſpatium illud deſcribitur *T*, ſpatium quod in medio reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem AP, vel amittat velocitatem Ap dicatur *s*, tempus *t*, & ſpatium quod corpus tempore illo *t* & velocitate maximâ AC uniformiter progrediendo deſcribit ſit *S*, & quia (29. *lib.* 1.) corpus velocitate maximâ AC uniformiter

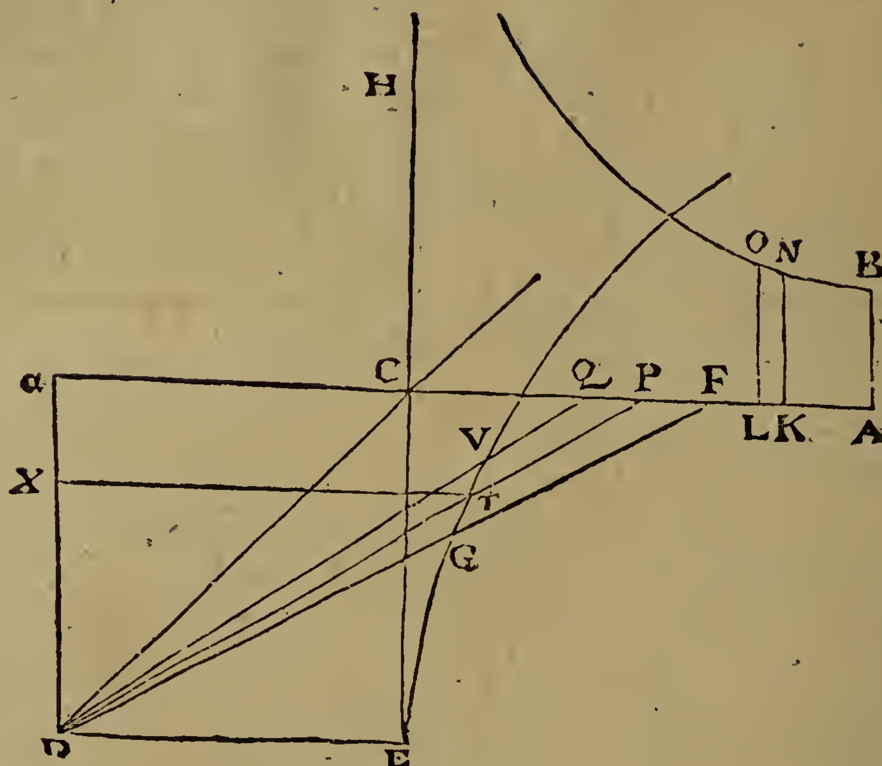
ter progrediendo, tempore T, describit spatium $2A$, erit (5. *lib.* 1.) $S : 2A = t : T$. Sed (*per cor.* 5. *& not.* 93.) $t : T = ADT$ vel $ADt : ADC$, ideóque $S : 2A = ADT$ vel $ADt : ADC$, & (*per cor.* 1. *ac* 2.) $s : S = ABNK$ vel $ABnk : ADT$ vel ADt, respectivè. Quarè (ex æquo) $s : 2A = ABNK$ vel $ABnk : ADC$. Q. E. D.

98. Si corpus cum velocitate quæ æqualis sit maximæ A C, verticaliter projiciatur deorsum, æquabili motu descendet, ob resistentiam gravitati æqualem & contrariam (*per cor.* 2. *prop.* 8.) si minori cum velocitate projiciatur, exponatur velocitas illa per lineæ A C partem A P, & motus corporis projecti idem erit ac si è quiete descendendo velocitatem datam A P, jam acquisivisset & deindè pergeret moveri; Quare motus projecti in hoc casu ex superioribus facile determinabitur.

98.



99. Verùm si projectionis velocitas terminali A C major est, constructiones propositionum 8 & 9 mutandæ erunt. Et quidem constructio propositionis 8æ. sic mutanda. Descripta inter asymptotos orthogonales A C, C H Hyperbolâ quâlibet S O N B, producatur asymptotus A C in a, & exponatur vis gravitatis per datam lineam a C, resistentia initio motûs per lineam a A, resistentia elapso quovis tempore per lineam indefinitam a K. Velocitas corporis per lineam a P quæ sit media proportionalis inter a K & a C, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ. Decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam K L & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam P Q. Quoniam a K est ut aP^2, erit hujus momentum K L, ut illius momentum 2 a P Q, id est, ut a P in K C. Nam velocitatis decrementum P Q, (*per mot. Leg.* 2.) proportionale est vi generanti K C, quæ est excessus resistentiæ a K, suprà vim gravitatis a C. Componatur ratio ipsius K L cum ratione ipsius K N, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $aP \times KC \times KN$, hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut a P, ergò rectangulum evanescens $KN \times KL$, hoc est, area hyperbolica K N O L, est ut a P. Componitur igitur area tota hyperbolica ABOL, ex particulis K N O L, velocitati a P semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B M I, I M N K, K N O L, &c. & vires absolutæ A C, I C, K C, L C; &c. erunt in progressione geometricâ. Si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam A B N K, exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas a C, a P, a K.



Propositionis 9[æ]. constructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ & constructione superiori manentibus, capiatur a F media proportionalis inter a C & a A, & ideò velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato a C E D, centro D describatur hyperbola rectangula E G T V, semiaxem transversum habens D E, verticem principalem E, & asymptotum D C. Jungantur D F, D P Hyperbolæ occurrentes in G & T, & erit sector hyperbolicus G D T ut tempus descensûs per spatium A B N K. Agatur enim D V Q abscindens tum sectoris G D V tum trianguli F D Q particulas quam minimas T D V, P D Q, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DT^2 ad DP^2, id est, si T X & a P parallelæ sint, ut DX^2 ad Da^2, vel TX^2 ad aP^2, & divisim ut $TX^2 - DX^2$ ad $ap^2 - aD^2$, sed (*ex naturâ Hyperb.*) $TX^2 - DX^2$ est aD^2, & (*per Hyp.*) ap^2 est $aD \times aK$; ergò particulæ T D V, P D Q, sunt ad invicem ut aD^2, ad $aD \times aK - aD^2$, id est, ut a D ad $aK - aD$, seu ut a C ad C K, ideóque sectoris particula T D V, est $\frac{PDQ \times aC}{CK}$, atque ideo ob datas a C & a D, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est ut decrementum velocitatis directè utque vis generans decrementum inversè, atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens, & componendo, fit summa particularum temporis quibus omnes velocitatis F P particulæ P Q extinguuntur, ut summa particularum sectoris G D T, id est, tempus totum ut sector totus. Q. E. D.

100. *Coroll.* 1. Quoniam coincidente puncto P cum C, coincidit etiam K cum C, & D T cum asymptoto D C, liquet corporis projecti velocitatem a P nonnisi descripto spatio infinito, elapsoque infinito tempore, fieri posse velocitati terminali a C æqualem.

101. *Coroll.* 2. Si dignitas hyperbolæ BNO seu rectangulum $CA \times AB$, sit $\frac{1}{4} aC^2$, spatium quod corpus tempore quovis describit, erit ad spatium quod corpus velocitate terminali a C eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area A B N K quâ spatium descriptum exponitur ad aream G D T quâ tempus exponitur. Nam cùm sit a C ad a P, ut a P ad a K, erit (*per cor.* 1. *Lem.* 2. *lib.* 2.)

2.) L K ad P Q ut 2 a K ad a P, hoc est, ut 2 a P ad a C, & indè L K ad $\frac{1}{2}$ P Q, ut a P ad $\frac{1}{4}$ a C. (*ex naturâ hyperb. & per hyp*) K N × C K est C A × A B, seu $\frac{1}{4}$ a C², ideóque K N ad a C seu a D, ut $\frac{1}{4}$ a C ad C K. Itaque (ex æquo) L K N, ad D P Q, ut a P, ad C K; sed erat D P Q, ad D T V, ut C K ad a C, ergò rursus (ex æquo), LKN, est ad D T V, ut a P, ad a C, hoc est, ut velocitas corporis projecti est ad velocitatem maximam quam corpus è quiete cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum A B N K & G D T, momenta L K N & D T V sint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ A B N K & G D T, ut spatia tota ab initio projectionis descripta.

102. *Coroll.* 3. Velocitas a P corporis projecti in fine temporis G T D, est ad velocitatem quam corpus velocitate initiali a F projectum eodem tempore in medio non resistente cadendo haberet, ut triangulum a P D ad summam trianguli a F D & sectoris hyperbolici G T D. Nam velocitatis incrementum tempore G T D in spatio non resistente genitum est ut tempus G T D, & velocitas projectionis ut a F, sive ut triangulum A F D, atque adeò velocitas tota in fine temporis G T D ut G T D + a F D, & velocitas in fine temporis ejusdem G T D in medio resistente est ut a P, id est, ut triangulum a P D, & velocitates illæ initio projectionis æquantur inter se, perindè ut areæ illæ G T D + a F D & a P D, ob sectorem G T D evanescentem, & a P æqualem a F initio descensûs.

103. *Coroll.* 4. Tempus quo corpus in medio resistente projectum acquirit velocitatem a P, seu quo amittit velocitatem P F, est ad tempus quo velocitatem maximam a C, in spatio non resistente è quiete cadendo acquirere posset, ut sector G D T ad triangulum a D C. Sit a F + *V*, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non resistente cum velocitate initiali a F projectum elapso tempore G D T haberet, & erit (102) a P ad a F + *V*, seu multiplicando per $\frac{1}{2}$ A D, a P D ad a F D + $\frac{1}{2}$ a D × *V*, ut a P D ad a F D + G T D, ideóque $\frac{1}{2}$ a D × *V* = G T D, & $V = \frac{G T D}{\frac{1}{2} a D}$; sed *V* est velocitas quam corpus è quiete cadendo in medio non resistente acquireret tempore G T D, & velocitates in medio non resistente acquisitæ, sunt ut tempora quibus acquiruntur, ideóque velocitas *V* seu $\frac{G T D}{\frac{1}{2} a D}$, est ad velocitatem a C, in medio non resistente acquisitam ut tempus G T D ad tempus quo corpus velocitatem a C acquirit; Quarè hoc tempus erit $\frac{1}{2}$ a D × a C, seu per triangulum a D C exponetur. 103.

104. *Coroll.* 5. Hinc ex dato tempore datur spatium descriptum. Capiatur enim sector G D T ad triangulum a D C, ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non resistente acquirit velocitatem terminalem a C, & dabitur tum velocitas a P, tum area A B N K, quæ est ad sectorem G D T, ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali a C uniformiter describi potest (101) & regrediendo ex dato spatio A B N K, dabitur tempus G D T, si capiatur area A B N K, ad triangulum a D C in ratione spatii dati ad duplum spatii quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem terminalem a C acquirat. Id demonstratur ex not. 103. & 101) eodem prorsus modo quo factum est (97).

105. *Scholium.* Superiores constructiones definiendis corporum motibus sufficiunt, licet medii resistentia partim constans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam si corpus solâ vi insitâ moveatur, recta A C, quæ in constructionibus prop. 8. & 9. vim gravitatis uniformem exponebat, partem resistentiæ constantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis censeri potest, cæteris manentibus, exponet. Sed si corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente sollicitatum rectâ ascendat vel descendat, linea A C, in constructionibus pro ascensu vim gravitatis & partem resistentiæ datam simul exhibebit, in constructionibus verò pro descensu excessum gravitatis suprà partem resistentiæ datam repræsentabit; & linea illa A C, ità determinata vim gravitatis uniformem exponet, quâ corpus urge-

retur in medio cujus eſſet reſiſtentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa reſiſtentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit & corpus deorſum projiciatur, idem erit illius motus ac ſi ſolâ vi inſitâ ferretur in medio quod reſiſteret in ratione quadrati velocitatis, atquè ideò in hoc caſu uſurpanda erit conſtructio propoſitionis 5[æ]. Jam verò omiſſis conſtructionibus per Logarithmicam quas (*ex demonſtr.* 44. 45:) facile deducere, aut in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1709. & etiam in Phoronomiâ *Hermanni* Lector videre poterit, duo quæ ſequuntur generalia problemata analyticè ſolvemus.

PROBLEMA.

Definire motum corporis, uniformi gravitate urgente, rectà deſcendentis vel aſcendentis in medio ſimilari, quod in ratione quâlibet multiplicatâ velocitatis reſiſtit.

106. Sit vis gravitatis $=g$, velocitas corporis ſub initio motûs $=c$, ſpatium deſcriptum $=s$, tempus quo deſcriptum eſt $=t$, velocitas hoc tempore acquiſita vel reſidua $=v$, reſiſtentia medii $r=\frac{v^n}{a^{n-1}}$, & a quantitas data. Corpore deſcendente erit (19) $g\,ds-\frac{v^n\,ds}{a^{n-1}}=v\,dv$, ideoque $ds=\frac{a^{n-1}v\,dv}{ga^{n-1}-v^n}$, & quia (13) $dt=\frac{ds}{v}$, erit $dt=\frac{a^{n-1}dv}{ga^{n-1}-v^n}$. Simili modo pro corporis aſcenſu, invenitur $ds=\frac{-a^{n-1}v\,dv}{ga^{n-1}+v^n}$ & $dt=\frac{-a^{n-1}dv}{ga^{n-1}+v^n}$. Cùm igitur in his quatuor æquationibus variabiles ſeparatæ ſint, poterunt illæ, ſaltem conceſſis figurarum quadraturis, conſtrui.

107. Si reſiſtentia velocitati proportionalis fuerit, erit $n=1$, & ideò corpore deſcendente $ds=\frac{v\,dv}{g-v}$ & diviſione numeratoris $v\,dv$ per $-v+g$ peractâ, eſt $ds=-dv+\frac{g\,dv}{g-v}$, & ſumptis fluentibus $s=Q-v-g\times L.\overline{g-v}$. Quia verò ubi evaneſcit ſpatium s, fit $v=c$ (*per hyp.*) erit conſtans $Q=c+g\,L.\overline{g-c}$, ac proindè $s=c-v+L.\frac{g-c}{g-v}$. Tempus habetur per æquationem $dt=\frac{dv}{g-v}$ cujus fluens $t=Q-L.\overline{g-v}=L.\frac{g-c}{g-v}$. Simili modo pro corporis aſcenſu invenitur $s=c-v+g\,L.\frac{g+v}{g+c}$, & $t=L.\frac{g+c}{g+v}$.

108. Si reſiſtentia ſit ut velocitatis quadratum, erit $n=2$ & (106) $r=\frac{v^2}{a}$. Sit b velocitas terminalis, & quia reſiſtentia gravitati æqualis eſt ubi corpus velocitatem maximam habet, erit $g=\frac{bb}{a}$, & $bb=ag$. Sit e ſpatium quod corpus vi gravitatis conſtante g cadendo in medio non reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem b, & erit $2ge=bb=ag$ (23) ideoque $a=2e$. His poſitis, corpore deſcendente erit (106) $ds=\frac{av\,dv}{ag-vv}=\frac{2ev\,dv}{bb-vv}$. Ponatur $bb-vv=xx$, & proindè ſumptis fluxionibus $v\,dv=-x\,dx$, atquè ideo $ds=-\frac{2ex\,dx}{xx}=-\frac{2e\,dx}{x}$, & ſumptis fluentibus $s=Q-2eL.x=Q-eL.x^2=Q-eL.\overline{bb-vv}$. Ponatur $s=0$, & ideò $v=c$, & indè habebitur $Q=eL.\overline{bb-cc}$, ac proptereà $s=eL.\frac{bb-cc}{bb-vv}$. Sit $L.h=1$ & erit $s.L.h=eL.\frac{bb-cc}{bb-vv}$; $\frac{s}{e}\times L.h=L.h^{\frac{s}{e}}=L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$, ideóque $h^{\frac{s}{e}}=\frac{bb-cc}{bb-vv}$; undè eruitur $vv=\frac{bbh^{\frac{s}{e}}+cc-bb}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus obtinetur per æquationem (106) $dt=\frac{a\,dv}{ag-vv}=\frac{2e\,dv}{bb-vv}=\frac{\frac{e}{b}dv}{b+v}+\frac{\frac{e}{b}dv}{b-v}$; quod patet, ſi duæ poſtremæ fractiones ad communem denominatorem reducantur, &, ſumptis fluentibus $t=Q+\frac{e}{b}L.\overline{b+v}-\frac{e}{b}L.\overline{b-v}$

$-v = Q + \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$. Ponatur $t = o$, & ideò $v = c$, & invenietur $Q = -\frac{e}{b} L. \frac{b+c}{b-c}$. Quarè erit $t = \frac{e}{b} L. \frac{\overline{b+v} \times \overline{b-c}}{\overline{b-v} \times \overline{b+c}}$. Si corpus è quiete cadat, erit $c = o$, & ideò $s = e L. \frac{bb}{bb-vv}$, $vv = \frac{bbh^{\frac{s}{e}} - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$ & $t = \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$.

Si in hâc ultimâ æquatione loco $h^{\frac{e}{s}}$ scribatur m & loco v ipsius valor $b\sqrt{1 - \frac{1}{m}}$, habebitur $t = \frac{e}{b} \times \frac{L\,\overline{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}$.

Simili modo ascendente corpore invenietur $s = e L \frac{bb + cc}{bb + vv}$, & $vv = \frac{bb + cc - bb.h^{\frac{s}{e}}}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus autem reperitur per æquationem $dt = -\frac{adv}{ag + vv} = -\frac{edv}{bb + vv}$. Centro D, radio DA $= b$, describatur circuli quadrans A N E, velocitas c, sub initio ascensûs exponatur per datam tangentem A P, velocitas residua v, per tangentis illius partem A M, & dv per M m, jungantur D P, D M, D m, circulo occurrentes in T, N, n, & ex puncto M, demissum sit ad D n perpendiculum M R, triangula similia D N n, D M R, dant D M : D N vel D A $=$ M R : N n, & triangula similia m R M, M A D, dant D M : D A $=$ M m : M R, ideóque (ex æquo) $DM^2 : DA^2 = Mm : Nn$, hoc est, $bb + vv : bb = dv$: N n $= \frac{bbdv}{bb + vv}$; undè fit $\frac{e \times Nn}{bb} = \frac{edv}{bb + vv}$; & hinc habebitur $dt = -\frac{e \times Nn}{bb}$, sumptisque fluentibus $t = Q - \frac{e \times AN}{bb}$. Ponatur $t = o$, & fiet A M $=$ A P, & A N $=$ A T, ideóque Q $= \frac{e \times AT}{bb}$. Quarè erit $t = \frac{e \times TN}{bb} = \frac{TN}{2g}$, (ob $bb = 2ge$).

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. IX. Theor. VII.

108.

PROBLEMA.

Definire motum corporis in lineâ rectâ AC, vi quâlibet centripetâ ad punctum C tendente sollicitati in medio cujus resistentia est ut densitas medii & dignitas quævis velocitatis corporis conjunctim.

109. Corpus è loco dato A vel a, datâ cum velocitate projectum ascendat per spatium a P vel descendat per spatium A P, dicanturque velocitas projectionis in a vel A $= c$, spatium descriptum a P vel A P $= s$, tempus quo descriptum est $= t$, velocitas corporis in loco P $= v$, vis centripeta ibidem $= g$, densitas medii in eodem loco $= k$, resistentia $r = kv^n$, distantia C P $= x$, & data C a vel C A $= b$, erit (22) pro corporis ascensu, $gdx + kv^n dx = -vdv$, & pro descensu $gdx - kv^n dx = -vdv$, quarum æquationum alterutram resolvere satis est, cum altera in alteram abeat, mutato signo $+$ vel $-$ quantitati k præfixo. Quia verò corpore ascendente est a P $= s = x - b$, & proindè $ds = dx$; at eodem descendente A P $= s = b - x$, & ideo

$ds =$

$ds = -dx$, erit pro corporis aſcenſu (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx}{v}$, & pro deſcenſu $dt = -\frac{dx}{v}$. His poſitis breviter exponimus præcipuos caſus in quibus ſuperiorum æquationum variabiles ſeparari & æquationes proindè per curvarum quadraturas conſtrui poſſunt.

110. Si in æquatione generali $gdx \pm kv^n dx = -vdv$, quæ eſt pro aſcenſu & deſcenſu ſimul. Sit g quantitas conſtans, & denſitas k, ut diſtantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}n}$ reciprocè, hoc eſt, $k = \frac{1}{ax^{\frac{1}{2}n}}$, variabiles ſeparari poſſunt. Nam æquatio generalis in hanc mutabitur $gdx \pm \frac{v^n dx}{ax^{\frac{1}{2}n}} = -vdv$. Ponatur $v^2 = xz$, ideoque $v^n = x^{\frac{1}{2}n} z^{\frac{1}{2}n}$, & $vdv = \frac{xdz + zdx}{2}$, & æquatio evadet $gdx \pm \frac{z^{\frac{1}{2}n} dx}{a} = \frac{-xdz - zdx}{2}$, undè eruitur $\frac{dx}{x} = \frac{adz}{2ag + az \pm 2z^{\frac{1}{2}n}}$. In quâ variabiles ſunt ſeparatæ.

111. Si denſitas k conſtans fuerit, vis centripeta g ut diſtantia x à centro & reſiſtentia ut velocitas, variabiles ſeparari poſſunt. Nam ſi ponatur $g = ax$, k conſtans & $n = 1$, æquatio generalis fiet $axdx \pm kvdx = -vdv$, in quâ neglectis coefficientibus datis a & k, termini omnes ſunt homogenei ſeu ejuſdem dimenſionis. Ponatur itaque $v = zx$, & proindè $dv = zdx + xdz$, & æquatio evadet $axdx \pm kzxdx = -z^2 xdx - zx^2 dz$, & terminis omnibus per x diviſis, iiſque ordinatis invenitur $\frac{dx}{x} = -\frac{zdz}{a \pm kz + z^2}$, quæ æquatio, conceſſâ Hyperbolæ vel circuli quadraturâ ſemper conſtrui poteſt.

112. Si, cæteris paribus, medii reſiſtentia ſit ut quadratum velocitatis, id eſt, $n = 2$, & denſitas medii k viſque centripeta g ſint ut functiones quælibet diſtantiæ x, variabiles in ſuperioribus æquationibus (109.) ſeparationem admittunt. In hâc Hypotheſi æquatio pro corporis aſcenſu fit $gdx + kv^2 dx = -vdv$, ſeu $vdv + kv^2 dx = -gdx$. Ponatur $kdx = \frac{dz}{2z}$, ut ſit $2zvdv + v^2 dz = -2gzdx$, & ſumptis fluentibus erit $zv^2 = Q - S.2gzdx$, & $v^2 = \frac{Q - S.2gzdx}{z}$. Quia verò $kdx = \frac{\frac{1}{2}dz}{z}$, erit $S.kdx = \frac{1}{2}L.z$ & $S.2kdx = L.z$. Atquè ideò ſi fuerit $L.h = 1$, $h^{S.2kdx} = z$ undè fit $v^2 = \frac{Q - S.2gh^{S.2kdx}dx}{h^{S.2kdx}}$ pro corporis aſcenſu; & pro deſcenſu loco $+k$, ſcribendo $-k$, erit $v^2 = \frac{Q - S.2gh^{-S.2kdx}dx}{h^{-S.2kdx}} = Qh^{S.2kdx} - h^{S.2kdx} S.2gh^{-S.2kdx}dx$ in quibus æquationibus variabiles ſunt ſeparatæ, quia (*per Hyp.*) quantitates k & g, ſunt ut functiones variabilis x. Conſtans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, ſit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis aſcenſu, & per æquationem $dt = -\frac{dx}{v}$ pro corporis deſcenſu, in quibus æquationibus, ſi loco v ſubſtituatur ipſius valor per x inventus, variabiles erunt ſeparatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. *Euleri*,

PRO-

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.

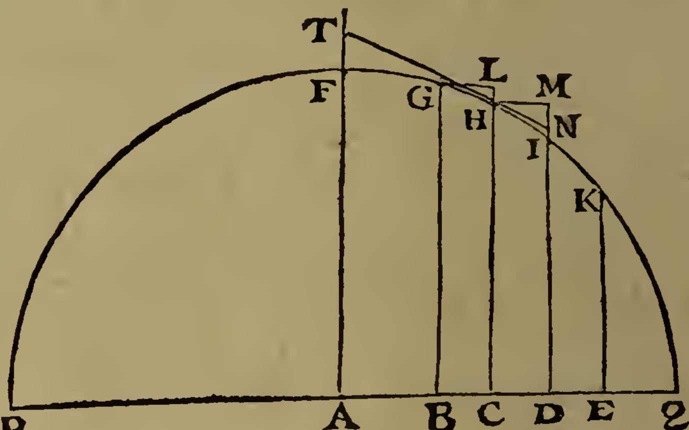
Sit *PQ* planum illud plano ſchematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurrens in punctis *P* & *Q*; *G*, *H*, *I*, *K* loca quatuor corporis in hâc curvâ ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB*, *HC*, *ID*, *KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali *PQ* ad puncta *B*, *C*, *D*, *E* inſiſtentes; & ſint *BC*, *CD*, *DE* diſtantiæ ordinatarum inter ſe æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL*, *HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & ordinatis *CH*, *DI* ſurſum productis occurrentes in *L* & *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*. Et (b) tempora, quibus corpus deſcribit arcus *GH*, *HI*, erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum *LH*, *NI*, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, à tangentibus cadendo; & (c) velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ *GH*, *HI* directè & tempora



(b) 113. * *At tempora quibus corpus deſcribit arcus* evaneſcentes G H, H I, *erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum* L H, N I. Eodem enim temporis momento quo corpus vi motûs inſiti in G, deſcriberet tangentem G L, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem L H qualem in medio non reſiſtente percurreret eo ipſo tempore; reſiſtentiæ enim effectus altitudinem eam minuit quantitate ejus ipſius reſpectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non eſt ſpectanda, itaque corpus arcum G H deſcribere cenſendum eſt vi compoſitâ ex vi motus inſiti & vi gravitatis. Et ſimili modo, tempore eodem quo deſcribit arcum H I, vi gravitatis caderet per altitudinem N I. Quare (per Lem. 10. Lib. 1.) tempora quibus corpus deſcribit arcus G H, H I, ſeu quibus cadit per altitudines L H, N I, ſunt in ſubduplicatâ ratione harum altitudinum. 113.

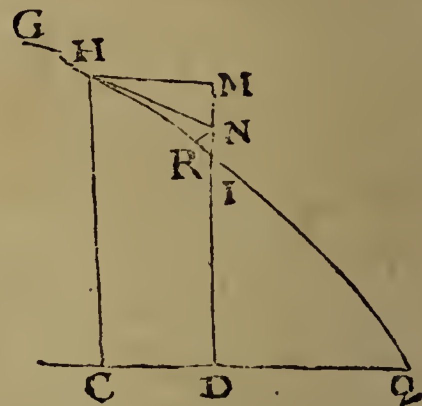
(c) * *Et velocitates erunt* (11).

pora inversè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & ([d]) decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à resistentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut ([e]) *Galilæus* demonstravit; id est velocitatem $\frac{2NI}{t}$: ([f]) at in corpore arcum HI describente, au-



([d]) * *Et decrementum velocitatis.* Nam si velocitas per arcum H I, eadem esset ac velocitas per arcum G H, exponeretur per $\frac{GH}{T}$, est autem illa $\frac{HI}{t}$. Quarè si velocitas decrescat, illius decrementum tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Si verò crescat, exponetur per $\frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$; hoc decrementum vel incrementum oritur à resistentia corpus retardante ejusque motui secundum directionem tangentis H N vel arcûs H I directè contraria (1) & à gravitate mótum corporis descendentis accelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem & tangentialem divisa (24) corporis in curvâ descendentis motum per vim tangentialem accelerat, quem vis normalis nec accelerat, nec retardat. Quarè si resistentia vi gravitatis tangentiali major est, motus retardatur, si minor acceleratur, si æqualis nec acceleratur nec retardatur.

([e]) * *Ut Galilæus demonstravit.* (Vid. dem. not. 29. lib. 1.).



([f]) * *At in corpore &c.* Nam solâ vi insitâ, corpus tempore t describeret tangentem H N, & vi gravitatis solâ altitudinem N I, viribus verò conjunctis describit arcum H I. Quarè gravitas spatium à corpore secundùm directionem H N vel H I, describendum auget solâ longitudine H I — H N. Est autem $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Si enim centro H & radio H N, descriptus intelligatur arcus circularis N R, secans H I in R, duo triangula I R N, I M H similia erunt, ob angulum M I H utri-

auget arcum illum solâ longitudine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, (a) & habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; (b) resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis CB, CD, CE scribantur (c) $-o$, o, $2o$. Pro

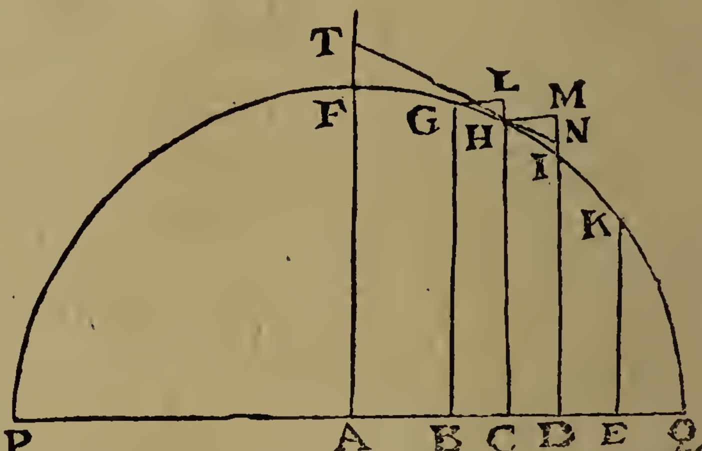
utrique triangulo communem, & angulos IRN, IMH rectos, ideoque æquales, undè erit $HI : MI = NI : RI$ seu $HI - HN$; & propterea $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Cùm igitur RI sit spatium tempore t vi gravitatis tangentiali descriptum (113) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponetur (29. *lib.* 1.) per $\frac{2RI}{t} = \frac{2MI \times MI}{t \times HI}$.

(a) * *Et habebitur decrementum velocitatis ex solâ resistentiâ oriundum, nempe* $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, non solùm in eo casu quo resistentia vim gravitatis tangentialem superat, sed etiam in eo casu quo ab istâ superatur. Sit enim velocitatis decrementum ex solâ resistentiâ oriundum V, cùm incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum sit $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, erit in primo casu $V - \frac{2MI \times NI}{t \times HI} = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ (113), ideoque $V = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$; at in secundo casu erit (113) $\frac{2MI \times NI}{t \times HI} - V = \frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$, & proinde $V = \frac{2MI \times NI}{t \times HI} + \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$, quæ eadem est expressio ac prius. 113.

(b) * *Resistentia erit ad gravitatem &c.* Vires enim acceleratrices vel retardatrices sunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momento generant aut extinguunt, (13. *lib.* 1.).

(c) * *Scribantur* $-o$, o, $2o$. Si enim abscissæ CD, CE affirmativè capiantur, abscissæ CB, &c. in contrariam partem sumptæ negativè debent exprimi.

Pro ordinata CH ſcribatur P, & pro (d) MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. (e) erunt NI, & (f) ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, (g) habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK,



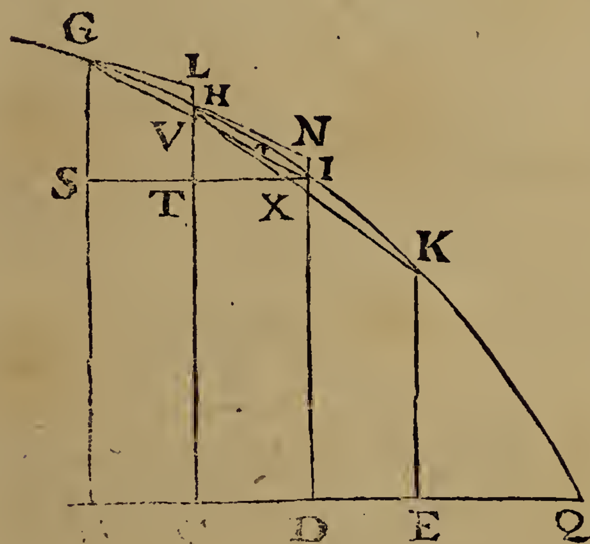
(d) * *Et pro MI ſcribatur ſeries quælibet.* Nam ordinatarum CH, DN differentia fluxionalis MI exprimi poteſt per ſeriem infinitam $Qo + Roo + So^3 +$ &c. in quâ Q, R, S, &c. ſunt quantitates finitæ hic generaliter ſumptæ & poſtea in ſingulis caſibus determinandæ, & o eſt incrementum naſcens & conſtans abſciſſæ (552, 556. *lib.* 1.).

(e) * *Erunt NI &c.* (552. *lib.* 1.)

(f) * *Et ordinatæ &c.* Eſt enim $DI = DM - MI = CH - MI = P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. (*per hyp.*); & quia $CE = 2o$, ſi in valore ordinatæ DI loco o ſcribatur $2o$, abibit DI in $EK = P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c; & ſimili modo quia $CB = -o$, ſi in valore ordinatæ DI loco $+o$ ſcribatur $-o$, fiet $DI = BG = P + Qo - Roo + So^3 -$ &c.

(g) * *Habebuntur arcuum GH, HI quadrata &c.* Eſt enim, ob angulum HMI rectum $HI^2 = HM^2 + MI^2$; & $HM = CD = o$, ac $MI = CH - DI = Qo + Roo + So^3 +$ &c. ideoque $HM^2 = oo$, $MI^2 = Q^2o^2 + 2QRo^3 + R^2o^4 + 2QSo^4 +$ &c.; unde $HI^2 = o^2 + QQo^2 + 2QRo^3 +$ &c. Negliguntur autem termini in quibus eſt o^4, o^5, &c. quod præ cæteris antecedentibus evaneſcant & ad rem nihil faciant. Quare extrahendo radicem quadratam fit $HI = o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, neglectis cæteris terminis negligendis: & ſimili modo invenitur $GH = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$.

EK, ([h]) manebunt arcuum GI & HK sagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et ([k]) hæ sunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t: & ([l]) inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ seu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, ([m]) evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm $2NI$ sit $2Roo$, resistentia jam erit



(h) * *Manebunt arcuum G I & H K sagittæ &c.* Jungatur chorda G I secans C H in V, & ex puncto I demittatur ad B G perpendiculum I S secans C H in T. Erit, ob triangulorum I T V, I S G similitudinem I T ad I S, seu D C ad D B, id est, 1 ad 2, ut T V ad G S, & ideo $GS = 2VT$, & $GB = 2VT + SB = 2VT + DI$, & $GB + DI = 2VT + 2DI$, quare semisumma ordinatarum G B ac D I est $VT + DI$, seu V C, quæ si ab ordinatâ C H subducatur, remanebit arcûs G I sagitta V H. Et simili ratiocinio patet arcûs H K sagittam I X æqualem esse differentiæ inter ordinatam D I & semisummam ordinatarum C H & E K.

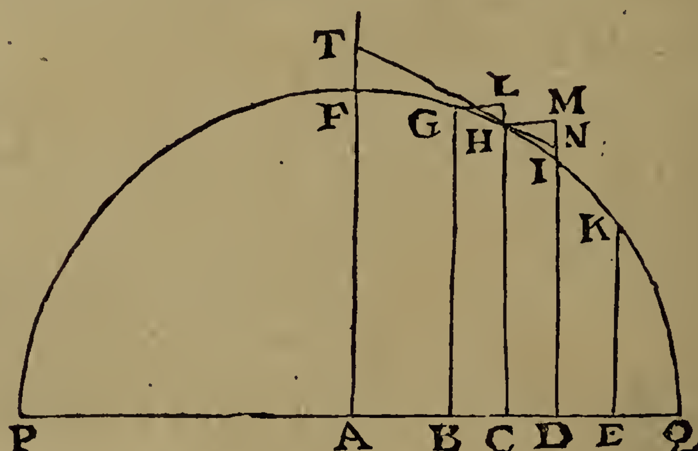
(k) * *Et hæ sunt lineolis L H & N I proportionales.* Nam coeuntibus punctis B, C, D, E & G, H, I, K figuræ N H I X H, L G H V G similes fiunt, & propterea latera homologa H V & I X, L H & N I proportionalia; sunt autem (*ex demonstr.*) lineolæ L H, N I ut quadrata temporum T t, quibus describuntur arcus GH, HI. 113.

(l) * *Et inde ratio $\frac{t}{T}$ est &c.* Nam (*ex demonst.*) $\frac{t^2}{T^2} = \frac{IX}{HV} = \frac{Roo+3So^3}{Roo} = \frac{R+3So}{R}$, & ideò $\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R+3So}{R}} = \sqrt{\frac{RR+3SRo}{RR}} = \frac{\sqrt{RR+3SRo}}{R}$; sed $\sqrt{RR+3SRo} = R + \frac{3SRo}{2R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} = \frac{R+\frac{3}{2}So}{R} = 1 + \frac{3So}{2R}$.

(m) * *Evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$.* Est enim $\frac{t \times GH}{T} = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}} + \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$, neglecto termino in quo reperitur o^3, qui præ cœteris evanescit. Unde fit $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$

erit ad gravitatem ut $\frac{3\,Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2\,Roo$, id est, ut $3\,S\sqrt{1+QQ}$ ad $4\,RR$.

Velocitas autem ea est, quâcum corpus de loco quovis *H*, secundum tangentem *HN* egrediens, in parabolâ diametrum *HC*



& latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, (n) deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut medii densitas & quadratum velocitatis

$-\frac{2\,QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$; sed $2\,MI = 2\,Qo$, & $NI = Roo$ neglectis cæteris seriei terminis evanescentibus, ideoque $2\,MI \times NI = 2\,QRo^3$, atque proinde $\frac{2\,MI \times NI}{HI} = \frac{2\,QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$, neglecto in valore arcûs HI termino evanescente $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. Quare erit $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2\,MI \times NI}{HI} = \frac{3\,Soo\sqrt{1+QQ}}{2\,R}$.

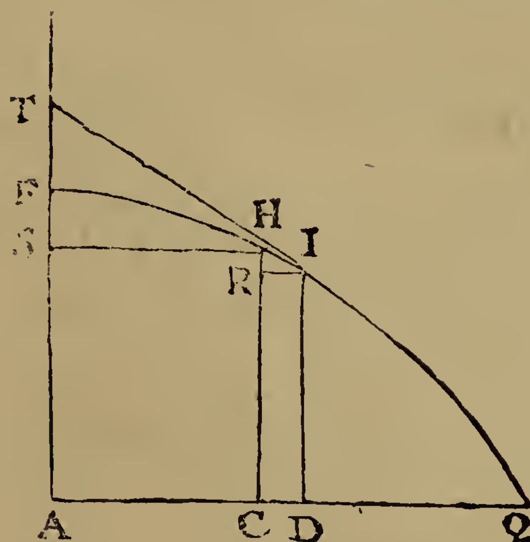
(n) * *Deinceps in vacuo moveri potest.* Cùm enim velocitas per arcum HI, seu per tangentem nascentem HN, æquabilis censeri possit (5), & corpus eodem temporis momento quo vi insitâ describeret HN, vi gravitatis uniformi, omissa resistentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem NI; arcus nascens HI, quem corpus viribus conjunctis describit, usurpari potest pro arcu parabolæ, cujus est diameter HC (40. lib. 1.), tangens HN ordinatis parallela, & NI parallela & æqualis abscissæ cui responderet ordinata æqualis HN. Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{HN^2}{NI}$ (*per Theor.* 1. *de parab.*), *seu* (*per Lemma* 7. *lib.* 1.) $\frac{HI^2}{HI} = \frac{oo+QQoo}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$, neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam describeret (40. *lib.* 1.).

tatis conjunctim, & propterea medii densitas est ut resistentia directè & quadratum velocitatis inversè, id (o) est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens *HN* producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet *AF* in *T*: (p) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis

(o) * *Id est, ut &c.* Quia enim resistentia est ad gravitatem constantem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, erit resistentia ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Velocitas autem est ut $\frac{HI}{t}$, & illius quadratum ut $\frac{HI^2}{t^2}$; & HI^2 est $oo+QQoo$, neglectis negligendis, t^2 verò est ut NI, seu ut Roo (ex demonstr.); adeoque velocitatis quadratum ut $\frac{1+QQ}{R}$. Quare medii densitas erit ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}$, & ob datum numerum $\frac{3}{4}$, ut $\frac{S.\sqrt{1+QQ}}{R(1+QQ)} = \frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$.

114. Si resistentia esset ut medii densitas & velocitatis V dignitas quælibet V^n conjunctim; cùm sit V^n ut $\frac{HI^n}{t^n}$, sive ut $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$, medii densitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id est, directè ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$.



(p) * *Erit* $\frac{HT}{AC}$ *æqualis &c.* Ex punctis H & I demittantur ad AF & CH perpendicula HS & IR; & ob triangula IRH, HST similia, erit HT ad HS seu AC ut HI ad IR vel CD, ideoque $\frac{HT}{AC} = \frac{HI}{CD} = \frac{o\sqrt{1+QQ}}{o} = \sqrt{1+QQ}$. 114.

115. Hinc si resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas V^n conjunctim, erit resistentia ad gravitatem, ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitatis dignitas n, ut $\frac{HT^n}{AC^n \times R^{\frac{n}{2}}}$, & medii densitas ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}} \times AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, sive ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$ (114).

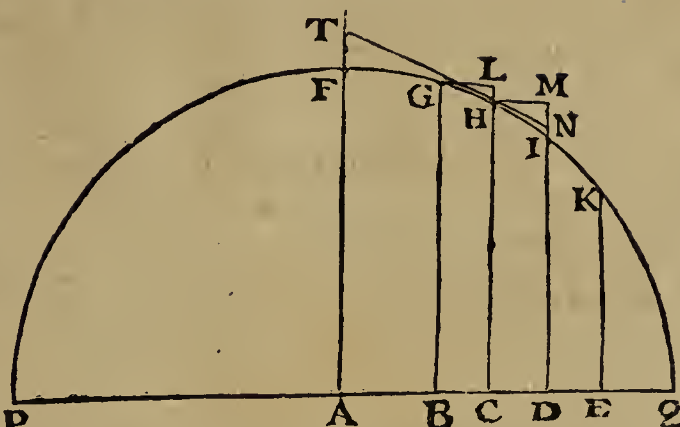
$\sqrt{1+QQ}$, ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Quâ ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3\,S \times HT$ ad $4\,RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Co-

116. Superiores formulæ non ſolùm pro corporis deſcenſu per arcum F Q, ſed etiam pro ejuſdem aſcenſu per arcum P F uſurpari poſſunt. Corpore aſcendente per arcum P F à P ad F, eadem fiat quæ pro deſcenſu per arcum F Q conſtructio; & tempora quibus deſcribuntur arcus G H, H I exponantur per T & t. Decrementum velocitatis tempore t factum erit $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à reſiſtentiâ & gravitate corporis aſcendentis motum ſimul retardantibus. Gravitas in corpore cadente & ſpatium N I cadendo deſcribente, generat velocitatem $\frac{2\,NI}{t}$; at in corpore arcum H I deſcribente, minuit arcum illum ſolâ longitudine HN — HI ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque extinguit tantum velocitatem tangentialem $\frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$. Auferatur hæc velocitas à decremento prædicto, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentiâ ſolâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2\,MI \times NI}{t \times HL}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2\,NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2\,NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2\,MI \times NI}{HI}$ ad $2\,NI$.

Jam ſi pro abſciſſis BC, CD, CE ſcribantur $-o$, o, $2\,o$, & pro ordinata CH ſcribatur P; MI & NI erunt $Qo - Roo - So^3 -$ &c., & $Roo + So^3 +$ &c. Nam in arcu FQ (vide fig. *Newt.*) DI, ſeu

Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea *P F H Q* definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam *A C* & ordinatim applicatam *C H*, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expeditè ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.



Exempl. 1. Sit linea *P F H Q* ſemicirculus ſuper diametro *P Q* deſcriptus, & requiratur medii denſitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Biſecetur diameter *P Q* in *A*; dic *A Q*, n; *A C*, a; *C H*, e; & *C D*, o: & (q) erit $D I q$ ſeu $A Q q - A D q = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & (r) radice per methodum no-

ſeu CH — MN — NI, erat $P - Qo - Roo - So^3$ &c., ideoque MN erat Qo (552. *lib.* 1.), & NI erat $Roo + So^3$; at in arcu PF eſt $DI = CH + MN - NI$, proindeque $DI = P + Qo - Roo - So^3$ &c., & hinc MI eſt $Qo - Roo - So^3$ &c. & NI eſt $Roo + So^3$. Et ſi in ſerie quæ valorem ordinatæ DI exprimit, loco o ſcribantur abſciſſæ CE, BC, ſive $2o$, $-o$, habebuntur ordinatæ EK & BG, nempe $P + 2Qo - 4Roo - 8So^3$ &c., & $P - Qo - Roo + So^3$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum CH—BG & DI—CH, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo + 2QRo^3$, & $oo + QQoo - 2QRo^3$; quorum radices $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t, & inde 116

ratio $\frac{t}{T}$ eſt, $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$, ſeu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, HI, GH, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm 2NI ſit $2Roo$, reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$. Quemadmodum pro deſcenſu inventum eſt; & corollaria eadem quoque manent.

(q) * *Erit D I q ſeu &c.* Eſt enim radius $AI = AQ$, & ideo, ob angulum ADI rectum, $DI^2 = AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo = ee - 2ao - oo$, ob $CH^2 = ee = AQ^2 - AC^2 = nn - aa$.

(r) * *Et radice per methodum noſtram extractâ*, ſeu per formulam generalem (550. *lib.* 1.).

noſtram extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} -$ &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt; & ſic in infinitum. Et (f) primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus (t) terminus, qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, (u) atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ deſignabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & curvam, (x) ideoque determinat angulum contactus IHN ſeu cur-

(f) * *Et primus terminus* (552. lib. 1).

(t) * *Secundus terminus* (ibidem).

(u) 117. * *Atque ideo poſitionem tangentis H N ſemper determinat.* Producatur tangens H N ut diametro A Q occurrat in T; & propter triangulorum H M N, T C H ſimilitudinem, erit C T : H C = H M : MN. Eſt verò generatim H M = o, & M N = Qo, ac Q coefficiens ſecundi termini ſeriei generalis pro curvâ quâcumque (ex demonſtr. prop. X.): quare ſi capiatur C T ad H C ut eſt 1 ad Q habebitur ſubtangens C T.

(x) 118. * *Ideoque determinat angulum contactûs ſeu curvaturam &c.* Sit O cen-

curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si (y) lineola illa *IN* finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium unà cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi poſſunt. (z) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione problematum, quæ pendent à tangentibus & curvaturâ curvarum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c. cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ (a) ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$; hoc

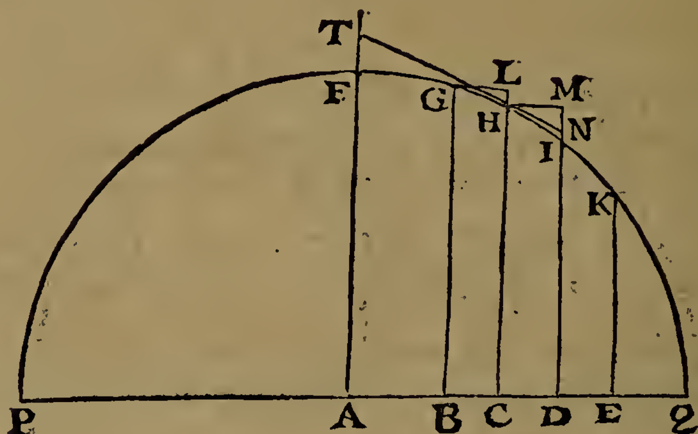
centrum circuli curvam F H Q oſculantis in H; OH, OI radii, HPI chorda arcûs HI, NP arculus circularis centro H & radio HN deſcriptus. Duo triangula IPN, IMH ſimilia erunt, ob angulos ad P & M rectos & angulum ad I utrique triangulo communem, & ideo HI eſt ad HM ut NI ad NP, ac proinde $NP = \frac{HM \times NI}{HI}$. Anguli NHI, quem tangens HN cum ſubtenſa HPI conſtituit, menſura eſt dimidius arcus HI, & anguli ad centrum HOI menſura eſt arcus totus HI (ex natura circuli); unde NP ſeu $\frac{HM \times NI}{HI}$ eſt ad HN ſeu HI (*Lem.* 7. *lib.* 1.) ut $\frac{1}{2}$HI ad HO, & ideo radius oſculi $HO = \frac{HI^3}{2HM \times NI}$. Et quia (ex demonſt. prop. X.) $HI = o\sqrt{1+QQ}$, $HM = o$, ac $NI = Roo$; erit $HO = \frac{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}{2R}$. Sed angulus contactus & curvatura curvæ lineæ FHQ in H eſt ut radius oſculi HO inverſe (121. *lib.* 1.), id eſt, ut $\frac{2R}{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, ſeu curvatura in H, datis ſecundo & tertio termino ſeriei in quam valor ordinatim applicatæ reſolvitur, determinabitur.

(y) * *Si lineola illa I N &c.* (552. 553. *lib.* 1.).

(z) * *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Quoniam differentia lineolarum LH & NI quarto ſeriei termino proportionalis eſt (554) & per lineolam NI determinatur angulus contactus ſeu curvatura curvæ in puncto H (118) & per lineolam LH curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam ſeu per quartum ſeriei terminum determinabitur differentia ſeu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente ſimiliter determinabitur variatio variationis, & ſic deinceps. 118.

(a) * *Seu* $\frac{n}{e}$. Eſt enim $1 + \frac{aa}{ee} = \frac{ee+aa}{ee} = \frac{nn}{ee}$.

hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, seu $\frac{AC}{CH}$, id est, (b) ut tangentis longitudo illa HT, quæ ad semidiametrum AF ipsi PQ normaliter insistentem terminatur: & resistentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id est, ut $3AC$ ad circuli diametrum PQ: (c) velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare si corpus justâ cum velocitate secundùm lineam ipsi PQ parallelam exeat de loco F, & medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis HT, & resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ, corpus illud describet circuli quadrantem FHQ. *Q. E. I.*



At

(b) * *Id est, ut tangentis longitudo illa HT &c.* Jungatur radius AH, & ob angulum rectum quem tangens TH cum radio AH constituit, parallelasque AT, CH, triangulum AHC simile erit triangulo ATH, & inde est TH ad HA, ut AC ad HC, id est, $\frac{AC}{HC}$ est ut $\frac{HT}{AH}$, seu ut HT ob datum radium AH.

(c) * *Velocitas autem erit ut* $\sqrt{CH}$. Nam (ex demonstr. prop. X.) velocitas est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, id est, ut $\sqrt{2e}$, vel $\sqrt{2CH}$, ideoque ut $\sqrt{CH}$.

119. Quoniam igitur velocitas est ut $\sqrt{CH}$, medii densitas ut tangens HT, & resistentia ut AC, (quia gravitas & circuli diameter PQ data sunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii densitas infinita, resistentia finita. Si verò ponatur CH negativa, ut corpus infra horizontalem PQ pergat; fiet velocitas ut $\sqrt{-CH}$, quantitas imaginaria; & ideò corpus non potest infra horizontalem PQ descendere. At dum corpus est in F, velocitas ejus est ut $\sqrt{AF}$, medii densitas nulla, & resistentia nulla.

At si corpus idem de loco P, secundum lineam ipsi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu semicirculi PFQ moveri inciperet, sumenda esset AC seu a ad contrarias partes centri A, & propterea signum ejus mutandum esset & (d) scribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo à P describat circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à resistente impediri.

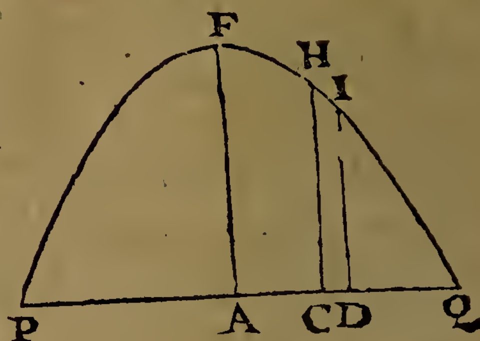
Exempl. 2. Sit linea PFQ parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.

Ex

(d) * *Scribendum* $-a$ *pro* $+a$. Nam formula quæ densitatem medii exponit, corporis ascensui, & descensui communis est, sicut & aliæ formulæ quæ resistentiam & velocitatem exponunt (116); & idcirco ut quantitas quæ densitatem medii corpore descendente exponit eamdem exponat pro corporis ascensu per eumdem vel similem & æqualem arcum, substituendus est in illâ quantitate valor abscissæ, quæ corpore descendente hic positiva est, ascendente negativa.

120. Atque hinc generatim colligitur eumdem curvæ arcum, vel similes & æquales utrinque ab axe arcus, non posse ascensu & descensu describi in uno medio densitatis utcumque variabilis, id est, si arcus unus ascensu describi potest, descensu describi non posse, & contra. Nam si in solutione problematis hujusce pro corporis descensu per arcum F Q, origo abscissæ positivæ A C statuatur in A, & pro C B, C D, C E scribantur $-o$, o, $2 \cdot o$, erit resistentia ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$. Pro ascensu per eumdem arcum à Q ad F, abscissa eadem A C sumenda erit negativè, cùmque sit o abscissæ fluxio, loco C B, C D, C E scribendum erit o $-o$ $-2o$ in valoribus linearum M I, N I, D I, E K & B G; & absoluto calculo, ut in eâdem pro descensu solutione, resistentia pro ascensu invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa est, si prior $+\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ pro descensu erat, positiva sit; & contra. 120.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.



(e) Ex naturâ parabolæ, rectangulum $P D Q$ æquale est rectangulo sub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc est, si dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a + o$ in $c - a - o$ seu $ac - aa - 2ao + co - oo$ æquale est rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac - aa}{b} + \frac{c - 2a}{b} o - \frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c - 2a}{b} o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum verò plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nullâ igitur medii densitate movebitur projectile in parabolâ, (f) uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q. E. I.*

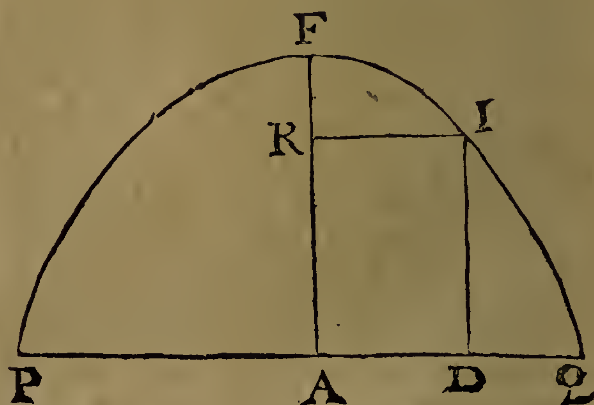
Exempl. 3. Sit linea AGK hyperbola, asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

Sit MX asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, (g) rectan-

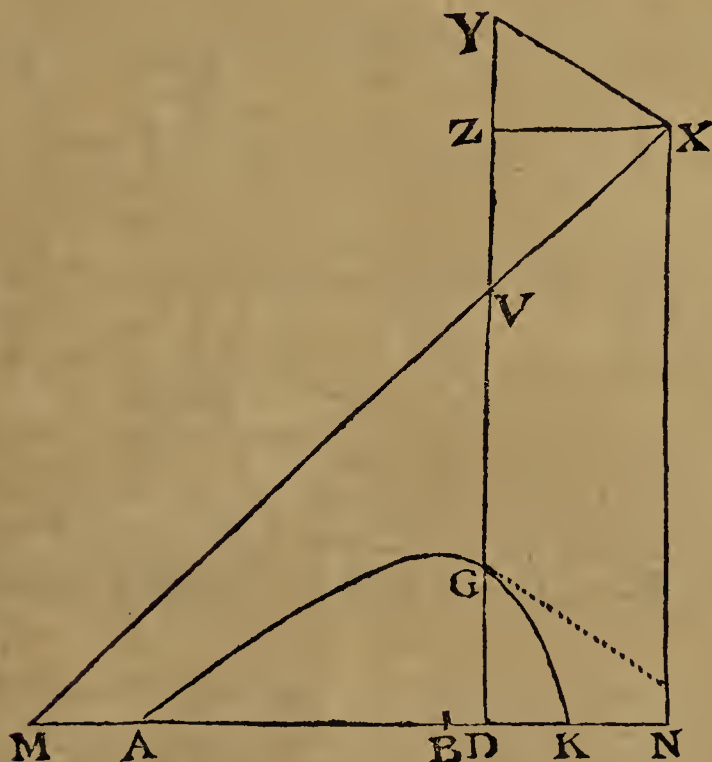
(e) * *Ex natura parabolæ, rectangulum &c.* Ex puncto I ad axem parabolæ FA demissum sit perpendiculum IR, sitque axis latus rectum $= b$; erit (*per theor.* 1. *de parab.*) $b \times FR = RI^2 = AD^2$, & $b \times FA = AQ^2$. Quare $b \times FA - b \times FR$, seu $b \times RA$, vel $b \times DI = AQ^2 - AD^2 = \overline{AQ+AD} \times \overline{AQ-AD} = PD \times DQ$. Q. E. D.

(f) * *Uti olim demonstravit Galilæus.* Vide demonstrationem n. 40. lib. 1.

(g) * *Rectangulum X V in V G dabitur*, per theor. 4. de hyp.



tangulum XV in VG dabitur. (h) Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb: & completo parallelogrammo $DNXZ$; dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX-VZ-VG$



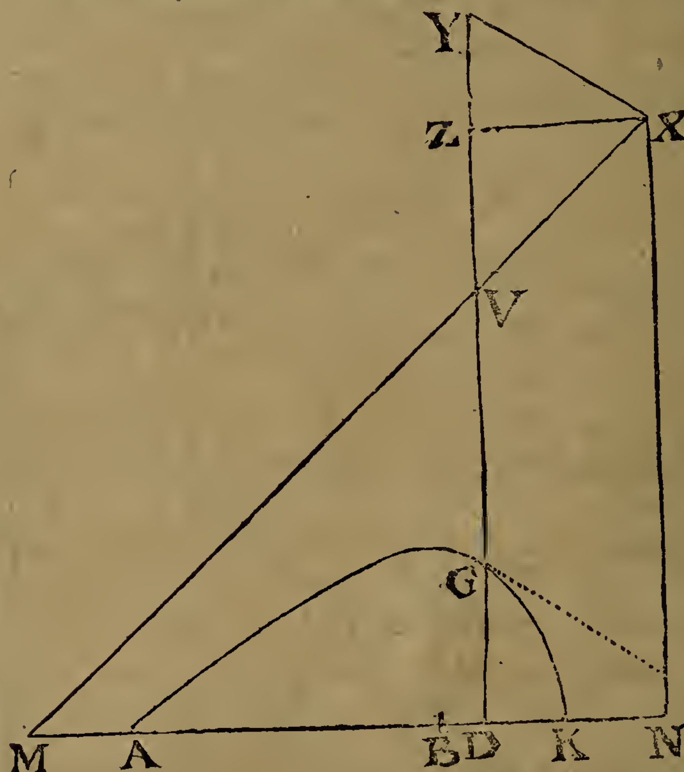
æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ (i) in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{a}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. (k) Hujus se-

(h) * *Datur autem ratio* D N *ad* V X, quæ eadem est cum ratione data M N ad M X, ob parallelas D V, N X.

(i) * *In seriem convergentem*, divisione in infinitum producta.

(k) * *Hujus seriei &c.* Est enim hæc series æqualis seriei $P-Qo-Roo-So^3-$ &c., & singuli illius termini singulis terminis hujus

feriei terminus fecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ ufurpandus eft pro Q o, tertius cum figno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro R o^2, & quartus cum figno



etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro S o^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ fcribendæ funt in regula fuperiore pro Q, R & S. Quo-

hujus æquantur; id eft, $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ eft P, feu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ eft $-Qo$, & ideo $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -Q$; fed quia in expreffionibus refiftentiæ, denfitatis, & velocitatis femper reperitur quadratum QQ, quod idem manet, feu radix illius Q affirmativè fumatur; feu negativè, nihili intereft fcribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem feriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ eft $-Ro^2$, & ideo, mutatis fignis, fit $\frac{bb}{a^3} = R$; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ eft $-So^3$, atque proinde $\frac{bb}{a^4} = S$.

Quo facto prodit medii densitas ut $\dfrac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$

seu (l) $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id (m) est si in VZ sumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & ZY quadrata. (n) Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad $2YG$; & (o) velocitas ea est, quacum corpus in parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii densitates in locis singulis G sint reciproce ut distantiæ XY, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$; & corpus de loco A, justa cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl.

(l) * *Seu*, numeratore & denominatore in $\frac{a^4}{bb}$ ductis.

(m) * *Id est, si in VZ sumatur &c.* Est enim $VG=\frac{bb}{a-o}=\frac{bb}{a}$, & $VZ=\frac{m}{n}\overline{a-o}=\frac{m}{n}a$, ubi evanescit BD, seu o. Quare $VY-VZ=ZY=\frac{bb}{a}-\frac{m}{n}a$; & quia $ZX=DN=a$, & $YX^2=YZ^2+ZX^2$ erit $YX^2=aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$; ideoque medii densitas ut $\frac{1}{XY}$.

(n) * *Resistentia autem &c.* Resistentia est ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, id est, ut $\frac{3bb}{a^4}\times\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mb^2}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4b^4}{a^6}$, sive dividendo per $\frac{bb}{a^5}$, ut $3\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$ ad $\frac{4bb}{a}$, seu ut $3XY$ ad $4VG=2YG$. 120

(o) * *Et velocitas &c.* Hujus parabolæ latus rectum est $\frac{1+QQ}{R}=\dfrac{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}}=\dfrac{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}{\frac{bb}{a}}=\frac{YX^2}{VG}$. Velocitas autem est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$ adeoque ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$.

Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quod linea AGK hyperbola sit, centro X, asymptotis MX, NX eâ lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD secet hyperbolam in G & asymptoton ejus in V, fuerit VG reciprocè ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, (p) cujus index est numerus n: & quæratur medii densitas, quâ projectile progrediatur in hâc curvâ.

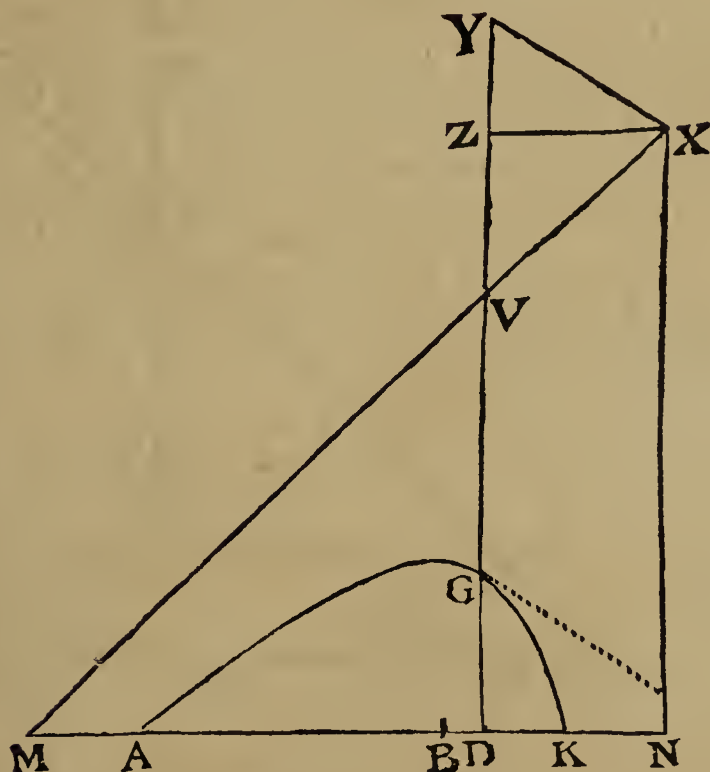
Pro BN, BD, NX scribantur A, O, C respective, sitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A - O$, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD seu $NX - VZ - VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$. (q) Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$

$+n^3$

(p) * *Cujus index est numerus n*, positivus. Hanc autem hyperbolam, dum producitur, ad lineas X M, X N etiam productas continuo accedere, easque non nisi in distantiâ infinitâ contingere posse manifestum est. Cùm enim sit V G ut $\frac{1}{DN^n}$, ubi D N = o, hyperbola rectam X N attingit, & distantia V G infinita evadit; & ubi D N infinita fit, V G est nihil, & ideo hyperbola alteram asymptoton X M tangit, in distantia infinita ab Asymptoto X N.

(q) * *Resolvatur terminus ille* $\frac{bb}{\overline{A-O}}{}^n$, seu $bb \times \overline{A-O}^{-n}$, in seriem infinitam per formulam generalem (548. *lib.* 1.), & invenietur $bb \times \overline{A-O}^{-n} = bbA^{-n} + \frac{n}{1}bbA^{-n-1}O + \frac{n \times \overline{n+1}}{1.2} \times bbA^{-n-2}O^2 + \frac{n \times \overline{n+1} \times \overline{n+2}}{1.2.3}bbA^{-n-3}O^3 +$ &c. $= \frac{bb}{A^n} + \frac{nbbo}{A^{n+1}} + \frac{\overline{nn+n} \times bbO^2}{2A^{n+2}} + \frac{\overline{n^3+3n^2+2n}}{6A^{n+3}} \times bbO^3 +$ &c.; Quo enim modo quo in n. 551. demonstravimus formulam ad potentias, quorum exponentes sunt fracti, applicari posse, eodem ferè modo eam ad potentias quorum exponens negativus est, applicari debere constabit.

$-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$

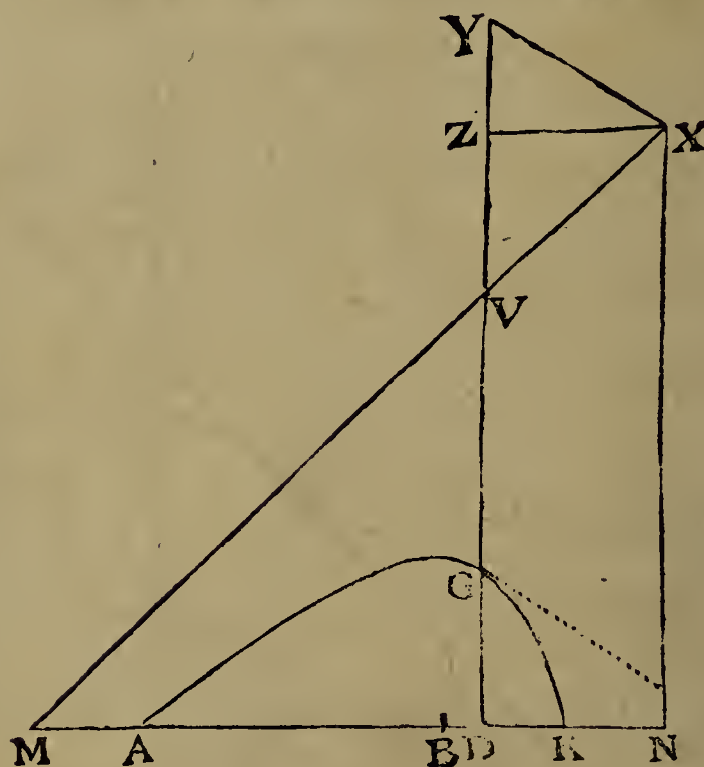


pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde medii densitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in (r) loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideoque si in VZ capiatur VY æqualis $n\times VG$, densitas illa est reciprocè ut XY.

(r) * *In loco quovis G fit &c.* Invenitur enim $\frac{S}{R}=\frac{n+2}{3A}$, & $\sqrt{1+QQ}=\sqrt{1+\frac{dd}{ee}-\frac{2dnbb}{Ae^{n+1}}+\frac{nnb^4}{A^{2n+2}}}$; & ideo, ob datum numerum $\frac{n+2}{3}$, $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ est ut $\frac{1}{\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2dnbbA}{eA^n}+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$. 120.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. X. Probl. III.

XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ (f) ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eo-



dem loco G (t) fit ad gravitatem ut 3 S in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id est, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem

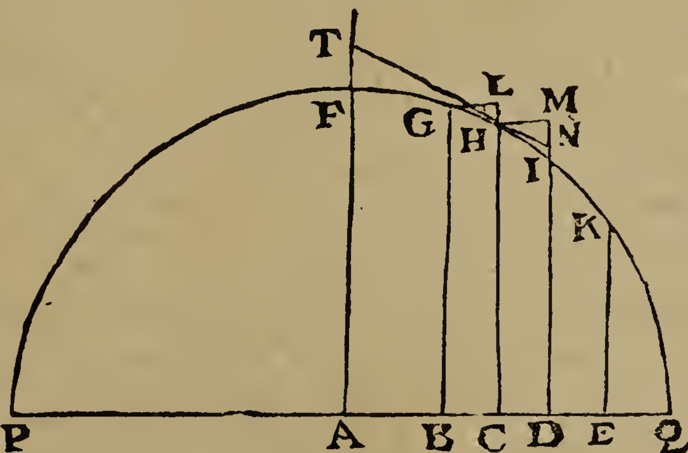
(f) * *Ipsarum XZ & ZY quadrata.* Nam $XZ = DN = A$ (hyp.), & $ZY = VY - VZ = n \times VG - \frac{d}{e}A = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$; aut $ZY = VZ - VY = \frac{d}{e}A - \frac{nbb}{A^n}$, prout YV major vel minor est quam VZ. Quare cùm sit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, densitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

(t) * *Fit ad gravitatem ut &c.* Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A} = \sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ} = \frac{3S \times XY}{A}$, & inde resistentia ad gravitatem ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad $4RR$, vel ut XY ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn+n^2} \times b^4}{A^{2n+3}}$, & $3S = \frac{\overline{nn+n} \times \overline{n+2}\, bb}{2A^{n+3}}$, ideoque $\frac{4RRA}{3S} = \frac{2nn+2n \times bb}{\overline{n+2} \times A^n} = \frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$,

cem G, diametrum GD & (u) latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2\,XY\ quad.}{nn+n \text{ in } \sqrt{VG}}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, (x) prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$. Et (y) propterea si curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}\,|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores. Quo-



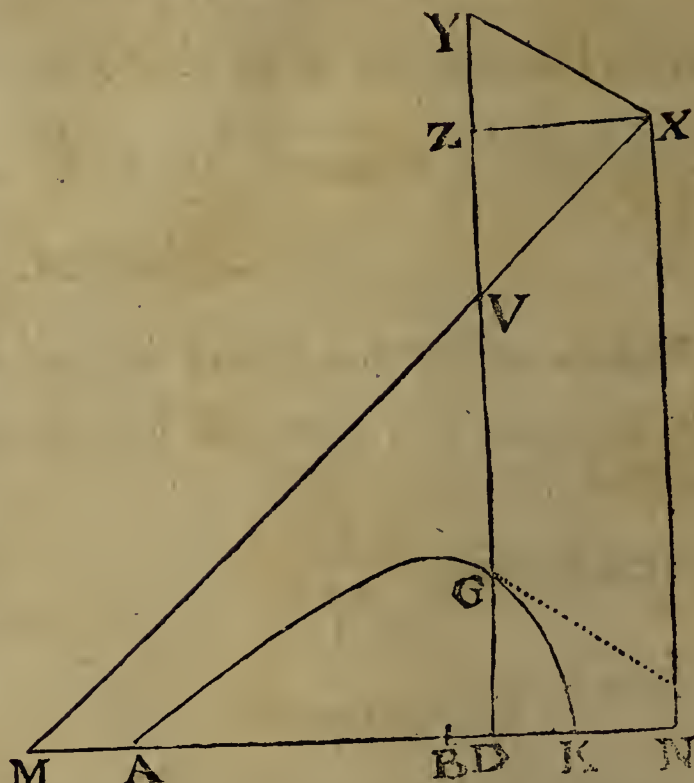
ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Quare resistentia est ad gravitatem ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

(u) * *Et latus rectum &c.* Est enim $\frac{XY^2}{A^2} = 1+QQ$, & hinc $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2\,XY^2 \times A^n}{nn+n \times bb} = \frac{2\,XY^2}{nn+n \times VG}$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$, ob datam numerum $\frac{2}{nn+n}$. 120.

(x) * *Prodibit densitas ut medii ut &c.* (115).

(y) * *Et propterea &c.* Si enim fuerit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$ in ratione a ad b, erit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, & $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}} = \frac{a}{b}$, id est densi-

Quoniam motus non fit in parabolâ nisi in medio non resistente, in hyperbolis verò hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius (z) accedit ad hyperbolas hasce quàm ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, sed (a) quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus à vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quàm pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta verò non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommodè adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quàm hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ verò in usum sic deducentur.



Com-

tas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$, & proinde uniformis. Est autem (*per cor.* 1. *prop.* X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{\overline{1 + QQ}}$: quare si data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, data quoque erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1 + QQ}|^{n-1}$, & contra.

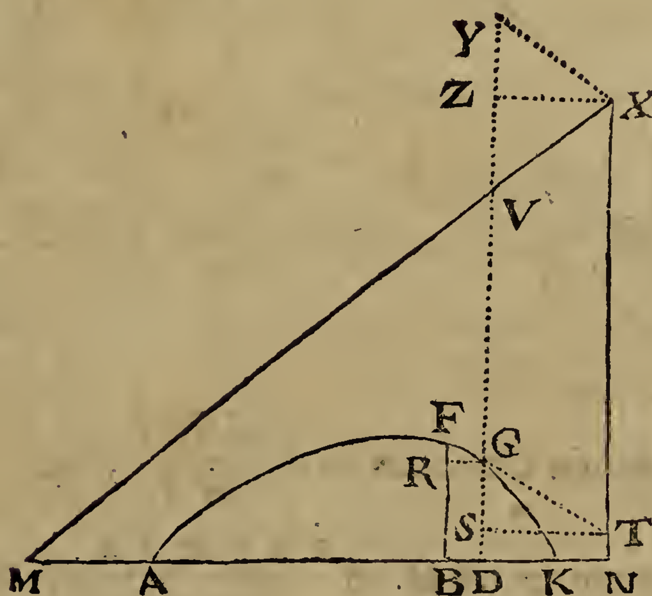
(z) * *Accedit ad hyperbolas hasce*, cum iis tamen perfecte convenire nunquam potest, quod in hisce hyperbolis densitas medii reciprocè proportionalis sit rectæ variabili X Y, & præterea non satis manifestum sit curvam, quam projectile in medio uniformi describit in hypothesi resistentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere asymptotum verticalem ut X N: cùm præsertim in hâc resistentiæ hypothesi spatium motu horizontali infito descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (*per cor.* 1. *prop.* V). Verum tamen inveniri possunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ A G K, quæ in rebus practicis necessaria est, recta X Y sit quam proximè constans, & proindè medii densitas quam proxime uniformis; quo fit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommodè adhiberi possint.

(a) * *Sed quæ circa verticem &c.* Hæc demonstrabuntur infra in notâ *h*.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & (b) recta GT tanget hyperbolam in G; ideoque densitas medii in G, est reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

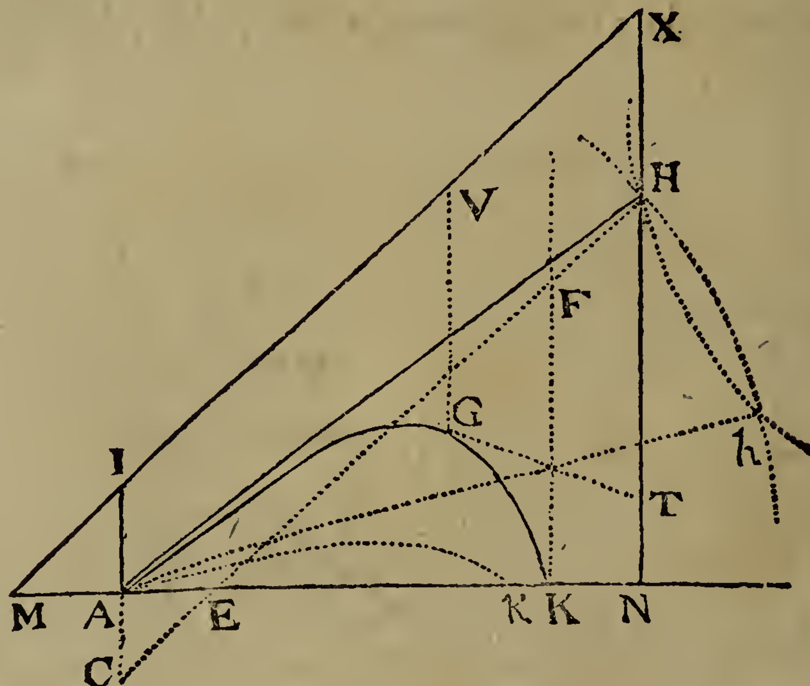
Proin-



(b) * *Et recta G T tanget hyperbolam in G.* Ex puncto G ad ordinatam B F per B ductam, & ex puncto T ad ordinatam D G demissa sint perpendicula G R & T S, sitque G T tangens in G. Erit F R ad R G seu B D, ut G S ad S T, ob triangula similia F R G, G S T. Sed F R est Q o seu $\frac{nbbO}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}O$, B D est O, & S T = Z X = A. Quare erit $\frac{nbb}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}$ ad 1, seu $\frac{nbb}{A^{n}} - \frac{d}{e}A$ ad A, ut G S ad Z X seu A. Supra invenimus Z Y = $\frac{nbb}{A^{n}} - \frac{d}{e}A$. Ergo Z Y = G S; & ideo tangens G T æqualis est & parallela rectæ Y X. Est autem (*ex demonstr.*) densitas medii in G reciprocè ut Y X: quare densitas medii in G est reciprocè ut tangens G T, velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, & resistentia ad gravitatem ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ G V. 120.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III

Proinde si corpus de loco *A* secundùm rectam *A H* projectum describat hyperbolam *A G K*, & *A H* producta occurrat asymptoto *N X* in *H*, actaque *A I* eidem parallela occurrat alteri asymptoto *M X* in *I*: erit (c) medii densitas in *A* reciprocè



ut *A H*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut *A H* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *A I*. Unde prodeunt sequentes regulæ.

Reg. (d) 1. Si servetur tum medii densitas in *A*, tum velocitas quâ-

(c) * *Erit medii densitas &c.* Coincidente puncto G cum A, tangens G T cùm tangente A H congruit, & recta V G cum A I, proindeque *medii densitas in A est reciprocè ut A H, & corporis &c.*

(d) * *Reg.* 1. Manentibus indice hyperbolæ n & densitate medii in A, manet tangentis longitudo A H quæ densitati reciprocè proportionalis est. Manente velocitate quâcum corpus è loco A projicitur, manet linea $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$ quæ est ut velocitas; & ideo cùm data sit A H, datur & A I. Ob parallelas G T, Y X, est T X = G Y = G V + V Y = G V + $n \times$ G V (*Exemp.* 4.), & quia coincidente puncto G cùm A, fit G V = A I, & T X = H X; erit H X = A I + $n \times$ A I. Quare ob datas quantitates A I & *n*, datur & H X. Unde si longitudines illæ A H, A I, & H X in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo N A H expedite determinari potest. His enim datis, dantur puncta A, H & I. Per H ducatur

X H N

quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expeditè determinari potest.

Reg. ([e]) 2. Si servetur tum angulus NAH, tum medii densitas in A, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; servabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.

Reg. ([f]) 3. Si tam angulus NAH, quàm corporis velocitas in A, gravitasque acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea minuetur AH in eâdem ratione, & AI minuetur in ratione illâ duplicatâ. ([g]) Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub

XHN recta horizontali AN Verticalis, & dabitur punctum N; & quia data est HX, dabitur etiam punctum X; datis verò punctis duobus X & I, dabitur recta XIM cum puncto M ubi horizontalem MN secat. Unde ductâ quâvis rectâ VD ad horizontalem AN normali, si in ea capiatur VG ad AI, ut est AN^n ad DN^n, vel ut XI^n ad XV^n, dabitur punctum G in trajectoria AGK. Est enim (*Exemplo* 4.) ordinata quævis VG ad alteram ordinatam IA, ut AN^n ad DN^n, seu ut XI^n ad XV^n.

(e) * *Reg.* 2. Servatâ medii densitate in A, servabitur tangentis longitudo AH, quæ est ut densitas inversè. Et quia velocitas in A est ut $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & velocitatis quadratum ut $\frac{AH^2}{AI}$, id est, ut $\frac{1}{AI}$ ob datam AH; erit AI velocitatis quadrato reciprocè proportionalis.

(f) * *Reg.* 3. Datâ corporis velocitate & gravitate acceleratrice in A, datur longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ tum velocitatis quadrato, tum lateri recto parabolæ (*Exemp.* 4.) proportionalis. Est autem resistentia motrix, si ita loqui fas est, ad gravitatem motricem, ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}\times AI$ (*Exemp.* 4.). Quare si proportio resistentiæ motricis in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacumque, augebitur proportio AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI, seu, ob datum numerum $\frac{2nn+2n}{n+2}$ augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione; & quia longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ constans est, ac proinde $\frac{AH}{AI}$ est ut $\frac{1}{AH}$, & AI ut AH^2, necessum est ut AH minuatur in ratione quâ augetur $\frac{AH}{AI}$, & ut AI minuatur in ratione illâ duplicatâ.

120. (g) 121. * *Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus &c.* Corpus specificè gravius vel levius dicitur, quod sub æquali

fub æquali magnitudine fit minor, vel medii denfitas major, vel refiftentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quàm pondus.

Reg. (h) 4. Quoniam denfitas medii prope verticem hyperbolæ major eft quàm in loco *A*; ut habeatur denfitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium *HT* ad tangentem *AH* inveniri, & denfitas in *A* augeri in ratione paulo ma-

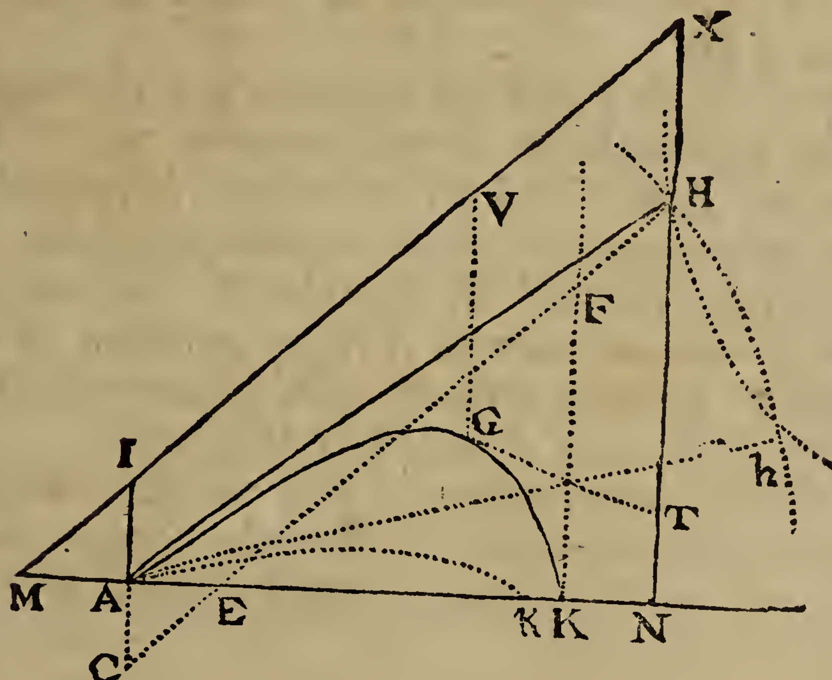
li volumine majus vel minus pondus habet quàm alterum corpus quocum comparatur; & ideo gravitas fpecifica corporis, volumine dato, eft ut ipfius pondus abfolutum, id eft, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis maffa (*per defin.* 7. *& not.* 3. *lib.* 1.). At, dato volumine, maffa eft ut denfitas (2. *lib.* 1.); quare gravitas fpecifica corporis eft ipfius denfitati proportionalis. Augetur itaque proportio refiftentiæ ad gravitatem motricem feu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ & velocitate ac medii denfitate, manenteque proinde refiftentiâ, gravitas fpecifica fit minor; tum ubi, cœteris paribus, medii denfitas augetur, quo cafu medii refiftentia crefcit cum denfitate, & corporis pondus in fluido denfiori & fpecificè graviori magis fublevati minuitur; tum ubi refiftentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quàm pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis & denfitatis accommodatam effe.

122. *Lemma.* Datâ curvâ A G K, invenire minimam tangentium G T. Quoniam (ex dem. in Exemp. 4.) $XY^2 = GT^2 = A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eB^{n-1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$; hujus quantitatis, in quâ fi detur curva A G K, fola eft variabilis *A*, fluxio ponenda eft nihilo æqualis (48). Brevitatis causâ dicantur $1 + \frac{dd}{ee} = f$, $\frac{2dnbb}{e} = 2g$, $nnb^4 = h$, & $A = x$; erit $GT^2 = fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}$; & fumptis fluxionibus, $0 = 2fxdx + \overline{n-1} \times 2gx^{-n}dx - 2nhx^{-2n-1}dx$. Dividatur æquatio tota per $2xdx$, & fiet $0 = f + \overline{n-1}gx^{-n-1} - nhx^{-2n-2}$; & multiplicando per x^{2n+2}, $fx^{2n+2} + \overline{n-1}gx^{n+1} = nh$, unde ervitur, ut fit in refolutione æquationum fecundi gradus, $x^{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}$; & hinc habetur $x = \left(\frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}\right)^{\frac{1}{n+1}}$. Quare fi loco *x* fubftituatur, hic ipfius valor in æquatione $GT = \sqrt{fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. E. I.

123. *Cor.* Si curva A G K fit hyperbola conica, erit index $n = 1$, & ideo $n - 1 = 0$, & $x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}$. Unde invenitur $GT^2 = f\sqrt[2]{\frac{h}{f}} - 2g + \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{f}}} = 2\sqrt[2]{hf} - 2g = \frac{2bb}{e}\sqrt{ee+dd} - \frac{2dbb}{e} = 2bb \times \frac{[\sqrt{ee+dd} - d]}{e}$. Quia vero (*Exemp.* 4.) $d : e = VZ : XZ = XN : MN$, ac proinde $dd : ee = XN^2 : MN^2$, & componendo $dd + ee : ee = XN^2 + MN^2$, feu $MX^2 : MN^2$, atque adeo $\frac{\sqrt{ee+dd}}{e} = \frac{MX}{MN}$, & $\frac{d}{e} = \frac{XN}{MN}$; erit $\frac{\sqrt{ee+dd} - d}{e} = \frac{MX - XN}{MN}$. Præterea (*Exemp.* 4.) eft $VG = \frac{bb}{DN}$, $AI = \frac{bb}{AN}$, & hinc $2\,AI \times AN = 2bb$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $GT^2 = \frac{2\,AI \times AN}{MN} \times \overline{MX - XN}$.

(h) * *Reg.* 4. Quoniam denfitas in loco quovis G eft reciprocè ut tangens G T, quæ prope verticem hyperbolæ minor eft quàm in loco A; manifeftum eft denfitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem effe quàm in loco A. Denfitas

jore quàm semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium *GT*.



(i) *Reg.* 5. Si dantur longitudines *AH*, *AI*, & describenda

sitas in loco A dicatur *K*, in loco G per quem ducitur tangentium minima G T, dicatur *B*; & erit *K* : *B* = G T : A H, & hinc $K+B : K = GT+AH : GT$, & $\frac{K+B}{2} : K = \frac{GT+AH}{2} : GT$. Esset autem $\frac{K+B}{2}$ densitas mediocris, si tangens A H foret omnium maxima, sicuti G T (hyp.) est omnium minima; & ideo, ut medii densitas ferè tanquam uniformis haberi posset, augenda esset densitas in A in ratione semisummæ tangentium $\frac{GT+AH}{2}$ ad minimam tangentium G T. Verùm quia tangens A H non est omnium maxima, sed tangentes aliæ ad partes curvæ versus *K* ductæ majores sunt; densitas in A augenda est in ratione paulo majore quàm semisummæ $\frac{GT+AH}{2}$ ad G T, ut medium tanquam uniforme ferè censeatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A densius supponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui nascuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur quam pro ratione curvæ A G K.

Interim liquet veram trajectoriam quam corpus in medio uniformi describit, circa verticem magis distare ab asymptotis, & in partibus à vertice remotioribus propius ad ipsas accedere quàm pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi descriptarum. Nam si e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & directione A H projiciatur corpus in medio cujus densitas uniformis æqualis sit densitati mediocri medii in quo describitur hyperbola A G K; ob majorem medii uniformis densitatem in A, qua corporis velocitas impressa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeoque prope verticem ab asymptotis magis distabit; & quia prope verticem est magis depressa, in partibus versus K à vertice remotioribus ad asymptotum N X propius accedet quàm hyperbola A G K; cum præsertim in medio uniformi spatium motu horizontali descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (*per cor.* I. *prop. V.*

(i) * *Reg.* 5. Si dentur longitudines AH, 125.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

da ſit figura *AGK*: produc *HN* ad *X*, ut ſit *HX* ad *AI* ut $n+1$ ad 1, centroque *X* & aſymptotis *MX*, *NX* per punctum *A* deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit *AI* ad quamvis *VG* ut XV^n ad XI^n.

Reg. (k) 6. Quò major eſt numerus n, eò magis accuratæ ſunt hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab *A*, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad *K*; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi hyperbola ſit hujus generis, & punctum *K*, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis *AN* per punctum *A* tranſeuntem, quæratur: occurrat producta *AN* aſymptotis *MX*, *NX* in *M* & *N*, & ſumatur *NK* ipſi *AM* æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diverſis *HAK*, *hAk*, inci-

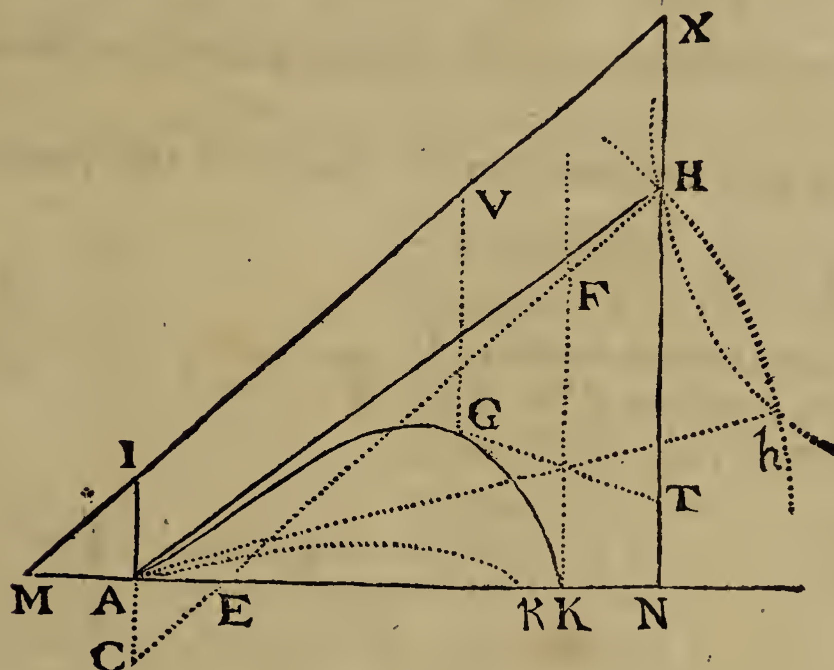
AH, AI cum angulo HAN, & deſcribenda ſit figura AGK: ex puncto H ad horizontalem AN demitte perpendiculum HN; produc HN ad X, ut ſit HX æqualis facto ſub $n+1$ & AI (demonſtravimus enim in notâ ad reg. 1. eſſe HX æqualem facto $\overline{n+1}\times AI$) centroque X & aſymptotis MX, NX per punctum A deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n: eſt enim (*per hyp. Exemp.* 4.) VG ad AI, ut AN^n ad DN^n, ſeu ut XI^n ad XV^n.

(k) * *Reg.* 6. Quo major eſt numerus n, eo magis hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi deſcriptas, & eo minus in deſcenſu ad K accuratæ ſunt; & contrà. Nam quò major eſt numerus n, eò minus tangens GT, quæ denſitati reciprocè proportionalis eſt, in aſcenſu corporis ab A variatur; & eo magis in deſcenſu ad K mutatur, quippe data ſit medii denſitas in A cum angulo projectionis HAN, & quantitas $\frac{n+2}{AH}$ denſitati in A (*Exemp.* 4.) proportionalis, data erit, ideoque tangens AH eo longior erit quò major fuerit numerus n; & quia dato angulo HAN, datur ſpecie triangulum rectangulum HNA, ratioque proinde laterum AH, AN, HN etiam datur, liquet quod creſcente AH aut numero n, creſcant quoque latera AN & HN. Ex demonſtratis in Exemplo 4°. corpore aſcendente tangentis GT quadratum $GT^2 = DN^2 + [ZV - nVG]^2$, & corpore deſcendente eſt $GT^2 = DN^2 + [nVG - ZV]^2$. Ex natura hyperbolæ AGK, eſt $DN^n : AN^n = AI : VG$, ideoque $nVG = \frac{nAI\times AN^n}{DN^n}$. Ex demonſtratione regulæ 1æ, $HX = \overline{n+1}\times AI$, & proinde $NX = HN + \overline{n+1}\times AI$, & $NX - AI = HN + nAI$. Sed ob triangula XZV, MNX; MAI ſimilia, ZX ſeu DN eſt ad ZV, ut MN ad NX, & ut MA ad AI, & diviſim DN eſt ad ZV, ut AN ad NX − AI ſeu HN + nAI; unde fit $ZV = \frac{DN\times HN + nAI\times DN}{AN}$.

Quarè in corporis aſcenſu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN\times HN + nAI\times DN}{AN}\ \frac{nAI\times AN^n}{DN^n}\right)^2$

&

ncidantque in planum horizontis in K & k; & notetur proportio AK ad Ak. Sit ea d ad e. Tum erecto cujusvis lon-

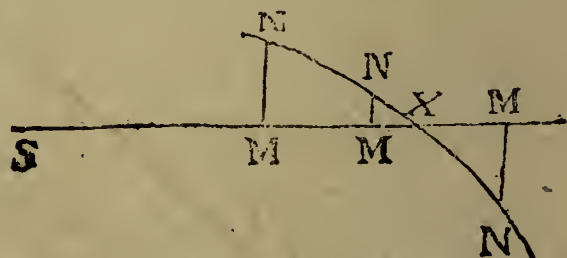


gitudinis perpendiculo AI, assume utcunque longitudinem AH vel Ah, & (¹) inde collige graphicè longitudines AK; Ak,

& in descensu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{nAI \times AN^n}{DN^n} \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}\right)^2$. Jam verò si numerus n satis magnus fuerit, lineæ AH, AN, HN tam in ascensu quam in descensu corporis longiores sunt, & in ascensu ab A est fere DN æqualis AN, in descensu verò DN quantum libet minor ipsâ AN. Unde in ascensu ab A est fere $\frac{nAI \times DN}{AN} = nAI$ & ideo $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN}{AN}\right)^2 = DN^2 + HN^2$ ferè. Est autem $AH^2 = AN^2 + HN^2$: quare ratio GT ad AH in ascensu corporis ab A est fere æqualitatis, dum numerus n satis magnus supponitur, ac proinde non multum variatur densitas: In descensu verò ad K, fit DN quantumlibet exigua respectu datæ AN, & ideo quantitas $\frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$ vehementer crescit, & hinc tangens GT multum variatur ubi numerus n magnus est. Contra fit, si numerus ille sit admodum exiguus. Porro cùm numerus n possit esse quilibet integer vel fractus, & in hyperbola conica sit n æqualis unitati, quæ veluti medium locum tenet inter numeros omnes integros & fractos, satis manifestum est hyperbolam conicam inter superiores omnes & inferiores hyperbolas mediocrem rationem tenere, & quia etiam cæteris simplicior est, posse loco veræ trajectoriæ in medio uniformiter denso adhiberi. Si igitur hyperbola AGK sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN, horizontalem vel horizonti obliquam, per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN asymptotis MX, NX, in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis, & habebitur punctum K (per theor. 1. de conicis).

(1) * *Et inde collige graphicè &c.* Datâ enim tangente AH, tum magnitudine tum positione, datur verticalis HN cum

A k; per reg. 6. Si ratio *AK* ad *A k* sit eadem cum ratione *d* ad *e*, (m) longitudo *AH* rectè assumpta fuit. Sin minus. cape in rectâ infinitâ *S M* longitudinem *SM* æqualem assumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus *A H* invenienda sunt plura puncta *N*, & per omnia agenda (n) curva linea regularis *NNXN*, secans rectam *S M M M* in *X*. Assumatur demum *A H* æqualis abscissæ *S X*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem *A I* & hanc ultimam *A H*, ut longitudo *A K* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudi-

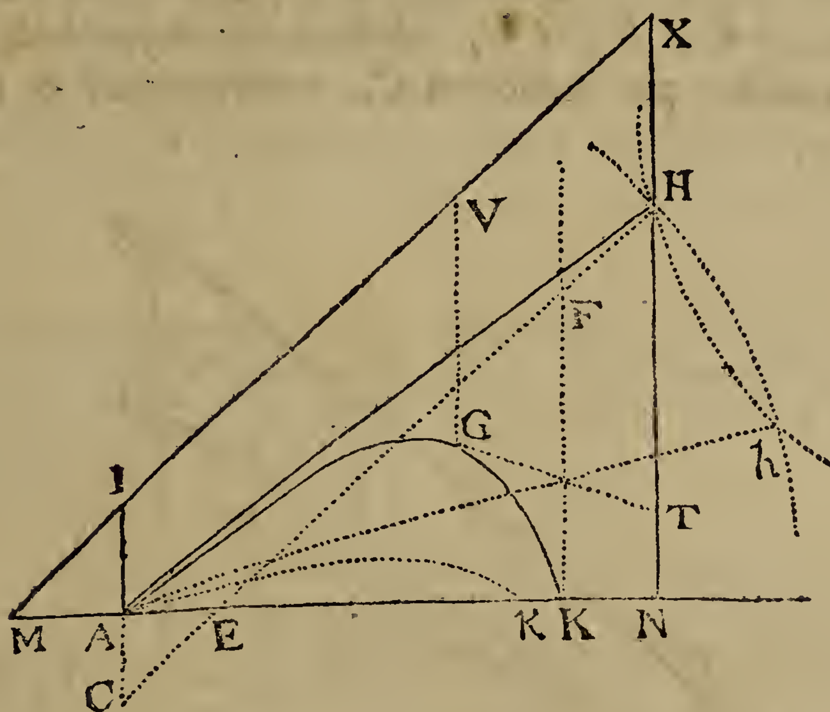


cum puncto N; & quia assumitur etiam A I, & est H X = 2 A I (per dem. reg. 1^æ.) ob $n = 1$; dabitur hyperbolæ centrum X, & inde ob datum punctum I dabitur asymptotus altera X I M cum puncto M in horizontali M N; & capiendo N K æqualem datæ M A, dabitur punctum K, & hinc longitudo A K obtinebitur. Eodemque modo invenietur altera longitudo A k.

(m) * *Longitudo A H rectè assumpta fuit.* Datâ medii densitate in A cum velocitate corporis sub diversis angulis H A K, h A k projecti, manet perpendiculum A I, & tangens A H æqualis est tangenti A h (*per regulam* 1^am). Datis tangente A H, angulo H A K & perpendiculo A I, hyperbola A G K describi potest (*per reg.* 6^am, *& notam præced.*) & ideo data est tum specie, tum magnitudine. Unde si dentur tantum angulus H A K & ratio tangentis H A ad A I, hyperbola A G K specie tantum dabitur; id est, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis describentur, similes erunt. Quare si in hyperbolâ A G K, quæ in chartâ descripta supponitur, tangens assumpta A H sit ad perpendiculum A I, ut tangens hyperbolæ quam corpus sub angulo æquali H A K projectum in medio resistente describit, est ad suum perpendiculum A I; hyperbola A G K in charta descripta similis erit hyperbolæ quæ in medio resistente describitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus est amplitudo A k, & tangens A h, manente perpendiculo A I, similis erit hyperbolæ illi quam corpus sub angulo æquali h A k, projectum in secundo experimento describit. Quâ propter, ob figurarum in chartâ & in medio resistente descriptarum similitudinem, amplitudines A K, A k erunt inter se ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis descriptæ sunt, id est, A K : A k = d : e.

(n) * *Curva regularis.* Vide notam 75. lib. hujus.

tudines AI & AH, (o) quas invenite oportuit. Hisce verò datis dabitur & resistentia medii in loco A, (p) quippe quæ sit ad vim gravitatis ut AH ad $\frac{4}{3}$ AI. Augenda est autem den-



sitas medii per reg. 4. & resistentia modo inventa, si (q) in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. Inventis (r) longitudinibus AH, HX; si jam deside-

(o) * *Quas invenire oportuit.* Cùm enim abscissâ S M longitudini assumptæ A H æqualis sit, & rationum differentia $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam M N; ubi sit S M = S X & proinde M N = o, est etiam $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e} = o$, & ideo $\frac{AK}{Ak} = \frac{d}{e}$, atque S X æqualis veræ longitudini assumendæ A H (*per not. præced.*). Si itaque ex datis perpendiculo A I & verâ longitudine inventâ A H cum angulo H A N quæratur, ut supra, longitudo A K; ob similitudinem figurarum in medio resistente & in chartâ descriptarum, erit longitudo A K experimento cognita ad longitudinem A K ultimo inventam in charta, ut longitudo A H in medio resistente ad longitudinem A H in chartâ ductam, atque etiam ut perpendiculum A I in medio resistente ad perpendiculum A I in charta assumptum. Quibus inventis, describi poterit hyperbola similis & æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio resistente descripsit.

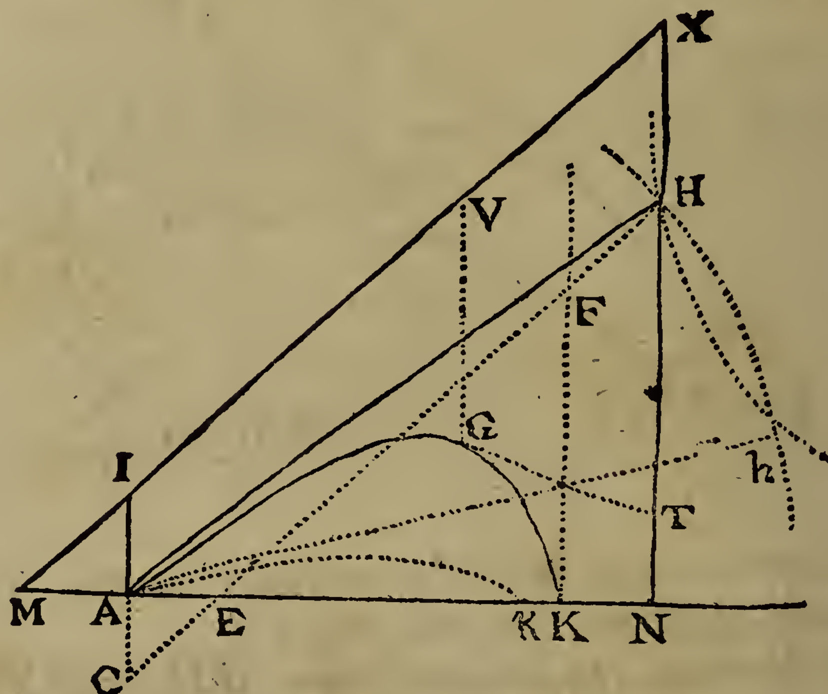
(p) * *Quippe quæ sit ad vim gravitatis &c.* Ex demonstratis in hoc scholio ante regulam 1am. resistentia est ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ A I, hoc est, ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I, ob $n = 1$ (per hyp.). 123.

(q) * *Si in eadem ratione augeatur.* Nam, datâ velocitate, resistentia est ut medii densitas.

(r) * *Inventis longitudinibus* AH, HX *&c.* Inventis enim (*per reg.* 7.) lineis A I & A H, datur linea H X, ut pote quæ æqualis est 2 A I, ob $n = 1$, (*reg.* 5.).

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

sideretur positio rectæ AH, secundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emissum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ $A\,C$, $K\,F$ horizonti perpendiculares, quarum $A\,C$ deorsum tendat, & æquetur ipsi $A\,I$ seu $\frac{1}{2}\,HX$. Asymptotis $A\,K$, $K\,F$ (ſ) describatur hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum C, centroque A & intervallo



$A\,H$ describatur circulus secans hyperbolam illam in puncto H; & projectile secundum rectam $A\,H$ emissum incidet in punctum K. *Q. E. I.* Nam punctum H, (t) ob datam longitudinem $A\,H$, locatur alicubi in circulo descripto. Agatur $C\,H$ occurrens ipsis AK & $K\,F$, illi in E, huic in F; & (u) ob parallelas $C\,H$, $M\,X$ & æquales $A\,C$, AI, erit $A\,E$ æqualis

(ſ) * *Describatur hyperbola* (346. lib. 1.)

(t) * *Ob datam longitudinem A H*, per reg. 1.am.

(u) * *Et ob parallelas C H, M X &c.* Nam si supponamus H esse punctum quæsitum, per quod ducenda est recta A H, erit (*per constr.*) H X æqualis & parallela I C, & ideo C H parallela I X seu M X, ac triangula C A E, I A M similia; proindeque cum sit C A = A I (*per constr.*) erit etiam A E = M A = K N, (*per theor.* 1. *de Conicis*). Sed ob triangula similia C A E, H N E, & ob parallelas K F, N H, est C E : A E = E H : E N = F H : K N. Cum igitur sit A E = K N, erit quoque C E = F H; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (*per theor.* 1. *de hyp.*)

lis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem, quòd hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in (^{x}) angulo quovis inclinata: (^{y}) quodque

(x) * *In angulo quovis inclinata.* Demonſtratio enim lineam M A K N per puncta data A & K ductam horizonti parallelam eſſe minime ſupponit, eademque prorſus manet ſi linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

(y) * *Quodque ex duabus interſectionibus.* Quoniam punctum H per interſectionem circuli cum hyperbola determinatur (*ex dem.*), & circulus hyperbolam in duobus punctis interſecare poteſt, ex duabus interſectionibus H, h duo prodeunt anguli, ſeu duæ ſunt poſitiones tangentis A H ſecundum quam projectile datâ velocitate emiſſum incidit in punctum K.

124. *Problema.* Inventis longitudinibus A I & A H, maximam altitudinem G D, ad quam corpus ſub angulo dato H A N projectum pertingere poteſt, definire.

Sit, ut in exemplo 3°. (*vid. fig. pag.* 93.) $BN = a$, $BD = o$, $NX = c$, ratio data VZ ad ZX, ſeu A I ad A M $= \frac{m}{n}$, $VG = \frac{bb}{a}$, ideoque $AI = \frac{bb}{AN}$, & $bb = AI \times AN$.

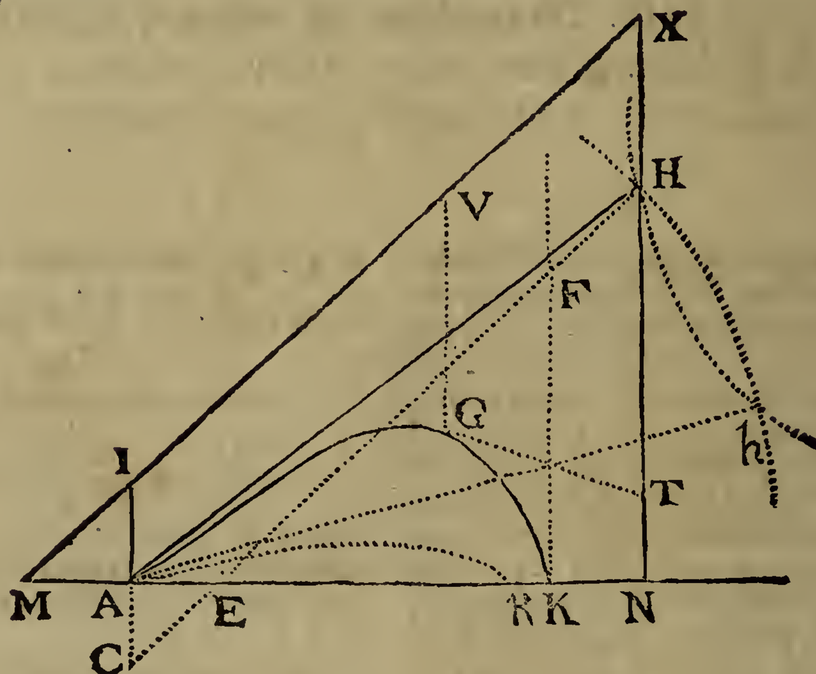
Et erit (*Exemp.* 3°.) $GD = c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ &c.; & $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{a}o = Qo$. Eſt autem Qo ut ordinatæ G D fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo æquanda eſt (48): quare erit $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$, & $aa = \frac{nbb}{m}$, ſive $DN^2 = \frac{AM \times AI \times AN}{AI} = AN \times AM$. Si ergo capiatur D N media proportionalis inter A N & A M, ducaturque per D ordinata G D, hæc erit omnium maxima. Quoniam verò $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$ & proinde $\frac{m}{n}a = \frac{bb}{a}$, erit maxima ordinata G D ſeu $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} = c - \frac{2bb}{a} = NX - \frac{2AI \times NA}{DN}$. 124.

Quare G D ordinata maxima æqualis eſt differentiæ inter verticalem N X & quartam proportionalem ad D N, A N & 2 A I. Q. E. I.

125. *Problema.* Datis longitudinibus A I & A H, angulum projectionis H A N maximæ omnium amplitudini A K convenientem invenire. Dicantur $AH = a$, $AI = b$, $HX = 2AI = 2b$, $AK = e$, $AN = x$, $HN = y$, & erit $x - e = KN = MA = AE$, ac $b = AI = AC$ (*per reg.* 8), proindeque $EN = AK = e$. Triangula ſimilia E A C, E N H hanc proportionem ſuppeditant, $AE\,(x-e) : EN\,(e) = AC\,(b) : HN\,(y)$, & componendo $x : e = b + y : y$, unde habetur $e = \frac{xy}{b+y}$, $x = \frac{be + ey}{y}$, & $xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$. Eſt etiam, ob angulum A N H rectum, $aa - yy = xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$, & hinc $aayy - y^4 = ee[b+y]^2$. Capiatur hujus æquationis fluxio, & amplitudinis maximæ e fluxione nihilo æquatâ (48), erit illa $2a^2ydy - 4y^3dy = 2ee[b+y]dy$, &, dividendo per $2dy$, $aay - 2y^3 = ee[b+y]$. Erat autem $e = \frac{xy}{b+y}$, & ideo $ee = \frac{xxyy}{[b+y]^2}$

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

que ex duabus interſectionibus *H*, *h* duo prodeunt anguli *NAH*, *NAh*; & quod in praxi mechanicâ ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam *CH* ita applicare ad



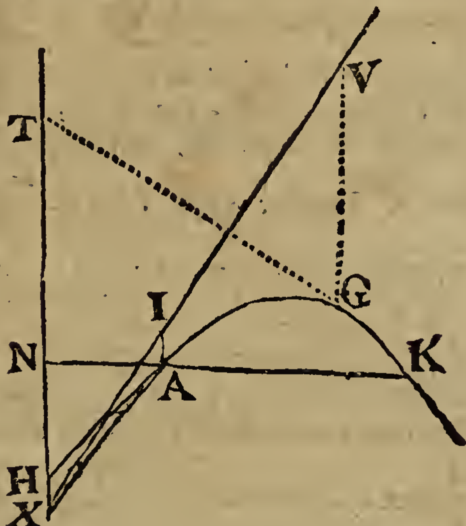
punctum *C*, ut ejus pars *FH*, circulo & rectæ *FK* interjecta, æqualis ſit ejus parti *CE* inter punctum *C* & rectam *AK* ſitæ.

Quæ

$= \frac{aayy - y^4}{[b+y]^2}$, ac proinde $ee(b+y) = \frac{aayy - y^4}{b+y}$. Quare erit $aay - 2y^3 = \frac{aayy - y^4}{b+y}$, ſive $aaby + aay^2 - 2by^3 - 2y^4 = aay^2 - y^4$, unde, reductione factâ & diviſis terminis per y, eruitur $aab = 2byy + y^3$. Hâc igitur æquatione reſolutâ, invenitur y ſeu HN ſinus anguli HAN, exiſtente ſinu toto AH. Q. E. D.

126. *Cor.* Manifeſtum eſt in æquatione $aab = 2byy + y^3$, quantitatem $2byy$ minorem eſſe quantitate aab, & proinde quadratum yy, ſeu HM^2, minus dimidio quadrato $\frac{1}{2}aa$ vel $\frac{1}{2}AH^2$; unde ſequitur angulum quæſitum HAN ſemirecto minorem eſſe, qui, ſi medium non reſiſteret, foret ſemirectus. Sit medii denſitas, adeoque & reſiſtentia, admodum parva, & erit ferè $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, atque $aab = 2byy + ayy\sqrt{\frac{1}{2}}$, & hinc $yy = \frac{aab}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}$, ac $y = a\sqrt{\frac{b}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, quàm proximè.

Quæ de hyperbolis dicta sunt facilè applicantur ad parabolas. Nam si $XAGK$ parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH; quarum XT parallela sit VG & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justâ cum velocitate projectum, describet hanc parabolam, si modò densitas medii, in locis singulis G, sit reciprocè ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in spatio non resistente in parabolâ conicâ verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\frac{2\,GTq}{nn - n \times VG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn - 2n}{n - 2}\,VG$. Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur parabolæ vertex X, & positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta G, (z) per quæ projectile transibit.



(z) *Per quæ projectile transibit.* Producatur V G ut horizontalem N K secet in D, & rectam X Z horizonti parallelam in Z. Pro B N, B D, N X scribantur A, O, e, respectivè; sitque M intersectio linearum X V, N K; & X N ad N M, sive ob 126.

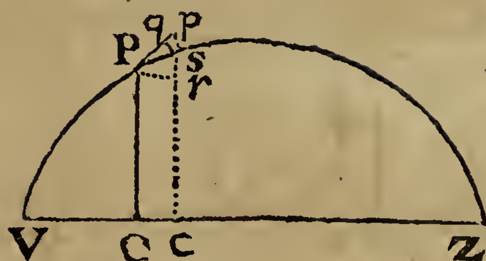
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

ob triangulorum X N M, V Z X similitudinem, V Z ad Z X vel D N ut d ad e; ideoque D N $= A + O$, & V Z $= \frac{d}{e} \times \overline{A+O}$. Quia vero V G est ut X V^n (per hypoth.), & V X est ad X Z, seu D N, in datâ ratione X N ad N M; erit etiam V G ut D N^n. Ponatur ergo V G $= \frac{DN^n}{bb} = \frac{\overline{A+O}^n}{bb} = \frac{A^n}{bb} + \frac{nA^{n-1}O}{bb} + \frac{n.n-1}{1.2}\,\frac{A^{n-2}}{bb}O^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,\frac{A^{n-3}}{bb}O^3 +$ &c., & erit G D $=$ V Z $-$ N X $-$ V G $= \frac{d}{e} \times \overline{A+O} - c - \frac{\overline{A+O}^n}{bb} = \frac{d}{e}A - c - \frac{A^n}{bb} + \frac{d}{e}O - \frac{nA^{n-1}}{bb}O - \frac{(nn-n)A^{n-2}}{2bb}O^2 - \frac{(n^3-3nn+2n)A^{n-3}}{6bb}O^3 -$ &c. Quare erit $Q = \frac{nA^{n-1}}{bb} - \frac{d}{e}$; $R = \frac{\overline{nn-n}A^{n-2}}{2bb}$, & $S = \frac{\overline{n^3-3nn+2n}A^{n-3}}{6bb}$. Per punctum B ducatur ordinata B g, ad quam demittatur ex G perpendiculum G r, sitque X Y æqualis & parallela tangenti G T; & ob triangula G r g, X Z Y similia, erit G r^2 ad G g^2 ut X Z^2 seu D N^2 ad X Y^2 vel G T^2; est autem G r$^2 = O^2$, r g$^2 = QQOO$, & ideo G g$^2 = OO \times \overline{1+QQ}$: quare cum sit etiam B N seu D N $= A$, erit G T$^2 = AA \times \overline{1+QQ}$, G T $= A\sqrt{1+QQ}$, & $\frac{GT}{A} = \sqrt{1+QQ}$. Per coroll. 1. prop. X. medii densitas in loco G est ut $\frac{S \times A}{R \times GT}$, & (*ex demonstratis*) $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3A}$, ideoque $\frac{S \times A}{R \times GT}$ est ut $\frac{n-2}{3GT}$; quare, ob datum numerum $\frac{n-2}{3}$, densitas est reciprocè ut tangens G T. Velocitas in G (*per prop.* X.) ea est, quâ cum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum G D, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente; & ideò cum sit $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^2}{A^2 R} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times \frac{A^n}{bb}} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times VG}$ (*ex dem.*), parabolæ latus rectum erit $\frac{2GT^2}{\overline{nn-n}.\,VG}$. Resistentia in G (*per cor.* 1. *prop.* X.) est ad vim gravitatis, ut $3S \times$ G T ad $4RR \times$ D N, id est, ut G T ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn-n}^2 \times A^{2n-3}}{b^4}$, & $3S = \frac{\overline{nn-n} \times \overline{n-2}}{2} \times \frac{A^{n-3}}{bb}$, atque ideo $\frac{4RR \times A}{3S} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times \frac{A^n}{bb} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Erit igitur resistentia ad gravitatem, ut G T ad

ad $\frac{2nn - 2n}{n - 2} \times$ V G. Velocitas in loco G (*per prop.* X.) eſt ut $\sqrt{\frac{1 + QQ}{R}} = \sqrt{\frac{2\,G T^2}{nn - n \times VG}}$, ideoque ob datum numerum $\frac{2}{nn - n}$, ut $\frac{G T}{\sqrt{VG}}$.

Quando igitur corpus eſt in A, medii denſitas eſt ut $\frac{1}{A H}$, & velocitas ut $\frac{A H}{\sqrt{A I}}$; unde manente tum denſitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, & mutato utcumque angulo N A H, manebunt A H, & $\frac{A H}{\sqrt{A I}}$, ac proinde A I. Quia porro $ZY^2 = XY^2 - XZ^2 = GT^2 - DN^2 = AA \times \overline{1 + QQ} - AA = AAQQ$, & ideo $ZY = Q \times A = \frac{nA^n}{bb} - \frac{d}{e}A = n VG - VZ$, atque $ZY + VZ = VY = n VG$; erit in loco A, $Iy = n \times AI$, & hinc $Ay = XH = nAI - AI$. Quare manente A I, manebit etiam H X, ob datum numerum $n - 1$. Inveniantur, uti regulâ 7â. pro hyperbolâ factum eſt, longitudines A H, A I & proinde H X; & inde dabitur punctum H, per quod ſi ducatur T H X ad horizontem perpendicularis, datâ X H, dabitur poſitio rectæ X I, &. ſumendo V G ad I A ut XV^n ad XI^n, dabuntur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile tranſibit.

Problema elegantiſſimum de inveniendâ trajectoriâ quam corpus in medio juxta duplicatam velocitatum rationem reſiſtente deſcribit, in ſuis Principiis prætermiſit NEWTONUS. Rem generaliter poſtea confecerunt Clariſſimi Mathematici *Joannes Bernoullius*, *Hermannus*, *&* *Eulerus*, qui trajectoriam a projectili deſcriptam in medio quod in quâlibet multiplicatâ velocitatum ratione reſiſtit, analyticè invenerunt. Horum veſtigiis inſiſtentes, tam elegans problema in noſtris commentariis deſiderari nolumus.



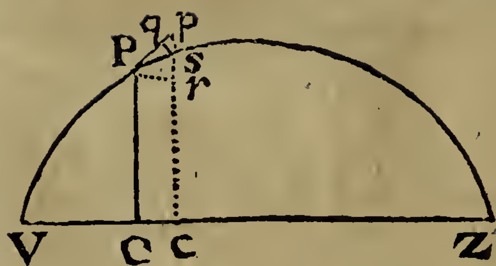
PROBLEMA.

127. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis V Z, determinare curvam V P p, quam deſcribit projectile in medio uniformi quod in multiplicatâ quâlibet velocitatum ratione reſiſtit. 127.

Ductis ordinatis verticalibus P C, p c infinitè propinquis, & ex puncto P ad p c perpendiculo P r; dicantur vis gravitatis $= g$, velocitas projectilis in loco P $= v$, reſiſtentia ibidem $= r = \frac{v^{2n}}{2a}$, ita ut ſit a quantitas conſtans quæ determinabitur ex determinatione reſiſtentiæ, ſit Tangens P p, arcus P s $= ds$, V C $= x$, P C $= y$, & ideo p r $= dy$, ac C c ſeu P r $= dx$; fluxio hæc dx conſtans ſupponatur. * Reſolvatur actio gravitatis quæ exprimitur per p s in actionem s q curvæ perpendicularem; & actionem p q, curvæ parallelam quæ in aſcenſu corporis illud retardat in deſcenſu accelerat, erit actio tota gravitatis ad ejus actionem quâ motum in curva retardat in aſcenſu & accelerat in deſcenſu ut eſt p s ad p q, & ob ſimilia triangula p q s, P p r, eſt p s ad p q ſicut P p ſive P s ad p r, ideoque P s (ds) ad p r (dy) ſicut gravitas tota g, ad $\frac{g\,dy}{ds}$ quæ eſt actio gravitatis ad retardandum corpus in aſcenſu, & quia in deſcenſu eſt p r $= -dy$, eſt $\frac{-g\,dy}{ds}$ actio gravitatis ad accelerandum corpus in deſcenſu; Unde tota retardatio corporis tam ex gravitate quam ex reſiſtentia orta, eſt $r + \frac{g\,dy}{ds}$ tam in aſcenſu quam in deſcenſu.

Decrementum autem velocitatis $- dv$; eſt ſemper ut vis retardans & tempus quo durante ea vis agit conjunctim, idque tempus eſt ſemper æquale arcui deſcripto P s

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. X. Probl. III.



ad velocitatem v applicato, hoc est, temporis incrementum $dt = \frac{ds}{v}$ unde velocitatis decrementum $-dv = \overline{r + \frac{gdy}{ds}} \times \frac{ds}{v} = -\frac{rds + gdy}{v}$, & quia ex Hypothesi $r = \frac{v^{2n}}{2a}$, est $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$; Ut autem obtineatur valor v, & dv expressione quæ ad curvam referatur, notandum quòd lineola ps sive $-ddy$ est spatiolum urgente gravitate tempore dt percursum, ideoque est ut vis gravitatis g per temporis quadratum multiplicata, ideoque est $-ddy = gdt^2 = \frac{gds^2}{v^2}$ (cum sit $dt = \frac{ds}{v}$) unde est $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ sive $-v^2 ddy = gds^2$, & fluxionem utrinque sumendo est $-v^2 d^3y - 2vddydv = 2gdsdds$, & cum lineolâ p q designet dds sitque P p sive Ps (ds) ad P r (dy) sicut p s ($-ddy$) ad p q (dds) est $dsdds = -dyddy$ unde hæc ultima æquatio fit $-v^2d^3y - 2vddydv = -2gdyddy$ & $-2vddydv = v^2d^3y - 2gdyddy$ & $-vdv = \frac{v^2d^3y}{2ddy} - gdy$, unde cùm inventum etiam fuerit $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$, est $\frac{v^2d^3y}{ddy} = \frac{v^{2n}ds}{a}$, & valorem inventum $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ substituendo, fit tandem $\frac{gds^2d^3y}{-ddy^2} = \frac{g^n ds^{2n+1}}{-addy^n}$ sive reductione factâ $ad^3y = \frac{g^{n-1}ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$.

Ut autem ex hâc æquatione eruatur æquatio inter dx, & dy, & inter x & y, designet p variabiles quascumque quæ in æquatione quæsita ita multiplicant fluxionem dx ut ea sit æqualis dy, sitque $dy = pdx$ & $dy^2 = p^2dx^2$, cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit $ds^2 = dx^2 + p^2dx^2 = \overline{1+p^2} \times dx^2$, & $ds = dx\sqrt{1+pp}$ unde $ds^{2n-1} = dx^{2n-1} \times \overline{1-pp}^{\frac{2n-1}{2}}$.

Præterea cùm dx constans supponatur erit $dy = pdx$, $ddy = dxdp$, & sumpta fluxione erit & $d^3y = dxddp$. Et si tandem q designet variabiles quæ ita multiplicant fluxionem dx, ut ea fiat æqualis dp, sitque $qdx = dp$ erit $dxdq = ddp$ & $dx^2dq = dxddp = d^3y$, & æquatio proposita in hanc vertetur $adx^2dq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1-pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dxdp^{n-2}} = \frac{g^{n-1}dx^{n+1}\times\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$, & diviso utroque termino per dx^2, erit $adq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1}\times\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$. Denique loco dx posito ejus valore $\frac{dp}{q}$ erit $adq = \frac{g^{n-1}dp^{n-1}\times\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}dp^{n-2}}$ sive $adq = \frac{g^{n-1}\times\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\times dp}{q^{n-1}}$, hoc est $aq^{n-1}dq = g^{n-1}\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, quæ est æquatio fluxionalis inter dp & dq, ex quâ per curvarum quadraturam obtinebitur æquatio inter p & q & inde inter x & y, ut id ipsum nunc exponemus, summando enim terminos æquationis $aq^{n-1}dq = g^{n-1} \times \overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$ habetur $\frac{aq^n}{n} = g^{n-1} \times S\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, hoc est $q = \sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a} \times S\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp}$, unde fit curva cujus

jus abscissa qualiscumque A P sit $= p$, sitque ejus ordinata P N semper æqualis $\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$, erit area A B P N $= S\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\,dp$, ducatur ergo ab altera parte P ordinata P O talis ut sit semper æqualis $\frac{1}{\sqrt{\frac{ng^{n-1}}{a}} \times \text{ABPN}}$ erit ea P O æqualis $\frac{1}{q}$; cùmque sit $dx = \frac{dp}{q} = \frac{1}{q} \times dp$, erit (summando) $x = S\frac{1}{q} \times dp$ sive æqualis area A C P O.

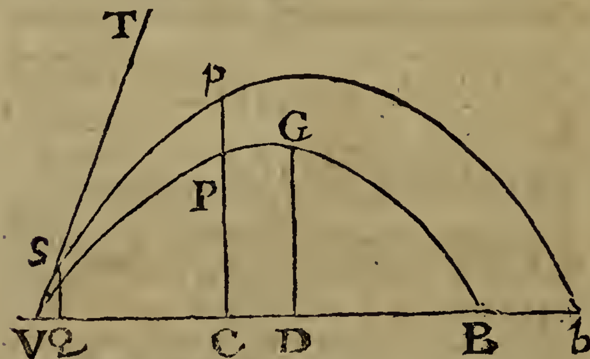
Denique cùm sit $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{q} = \frac{p}{q} \times dp$ & summando $y = S.\frac{p}{q} \times dp$ ideo si è puncto P versus originem A sumatur P I æqualis unitati, ductaque I O, ducatur ipsi parallela A Q ab origine curvæ quæ secet P O productam in Q, erit $1 : \text{PO}$ (sive $\frac{1}{q}$) $=$ AP (sive p) : PQ $= \frac{p}{q}$, itaque area curvæ A P Q erit $S.\frac{p}{q}\,dp$ ac per consequens æqualis y, ergo datis curvarum A C P O, & A P Q quadraturis datur ratio x ad y, & ex earum ordinatis ratio dx ad dy: sed ut habeatur origo a quâ sumi debent illarum arearum portiones, sumendum est id punctum in quo P O est ad P Q ut Cosinus anguli jactus cum Horizonte sub quo corpus moveri incepit ad ejus anguli sinum; quippe ea fuit ipso motus initio ratio elementorum dx & dy; sique ille cosinus dicatur c, & sinus s, erit in ea origine $c : s = \frac{1}{q} : \frac{p}{q}$, unde si sumatur A R sive $p =$ 127.
$\frac{s}{c}$ erit ejus extremitas R origo arearum quarum valor rationem quæsitarum x & y exhibebit. †

128. *Cor.* 1. Quoniam invenimus $v^2 = \frac{-g\,ds^2}{ddy}$, $ds^2 = dx^2(1+pp)$, & $ddy = dx\,dp$; erit $v^2 = \frac{-g\,dx(1+pp)}{dp}$; sed $dp = q\,dx$; quare erit $v^2 = \frac{-g(1+pp)}{q}$. Præterea (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} = \frac{dp\sqrt{1+pp}}{qv}$, & $v = \sqrt{\frac{-g(1+pp)}{q}}$; quare erit $dt = \frac{dp}{\sqrt{-gq}}$, & $t = S.\frac{dp}{\sqrt{-gq}}$. Invenietur itaque tùm velocitas corporis in loco P trajectoriæ V P p, tum tempus t quo arcus V P describitur.

129. *Cor.* 2. Si in æquatione generali supra reperta, $a\,d^3y = \frac{g^{n-1}\,ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$, ponatur $n = 1$, seu resistentia velocitatis quadrato proportionalis; æquatio in hanc migrabit $a\,d^3y = ds\,ddy$; & ponendo $dy = p\,dx$, ac $dx = \frac{dp}{q}$, invenietur $aq = S.dp\sqrt{1+pp}$, $x = S.\frac{dp}{q} = S.\frac{a\,dp}{S.dp\sqrt{1+pp}}$, $y = S.\frac{p\,dp}{q} = S.\frac{ap\,dp}{S.dp\sqrt{1+pp}}$, $vv = \frac{-ag(1+pp)}{S.dp\sqrt{1+pp}}$, & $t = S.\frac{a^{\frac{1}{2}}\,dp}{\sqrt{-gS.dp\sqrt{1+pp}}}$. Est autem $S.dp\sqrt{1+pp}$ area hyperbolæ æquilateræ, cujus abscissa est p & ordinata ducta perpendiculariter ad axem con-

conjugatum $\sqrt{1+pp}$, semiaxis verò unitas. Unde invenietur q in p per hujus hyperbolæ aream; at abscissa x obtinebitur per aream curvæ cujus est abscissa p & ordinata $\frac{1}{q}$; & correspondens ordinata y definietur per aream curvæ, cujus abscissa est p & ordinata $\frac{p}{q}$. Ex quibus manifestum sit veræ trajectoriæ V P Z descriptionem adeo perplexam esse, ut ex illa vix quidquam ad usus philosophicos aut mechanicos accommodatum possit deduci.

130. *Coroll.* 3. Quoniam posito $n=1$, resistentia medii est $\frac{v^2}{2a}$ (127), & ubi resistentia fit gravitati æqualis, id est, ubi v æqualis est velocitati terminali, habetur $\frac{v^2}{2a}=g$, & $u^2=2ag$, ideò (30. *lib.* 1.) a est altitudo ex quâ corpus in medio non resistente vi constante g sollicitatum caderet ut velocitatem terminalem acquirat.



131. *Coroll.* 4. Si in hypothesi corollarii secundi resistentia parva fuerit qualem ferè experitur globus ferreus non parvus magnâ satis velocitate per aera projectus, trajectoria V P B, quam globus ille in medio resistente describit, non multùm aberrat a Parabolâ conicâ V p b, quam eâdem urgente vi gravitatis uniformi g seu 1 describeret. Quia tamen resistentia velocitatem projectionis minuit, ordinata C P, ad trajectoriam V P B, in medio resistente paulò minor erit quam ordinata C p ad parabolam conicam V p b. Porrò si abscissa V C dicatur x, ordinata C p dicatur z, amplitudo V b, h, & proindè C b, $h-x$, erit (ex naturâ parabolæ) rectangulum sub abscissis V C × C b, seu $hx-xx$, æquale rectangulo ordinatæ C p, vel z in datam quantitatem l, & ideò æquatio erit $z=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}$. Cùm igitur ordinata C P (quæ dicatur y) paulò minor sit quam C p, seu z, ponatur $y=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}-ex^3$, & æquatio ista in quâ est e quantitas exigua, naturam trajectoriæ V P B exponere poterit quam proximè; loco $\frac{h}{l}$, & $\frac{1}{l}$, scribantur b & c ut æquatio sit $y=bx-cx^2-ex^3$. Ut jam determinentur coëfficientes b, c, e, capiantur æquationis fluxiones, prima, secunda & tertia, factâ dx constante, erunt illæ $dy=bdx-2cxdx-3ex^2dx$; $ddy=-2cdx^2-6exdx^2$, $d^3y=-6edx^3$. Coincidentibus punctis V & C, fit $x=0$, & ideo $dy=bdx$, $ddy=-2cdx^2$ & $d^3y=-6edx^3$. Ex æquatione $dy=bdx$, deducitur proportio $dx:dy=1:b$; & coincidente C cum V, dx est ad dy ut sinus totus V Q ad tangentem Q S, anguli projectionis T V Q; Quare si sinus totus dicatur 1, erit b tangens anguli projectionis, & ideò dato hoc angulo datur b. Si velocitas cum quâ corpus è loco V projicitur sit v, & f, altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g, in spatio non resistente cadendo acquirit velocitatem illam v, erit $2gf=vv$ (18. 19. 20. *hujusce lib.*) sed (30) $vv=-\frac{gds^2}{ddy}$, ideoque $2gf=-\frac{gds^2}{ddy}$; & $2f=-\frac{ds^2}{ddy}$; Est autem $ds^2=dx^2+dy^2=dx^2+bbdx^2$, & $ddy=-2cdx^2$ in loco V, (ex dem.). Quarè erit $2f=\frac{1+bb}{2c}$, & hinc $c=\frac{1+bb}{4f}$. Cùm igitur quantitates b, & f, datæ sint, data erit c. Invenietur quantitas tertia e, per æquationem $ad^3y=dsddy$ (129) & per æquationes suprà repertas $ds=dx\sqrt{1+bb}$, $ddy=-2cdx^2$, & $d^3y=-6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3=-2cdx^3\sqrt{1+bb}$, & hinc $e=\frac{c\sqrt{1+bb}}{3a}=\frac{1+bb\times\sqrt{1+bb}}{12af}$. Tota igitur æquatio assumpta $y=bx-cx^2-ex^3$ fit $y=bx-x^2\times\left(\frac{1+bb}{4f}\right)=$

$x^3\times$

$x^3 \times \left(\frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}\right)$ in quâ datâ velocitate terminali datur a, (130). Poterit etiam linea a, per experimentum reperiri; Nam si e loco V sub angulo dato T V B datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio supposito & observetur amplitudo jactûs V B, quæ dicatur A, in æquatione ad trajectoriam V P B, loco x, scribatur A, & loco y, scribatur o, quia ordinata C P, seu y evanescit in B invenietur $o = bA - AA \times \frac{(1+bb)}{4f} - A^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$; undè deducitur $a = AA \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12fb - 3A \times (1+bb)}$.

132. *Coroll.* 5. Jactûs amplitudo V B, invenitur, factâ $y = o$, undè eruitur $xx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} + x \times \frac{(1+bb)}{4f} = b$, & $VB = x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4+4bb} + \frac{12afb}{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}\right)}$.

133. *Coroll.* 6. Maxima jactûs altitudo D G reperitur, sumptâ æquationis ad trajectoriam V P B, fluxione & factâ $dy = o$ (48); fit enim $o = bdx - 2xdx \times \frac{1+bb}{4f} - 3x^2dx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$ undè deducitur $VD = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4af.b^{\frac{3}{2}}}{1+bb}}$. Quo valore loco x, in æquatione ad trajectoriam substituto, obtinebitur y, seu maxima altitudo D G.

134. *Coroll.* 7. Ut determinetur tangens anguli T V B, sub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P transibit, loco x & y in æquatione ad trajectoriam scribantur datæ V C & V P, atque hinc eruatur valor tangentis b; dicatur $VC = p$, $CP = q$, & erit $q = bp - pp \times \frac{\sqrt{1+bb}}{af} - p^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Si medii densitas infinitè parva esset, altitudo a foret infinita (130), & idcircò $q = bp - pp \times \frac{1+bb}{4f}$. Inveniatur per hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k, & in æquatione superiori loco $(1+bb)^{\frac{3}{2}}$, scribatur $(1+bb) \times \sqrt{1+kk}$ & illa in hanc abibit $q = bp - pp \times \frac{(1+bb)}{af} - p^3 \times \overline{1+bb} \times \frac{\sqrt{1+kk}}{12af}$, quæ cum sit duarum dimensionum facilè suppeditabit valorem ipsius b, quamproximè. 134.

135. *Coroll.* 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, si in æquatione corollarii 5. in quâ x exponit quamlibet amplitudinem V B, sumatur tangens b variabilis & sumptis fluxionibus ponatur $dx = o$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1 - 2bb)^2 = 3ab \times (1-bb) \times \sqrt{1+bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis est b, sinus totus 1, & proindè secans $\sqrt{1+bb}$; si ejusdem anguli sinus dicatur s, erit $\sqrt{1+bb} : b = 1 : s$, adeóque $1+bb : bb = 1 : ss$, & dividendo $1 : bb = 1 - ss : ss$, atquè ità $bb = \frac{ss}{1-ss}$, & $b = \frac{s}{\sqrt{1-ss}}$. Loco b substituatur $\frac{s}{\sqrt{1-ss}}$ in æquatione modo inventâ & illa in hanc mutabitur, $4f \times \frac{(1-3ss)^2}{(1-ss)^2} = 3as \times \frac{(1-2ss)}{(1-ss)^2}$, hoc est, $4f \times (1-3ss)^2 = 3as \times (1-2ss)$. Ex quâ æquatione, si eruatur valor sinûs s dabitur angulus quæsitus. Per approximationem ità potest obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; Nam si trajectoria in medio non resistente describeretur, angulus T V B foret semirectus, & proindè sinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum sit sinus totus $= 1$; & ideò in medio valdè raro est ferè $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1-3ss)^2 = (1-2ss) \times 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè resolvetur ad instar æquationis duarum dimensionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; adeòque angulus projectionis semirecto paulò minor.

136. *Coroll.* 9. Si medium esset paulò densius, assumenda foret æquatio ad tra-

trajectoriam, $y = bx - xx \times \frac{(1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bbb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem ità determinatur valor coefficientis h. Pro coefficientibus datis $\frac{1+bb}{4f}$, $\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af}$. scribantur c, e, ut fit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, & sumptis ut suprà (131) fluxionibus primis, secundis & tertiis, factà dx, constante, invenietur (129) $\frac{ad^3y}{ds\,ddy} = 1 = \frac{6ae + 24ahx}{(2c + 6ex + 12hx^2)} \times \frac{1}{\sqrt{1+bb - 4bcx + 4ccx^2 - 6bex^2 \,\&c.}}$ $= \frac{6ae + 24ahx}{\overline{2c + 6ex} \times \sqrt{1+bb} - \frac{2bcx}{\sqrt{1+bb}}}$ neglectis terminis ubi x^2 occurrit & extracta Radice per formulam *Newtonianam*. Ut autem hæc quantitas constans sit & æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae + 24ahx$, & denominatore $2c\sqrt{1+bb} + 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$ ponendi sunt æquales, id est, $6ae = 2c\sqrt{1+bb}$, & $24ahx = 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$. Ex his suppositionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af}$, & $h = e\frac{\sqrt{1+bb}}{4f} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1+bb}} = \frac{(1+bb)^2}{48\,a^2f} - \frac{b \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96\,aff}$. Quarè æquatio assumpta erit $y = bx - x^2 \times \frac{(1+bb)}{af} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af} - x^4 \times \frac{(1+bb)^2}{48\,a^2f} + x^4 b \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96\,aff}$. Et eodem modo determinarentur coefficientes in æquationibus plurium terminorum seu ad parabolas superiorum generum.

137. *Coroll.* 10. Si resistentia medii uniformis, partim constans supponeretur & partim velocitatis quadrato proportionalis, posset etiam trajectoria VPB quamproximè definiri. Sit enim resistentiæ pars uniformis $= \frac{1}{2}kg$, & resistentia tota $r = \frac{kg}{2} + \frac{v^2}{2a}$, & erit (28) $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} + \frac{v^2 ds}{2a} = -v\,dv$ & (30) $v^2 = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$; adeóque (127) $v\,dv = -g\,dy + \frac{g\,ds^2 d^3y}{2\,ddy^2}$, his valoribus loco v^2 & $v\,dv$, in priori æquatione substitutis fit $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} - \frac{g\,ds^3}{2a\,ddy} = g\,dy - \frac{g\,ds^2 d^3y}{2\,ddy^2}$, ideóque $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Jam si resistentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoriam VPB, $y = bx - cx^2 - ex^3$, & factâ dx, constante, capiantur fluxiones primæ, secundæ & tertiæ quæ coincidente puncto C, cum V, erunt $dy = b\,dx$, $ddy = -2c\,dx^2$, & $d^3y = -6e\,dx^3$ (131); undè invenitur ut (in coroll. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, existente sinu toto 1, & $c = \frac{1+bb}{4f}$, ubi f est altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g cadendo in spatio non resistente acquirit jactûs velocitatem. Quantitas e determinabitur per æquationem $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Nam si in illâ loco ds, ddy, d^3y, substituantur ipsorum valores $dx \times (1+bb)^{\frac{1}{2}} - 2c\,dx$, & $-6e\,dx^3$, erit $k = -\frac{(1+bb)}{2ac} + \frac{3e \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{2cc}$; undè eruitur $e = \frac{2kcc}{3 \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3a} = \frac{k \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24\,ff} + \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af}$. Quapropter æquatio assumpta in hanc abit $y = bx - \frac{xx \times (1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af}$,

$-x^3k$

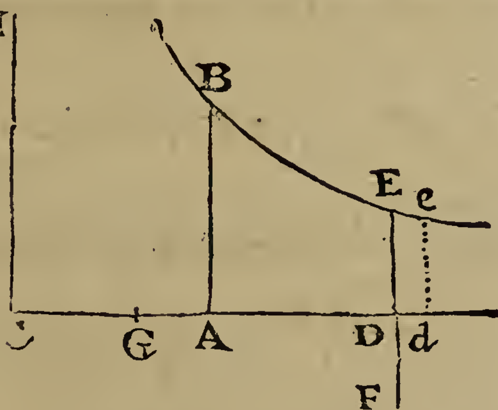
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione geometricâ.

Centro C, asymptotis rectangulis $CADd$ & CH, describatur hyperbola BEe, & asymptoto CH parallelæ sint AB, DE, de. In asymptoto CD dentur puncta A, G: Et si tempus exponatur per aream hyperbolicam $ABED$ uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem DF, cujus reciproca GD unâ cum datâ CG componat longitudinem CD in progressione geometricâ crescentem.



Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quàm minimum, & (a) erit Dd reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (b) per hujus

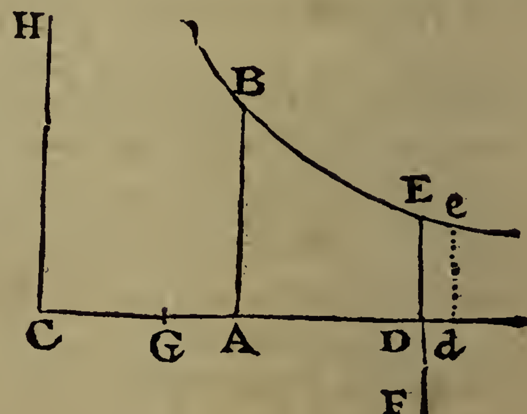
$-x : k \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff}$, & quantitates a & k, ex phænomenis poterunt determinari ut suprà (131.).

(a) * *Et erit D d reciprocè ut D E.* Est enim areola evanescens D E e d æqualis rectangulo D E × D d, quod, ob datum temporis incrementum, erit ut quantitas data, & ideò D d, est ut quantitas data divisa per D E, id est, reciprocè ut D E; sed (*per theor. 4. de hyperb.*) datum est rectangulum C D × D E, proindè C D, est reciprocè ut D E; quarè erit D d directè ut C D. 137.

(b) * *Per hujus Lemma* 2. Cas. 4.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. III. Prop. XI. Theor. VIII.

hujus lem. 11.) est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam (c) decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$: (d) proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ CG augeatur; summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, (e) crescet in progressione geometricâ. *Q.E.D.*



Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD (f) reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Co-

(c) *Nam decrementum velocitatis*, dato temporis momento, *est ut resistentia* (15).

(d) * $\frac{1}{GD}$. *Ob analogum decrementum est ut velocitas*. Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decrementa dato tempusculo producta analoga sint, eorum incrementorum vel decrementorum summæ seu fluentes ipsæ ab eodem initio sumptæ, sunt analogæ (*per Cor. Lem.* 4. *lib.* 1.).

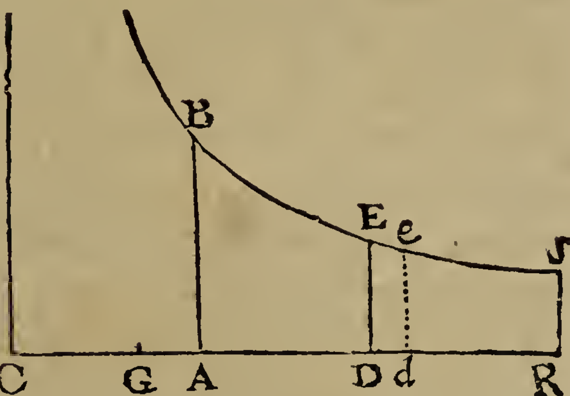
(e) * *Crescet in progressione geometricâ* (380. lib. 1.).

(f) * *Exponi potest velocitas per ipsius* GD

(g) *Corol.* 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis $ABED$, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quòd si spatia descripta sumantur in progressione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progressione geometricâ.



In asymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS; quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per aream hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum datâ CG componit longitudinem CD in progressione geometricâ decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in arithmeticâ.

(h) Etenim ob datum spatii incrementum $EDde$, lineola Dd, quæ decrementum est ipsius GD, erit reciprocè ut ED, ideoque directè ut CD, hoc est, ut summa ejusdem GD & lon-

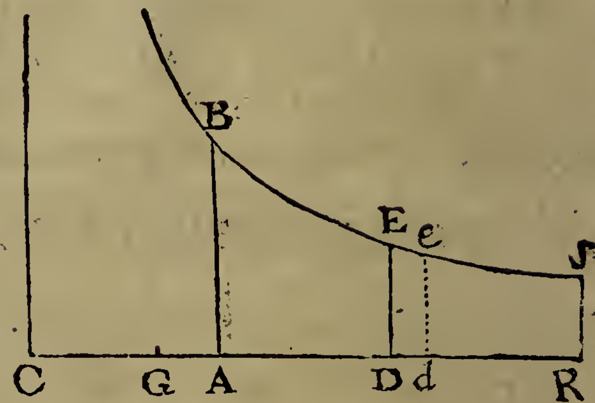
GD reciprocam $\frac{1}{GD}$. Undè patet velocitatem nonnisi tempore infinito extingui posse, * erit enim $\frac{1}{GD} = 0$, sive velocitas nulla ubi GD erit infinita, tunc autem area BADE quæ tempus exprimit infinita etiam est, ex naturâ Hyperbolæ.

(g) * *Coroll.* 2. Punctum A ad arbitrium assumitur in asymptoto CR & assumpto etiam quovis puncto D ut area ABED tempus datum exponat, ità determinandum est punctum G, ut sit GA ad GD, ut velocitatis reciproca sub initio ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis ABED, quod per coroll. 1. liquet. Invento autem puncto G, ex dato quovis alio tempore quod v. gr. sit ad tempus primò datum ut area ABSR, ad aream ABED, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut GR, seu quæ erit ad velocitatem sub initio in A, ut GA ad GR datam. 137.

(h) * *Etenim ob datum spatii incrementum*, per hypothesim quâ spatia supponuntur in arithmeticâ progressione crescere.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. III. Prop. XII. Theor. IX.

longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciprocè proportionali, quo data spatii particula *DdeE* describitur, est (i) ut resistentia & tempus conjunctim, id est directè ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inversè ut velocitas; ideoque directè ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analoga decrementa, (k) analogæ semper erunt quantitates decrescentes; nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, spatium descriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *GR* ad *GD*, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis *RSED* descriptum. (l) Invento autem puncto *G*, datur spatium ex datâ velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cùm (*per prop.* XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propositionem detur spatium ex datâ velocitate; dabitur spatium ex dato tempore: & contra.

PRO-

(i) * *Est ut resistentia & tempus conjunctim.* Velocitatis decrementum est ut resistentia & tempus conjunctim (15), tempus verò est ut incrementum spatii directè & velocitas inversè, adeóque dato spatii incremento ut velocitas inversè. Quarè dato spatii incremento, velocitatis decrementum est ut resistentia directè & velocitas inversè, id est, directè ut summa duarum quantitatum &c.

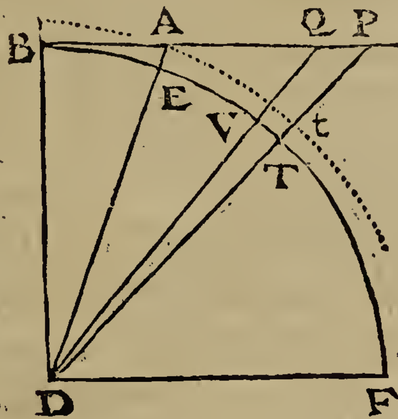
(k) * *Analogæ semper erunt* &c. (Per cor. lem. 4. lib. 1.).

(l) * *Invento autem puncto G, &c.* Si enim velocitas data, sit ad velocitatem sub initio ut G A ad G R, dabitur punctum A, & hinc dabitur area A B S R, seu spatium descriptum. Et contrà dato spatio, sive datâ areâ A B S R, dabitur punctum A, & indè velocitas G A. Ex his autem patet spatium finitum infinito tempore describi; ubi enim punctum D coincidit cum puncto G, velocitas omnis extinguitur, & spatium descriptum exponitur per aream finitam quam ordinata R S.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectâ ascendit vel descendit; & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primò quòd corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis DB describatur circuli quadrans $BETF$, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, semidiametro DF parallela. In eâ detur punctum A, & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cùm resistentiæ pars altera sit ut velocitas, & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota ut AP *quad.* + 2 BAP. Jun-

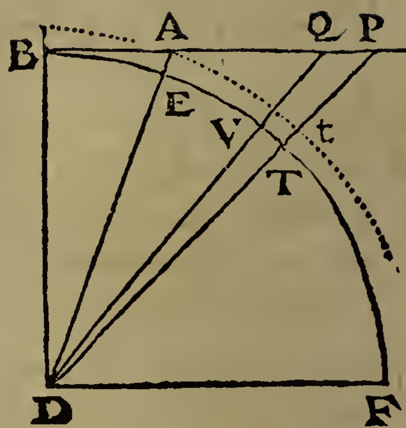


R S abscindit cum alterâ ordinatâ per G ductâ; velocitas verò nonnisi infinito tempore potest evanescere (*per cor.* 1. *prop. XI.*).

138. *Schol.* Eadem per analysim facilè inveniuntur. Dicantur resistentia r celeritas initialis c, spatium descriptum s, tempus t, velocitas residua v, ponaturque $r = \frac{av + vv}{b}$, erit (16, 17) $r\,ds = -v\,dv$, seu $av\,ds + vv\,ds = -b\,v\,dv$, & hinc $ds = -\frac{b\,dv}{a+v}$, atque adeò $s = Q - b \times L.\overline{a+v}$; quia verò ubi $s = 0$ fit $v = c$, invenitur constans $Q = b \times L.\overline{a+c}$, & ideò $s = b \times L.\frac{a+c}{a+v}$. Sit $L.h = 1$, & erit $\frac{s \times L.h}{b} = L.\frac{a+c}{a+v}$, ac $h^{\frac{s}{b}} = \frac{a+c}{a+v}$; undè eruitur $v = \frac{a+c}{h^{\frac{s}{b}}} - a$; Quarè dato spatio datur velocitas & contrà. Cùm autem sit 131.

(13) $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{b\,dv}{av+vv} = \frac{b}{a} \times \frac{dv}{a+v} - \frac{b}{a} \times \frac{dv}{v}$, erit $t = Q + \frac{b}{a} \times L.\overline{a+v} - \frac{b}{a} \times L.v = Q + \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v}$, & posito $t = 0$ & $v = c$, fit $Q = -\frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, adeóque $t = \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v} - \frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, & hinc $t = \frac{b}{a} L.\frac{ac+cv}{av+cv}$, & $h^{\frac{at}{b}} = \frac{ac+cv}{av+cv}$; unde eruitur $v = \frac{ac}{ah^{\frac{at}{b}} + ch^{\frac{at}{b}} - c}$. Dato igitur tempore dabitur velocitas & spatium ac contrà.

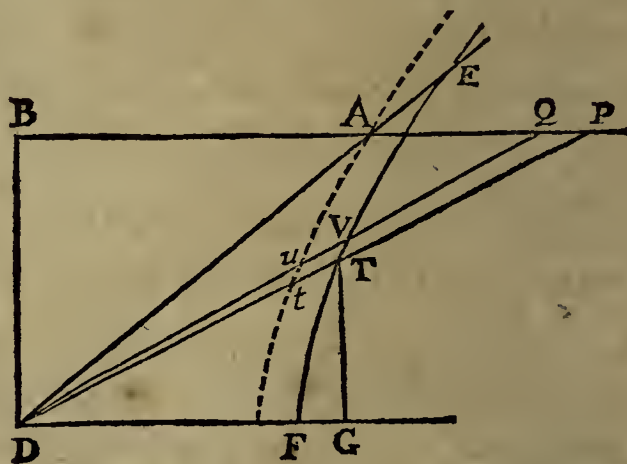
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIII. THEOR. X.



Jungantur *D A*, *D P* circulum secantes in *E* ac *T*, & (m) exponatur gravitas per *D A quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam in *P* ut *DAq* ad *APq* + 1 *BAP*: & tempus ascensus totius erit ut circuli sector *E D T*.

Agatur enim *D V Q*, abscindens & velocitatis *A P* momentum *P Q*, & sectoris *D E T* momentum *D T V* dato temporis momento respondens; & velocitatis decrementum illud *P Q* erit ut (n) summa virium gravitatis *D A q* & resistentiæ *A P q* + 2 *B A P*, id est (*per prop.* 12. *lib.* 2. *elem.*) ut *D P quad.* Proinde area *D P Q*, (o) ipsi *P Q* proportionalis, est ut *D P quad.* & area *D T V*, quæ est ad aream *D P Q* ut (p) *D T q* ad *D P q*, est ut datum *D T q*. Decrescit igitur area *E D T* uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum *D T V*, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem *A P* ut prius, & resistentia ponatur esse ut *A P q* + 2 *B A P*, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per *D A q* exponi possit; capiatur *B D* ejus longitudinis, ut sit *A B q* — *B D q* gravitati proportionale, sitque *D F* ipsi *D B* perpendicularis & æqualis, & per verticem *F* describatur hyperbola *F T V E*, cujus semidiametri conjugatæ sint *D B* & *D F*, quæque secet *D A* in *E*, & *D P*, *D Q* in *T* & *V*; & erit tempus ascensus totius ut hyperbolæ sector *T D E*.



Nam

(m) * *Et exponatur gravitas per D A q.* Corpore ascendente ratio gravitatis uniformis ad resistentiam vel major est ratione quadrati dati A B ² ad quantitatem A P ² + 2 B A P, vel minor vel æqualis. In 1°. casu gravitas exponi semper poterit per quadratum secantis A D quæ quantumvis magna assumi potest; In 2°. casu per differentiam A B² — BD² quæ quantumvis parva esse potest; & in 3°. casu per quadratum A B ².

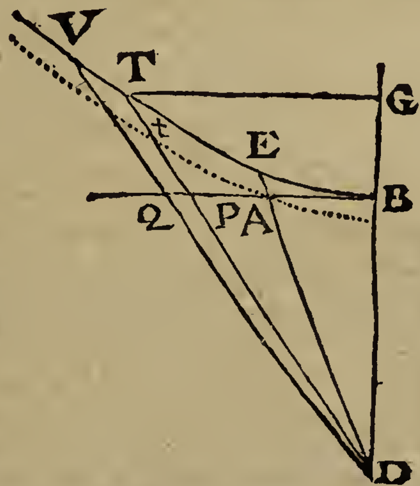
(n) * *Ut summa virium* (18).

(o) * *Ipsi P Q proportionalis.* Nam area D P Q est $\frac{1}{2}$ B D × P Q, & ideò ob datam $\frac{1}{2}$ B D est ut P Q.

(p) * *Ut D T q ad D P q.* Triangulum

Nam velocitatis decrementum *P Q*, in datâ temporis particulâ factum, eft ut fumma refiftentiæ *A P q* + 2 *B A P* & gravitatis *A B q* — *B D q*, (q) id eft, ut *B P q* — *B D q*. Eft autem area *D T V* ad aream *D P Q* ut *D T q* ad *D P q*; ideoque, fi ad *D F* demittatur perpendiculum *G T*, ut *G T q* feu *G D q* — *D F q* ad *B D q*, utque *G D q* ad *B P q*, & divifim ut *D F q* ad *B P q* — *B D q*. Quare cùm area *D P q* fit ut *P Q*, id eft, ut *B P q* — *B D q*; erit area *D T V* ut datum *D F Q*. Decrefcit igitur area *E D T* uniformiter fingulis temporis particulis æqualibus, per fubductionem particularum totidem datarum *D T V*, & propterea tempori proportionalis eft. *Q. E. D.*

Caf. 3. Sit *A P* velocitas in defcenfu corporis, & *A P q* + 2 *B A P* refiftentia, & *B D q* — *A B q* vis gravitatis, exiftente angulo *D B A* recto. Et fi centro *D*, vertice principali *B*, defcribatur hyperbola rectangula *B E T V* fecans productas *D A*, *D P* & *D Q* in *E*, *T* & *V*; erit hyperbolæ hujus fector *D E T* ut tempus totum defcensûs.



Nam velocitatis incrementum *P Q*, eique proportionalis area *D P Q*, eft ut exceffus gravitatis fupra refiftentiam, id eft, ut *B D q* — *A B q* — 2 *B A P* — *A P q* feu *B D q* — *B P q*. Et area *D T V* eft ad aream *D P Q* ut *D T q* ad *D P q*, ideoque ut (r) *G T q* feu *G D q* — *B D q* ad *B P q*, utque *G D q* ad *B D q*, & divifim ut *B D q* ad *B D q* — *B P q*. Quare cùm area *D P Q* fit ut *B D q* — *B P q*, erit area *D T V* ut datum *B D q*. Crefcit igitur area

E D T

lum evanefcens D P Q, non differt a fectore circuli centro D & radio D Q defcripti, inter lineas D Q & D P; hic verò fector eft ad fimilem fectorem D T V, ut DP^2 ad DT^2, quarè area D T V, eft ad aream D P Q, ut DT^2 ad DP^2, & permutando, area D T V eft ad DT^2, ut area D P Q ad DP^2. Cùm igitur (*ex dem.*) area D P Q fit ut DP^2, erit etiam area D T V ut DT^2, feu ut datum quadratum DB^2; ergo, tempore dato, data eft area D T V, & ideò temporibus æqualibus *æqualiter decrefcit area* E D T, *ad modum temporis futuri &c.* 138.

(q) * *Id eft ut B P q — B D b.* Eft enim A P q + 2 B A P + A B q = B P q.

(r) *Ut G T q.* Nam ob fimilitudinem triangulorum D G T, P B D eft D T q ad D P q ut G T q = G D q — B D q (ex conic. vid. not. in caf. 2. prop. 9.) ad B D q, *utque G D q ad B D q, & divifim &c.*

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. III. Prop. XIII. Theor. X.

E D T uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *D T V*, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Si centro *D* ſemidiametro *D A* per verticem *A* ducatur arcus *A t* ſimilis arcui *E T*, & ſimiliter ſubtendens angulum *A D T*: velocitas *A P* erit ad velocitatem, quam corpus tempore *E D T*, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli *D A P* ad aream ſectoris *D A t*; ideoque ex dato tempore datur. (f) Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

Scho-

(f) * *Nam velocitas in medio non reſiſtente* (25. lib. I.) *tempori* atque adeò ſectori E D T, & proindè *ſectori D A t, proportionalis eſt*; in medio reſiſtente eſt ut A P, ſeu ob datam B D ut $\frac{1}{2}$ B D × A P; ſivè ut triangulum A D P; & in medio utroque ubi quàm minima eſt, nempe initio deſcensûs è quiete vel in fine aſcensûs accedit ad rationem æqualitatis ob reſiſtentiam evaneſcentem, evaneſcente velocitate, pro more, ſectoris D A t & trianguli D A P coeuntibus punctis t & P cum puncto A.

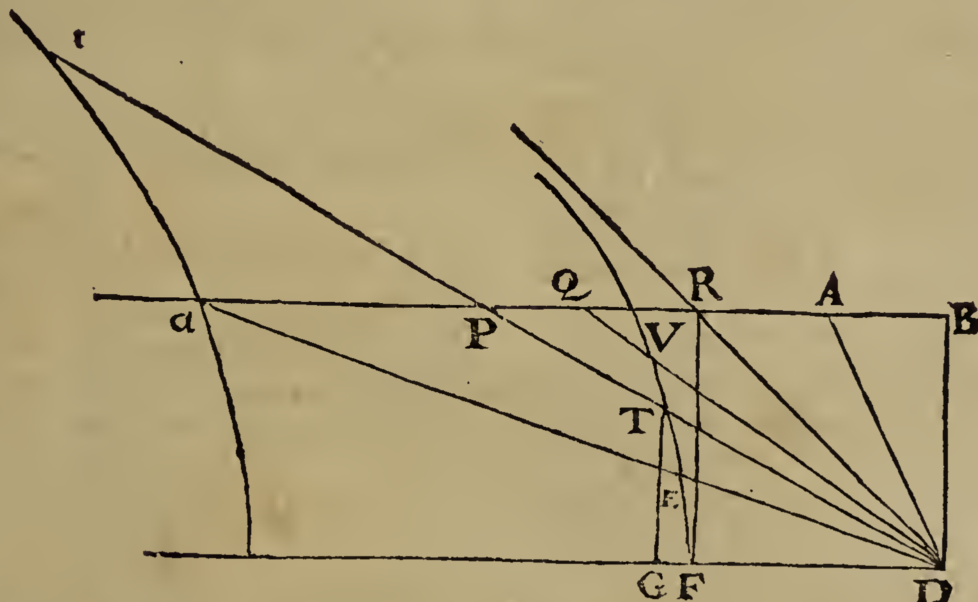
139. Quoniam ubi in corporis deſcenſu B P fit = B D, angulus B D P ſemirectus evadit, & recta D P aſymptotus hyperbolæ æquilateræ B E T; manifeſtum eſt quod corpus è quiete cadendo nonniſi finitam velocitatem infinito tempore poſſit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquiſita B D — A B. Si verò corpus verticaliter deorſum data cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ ſeu terminali B D — A B æqualis eſt, & in hoc caſu corpus motu uniformi deſcendit ob reſiſtentiam gravitati æqualem; vel terminali minor eſt, & corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major eſt, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapſo ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem caſu ſic abſolvitur conſtructio.

Sit A a velocitas datæ projectionis terminali major, A P velocitas perpetuò decreſcens, A P ^{2} + 2 B A P reſiſtentia, & B D ^{2} A B ^{2} vis gravitatis; exiſtente angulo D B A recto; & ſi capiatur B R = BD, compleaturque quadratum D B R F, ac centro D & vertice principali F deſcribatur hyperbola rectangula F E T V, ſecans rectas D a, D P & D Q, in E, T, V; tempus deſcensûs ab initio uſqueqò reſidua corpori velocitas ſit A P, erit ut ſector hyperbolicus D E T; nam velocitatis decrementum P Q, in data temporis particula factum eique proportionalis area

D P Q

Scholium.

Demonstrari (†) etiam posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis minor est quàm quæ exponi possit per DAq seu $ABq + BDq$, & major quàm quæ exponi possit per $ABq - BDq$, & exponi debet per ABq. Sed propero ad alia.



D P Q est ut excessus resistentiæ suprà gravitatem (18), id est, ut $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, seu $BP^2 - BD^2$; & area D T V est ad aream D P Q, ut DT^2 ad Dp^2, ideoque ut GT^2, (seu $GD^2 - BD^2$) ad BD^2, & ut GD^2 ad BP^2, & divisim, ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$. Quarè cum area D P Q, sit ut $BP^2 - BD^2$, erit area D T V ut datum BD^2. Crescit igitur area E D T, uniformiter singulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum D T V, & propterea tempori descensûs proportionalis est. Coincidente verò puncto P, cum R, & ideò rectâ D P, cum asymptoto D R, velocitas A P terminali A R seu B D — A B æqualis evadit, & sector D E T infinitus, proindeque tempus etiam infinitum fit. Q. E. D.

140. Hinc etiam si centro D, semidiametro D a, per verticem a, ducatur arcus Hyperbolicus a t similis arcui E T, & similiter subtendens angulum a D T; velocitas a P, in medio resistente tempore E D T, extincta, erit ad velocitatem quam corpus eodem tempore in spatio non resistente è quiete descendendo acquirere posset, ut area trianguli D a P, ad aream sectoris D a t, ideòque ex dato tempore datur, & hinc datur quoque velocitas residua A P. Nam velocitas in medio non resistente acquisita tempori, atquè ideò sectori D E T, & proindè sectori simili D a t proportionalis est; velocitas in medio resistente extincta, est ut triangulum D a P, & in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis pro more sectoris D a t, & trianguli D a P. 140.

(†) 141. *Demonstrari posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis..... exponi debet per A B q.* * Velocitas in ascensu exponatur per A P ut prius, sit resistentia ut

ut AP q + 2 BAP, exponatur vis gravitatis per AB q capiatur BD & DF = BA erectoque perpendiculo FTA erit tempus ascensus totius ut sector sive Triangulum DTA, agatur enim DVQ abscindens & velocitatis momentum PQ & sectoris DTA momentum DTV, velocitatis decrementum PQ est ut summa resistentiæ & gravitatis sive ut AP q + 2 BAP + AB q id est (per 4. 2ⁱ. Elem.) ut BP q; est autem area DTV ad aream DPQ ut DT q ad DP q, sive ob Triangula similia DTF, DPB, ut DF q ad BP q, est ergo area DTV ut datum DF q. *Decrescit igitur area DTA ad modum temporis futuri per subductionem particularum DTV, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est.* *

Si itaque resistentia ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, vis autem gravitatis ut AB^2; tempus ascensûs totius erit ut AT & etiam ut $\frac{AP}{BP}$. Nam triangulum DTA, ob altitudinem constantem DF, est ut basis AT & propter Triangula similia DTF, ATP est DF : TF = AP : AT; & jungendo terminos secundæ rationis cum terminis primæ est DF + AP (sive BP) : TF + AT (sive BD) = AP : AT, est ergo $AT = \frac{AP \times BC}{BP}$ sive ob datum BD, AT est ut $\frac{AP}{BP}$.

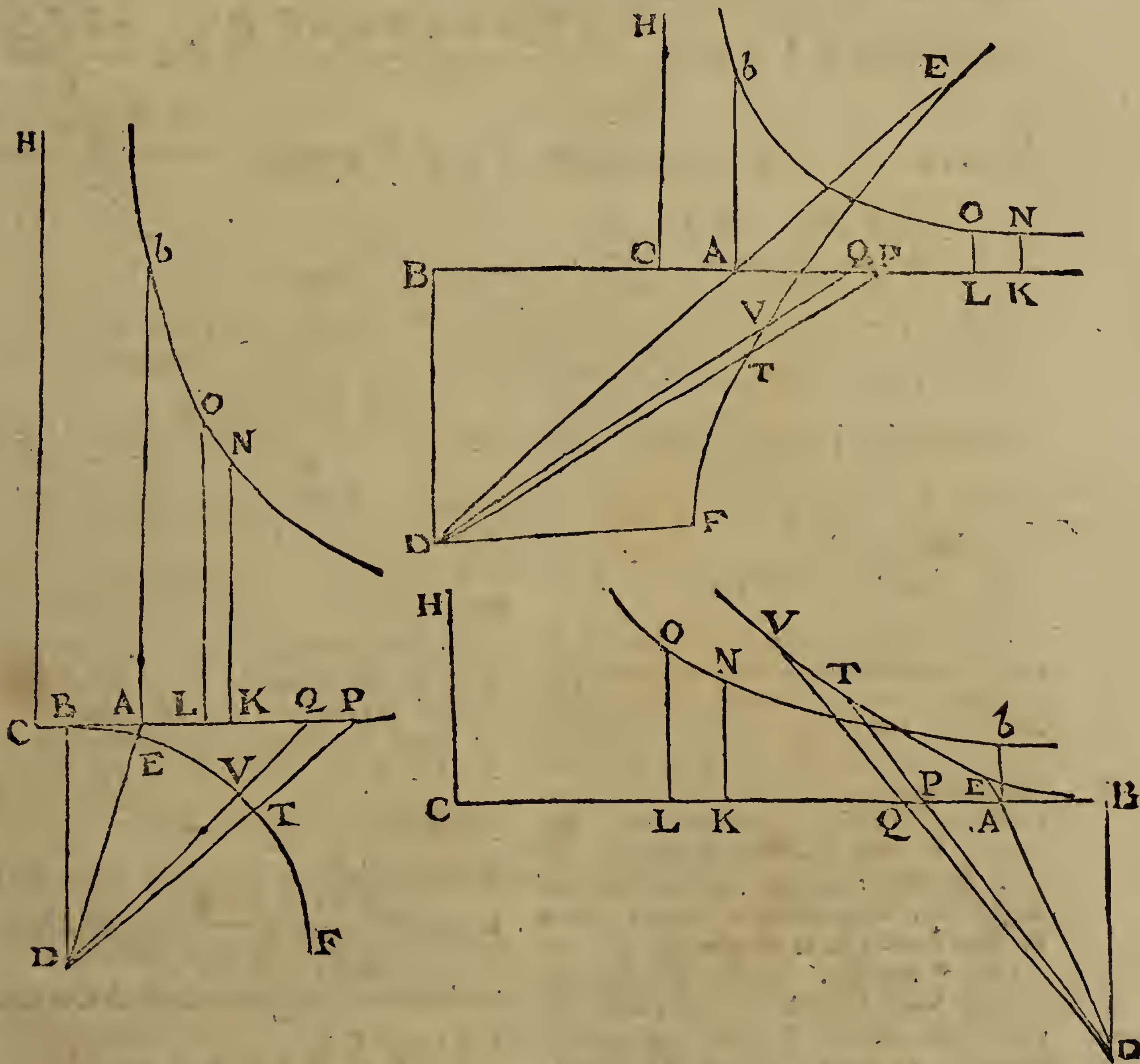
142. In isto casu velocitas AP est ad velocitatem quam corpus tempore DAT sive $\frac{AP}{BP}$, in spatio non resistente ascendendo amittere posset, ut BP ad AB. Nam velocitas in medio non resistente tempori atquè ideò areæ DAT sive rectæ AT proportionalis est; in medio resistente est ut AP, & in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis; nam cum capiatur BD = AB, ratio linearum AP, AT, in puncto A ubi quàm minima est, accedit ad rationem linearum AF, FD quæ est æqualitatis. Quare velocitas AP, in medio resistente erit ad velocitatem in medio non resistente eodem tempore DAT amissam vel acquisitam ut AP ad AT; hoc est ob Triangula similia APT, BPD ut BP ad BD vel AB. Q. E. D.

143. Ex formulis quas (19) dedimus facilè intelligitur quomodo ad hoc Theorema X. deveniatur. Nam si dicatur gravitas g, velocitas v, resistentia $2av + vv$, & tempus t; corpore ascendente erit (16. 17) $g\,dt + 2av\,dt + vv\,dt = -dv$, & ideò $dt = \frac{-dv}{vv + 2av + g}$. Ponatur $v + a = x$, & ideò $dv = dx$, & $vv + 2av = xx - aa$, fiet $dt = \frac{-dx}{xx + g - aa}$. Undè si fuerit $g = aa$, erit $dt = \frac{-dx}{xx}$; si $g - aa = bb$, erit $dt = \frac{-dx}{xx + bb}$. Si $g - aa = -bb$ erit $dt = \frac{-dx}{xx - bb}$. Fluens quantitatis $-\frac{dx}{xx}$, est $\frac{1}{x}$, fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx + bb}$, pendet a quadraturâ sectoris circularis (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx - bb}$, à quadraturâ sectoris hyperbolici; atquè hi sunt tres casus pro corporis ascensu; pro descensu verò est (19) $g\,dt - 2av\,dt - vv\,dt = dv$, & ideò $ds = \frac{dv}{g - 2av - vv} = \frac{dx}{g + aa - xx} = \frac{dx}{bb - xx}$, ponendo $v + a = x$ & $g + aa = bb$, fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb - xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ & gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.

Capiatur AC in (fig. tribus ultimis) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncta



cti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ sit ad DB ut DBq ad $4 BAC$: & descriptâ ad asymptotos

totos rectangulas CK, CH hyperbolâ bN, erectaque KN ad CK perpendiculari, ([t]) area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione arithmeticâ, ([u]) dum vires CK in progressione geometricâ sumuntur. ([x]) Dico igitur quòd distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cùm AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (*per hujus lemma* 11.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ ([z]) seu $\frac{BPQ \times BD\ cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, ([a]) sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente BET circulo (in figurâ primâ) linea ([b]) AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & ([c]) DPq seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z +$

(t) * *Area AbNK augebitur vel &c.* (380. Lib. 1.).

(u) * *Dum vires CK &c.* Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut CK, siquidem in corporis ascensu vis retardatrix est AC + AK, seu summa virium gravitatis & resistentiæ, & in descensu vis acceleratrix est AC − AK = CK seu excessus vis gravitatis supra resistentiam (18).

(x) * *Dico igitur quod distantia corporis ascendentis ab ejus altitudine maximâ* & distantia descendentis à puncto quietis & quo decidit *sit ut excessus* &c.

(z) * *Seu &c.* Nam (*per theor.* 4. *de hyp.*) est $LO : Ab = CA : CK$, & per constr.) $Ab : DB = DB^2 : 4BA \times AC$, ideoque (ex æquo) $LO : DB = DB^2 : 4BA \times CK$, & hinc $LO = \frac{DB^3}{4CK \times BA}$. Quarè momentum $KLON = LO \times KL = \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.

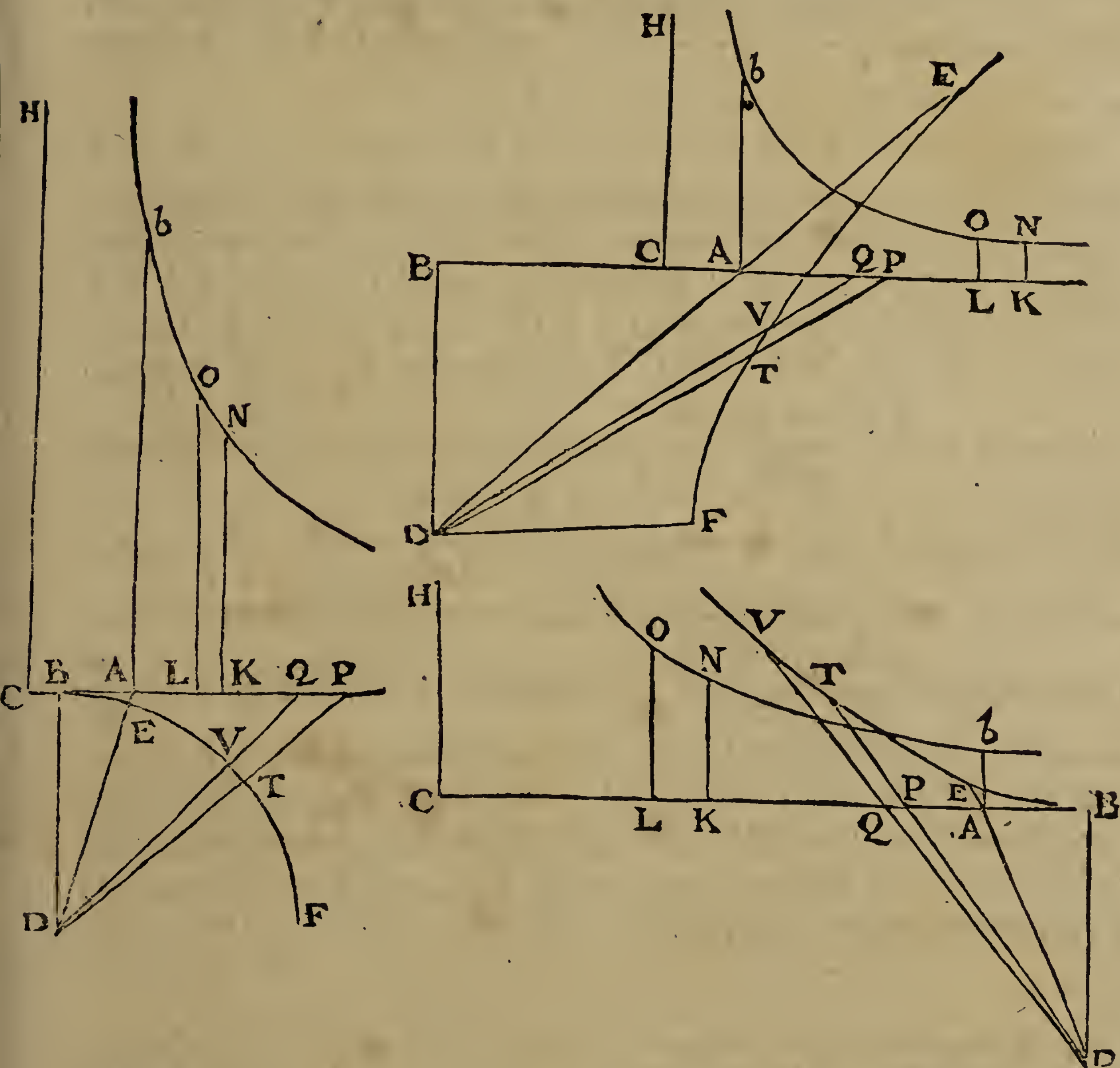
(a) * *Sitque gravitas &c.* In cas. 1°. prop. 13. gravitas erat ut $DA^2 = AB^2 + BD^2$.

(b) * *Linea AC &c.* Est enim in cas. 1°. prop. 13. gravitas ad resistentiam ut $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$, & (per hyp.) ut AC ad AK, seu $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$. Quarè erit $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$ ut AC ad $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & hinc habetur $AC = \frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, & $AC \times Z = AB^2 + BD^2$.

(c) * *Et DPq &c.* Ob angulum DBP rectum, & quia $AK \times Z = AP^2 + 2BAP$, atque $AC \times Z = AB^2 + BD^2$, ut ex superioribus patet.

$AC \times Z$ seu $CK \times Z$; (d) ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 2. Sic corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$,



(e) linea AC (in figurâ secundâ) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & (f) DTq erit ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2\,BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z + AC \times$

(d) * *Ideòque area DTV &c.* Nam (ex dem.) in 1°. casu prop. 13.) area DTV est ad aream DPQ, ut DT^2 vel DB^2 ad DP^2, & est $DP^2 = CK \times Z$.

(e) * *Linea AC &c.* Patet ut in primo casu hujus.

(f) *Et DTq erit ad DPq.* Patet (ex dem. in cas. 2°. prop. 13.)

R 3

$AC \times Z$ seu $CK \times Z$. (g) Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ (h) erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hâc ratione; si pro areâ DTV, quâ momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, putà $BD \times m$, erit area DPQ, id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$, ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2 BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ (i) momentum $KLON$ superius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id (k) est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, (l) sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Co-

(g) * *Ideoque area DTV &c.* Nam (ex dem. in 2°. cas. prop. 13.) area DTV, est ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

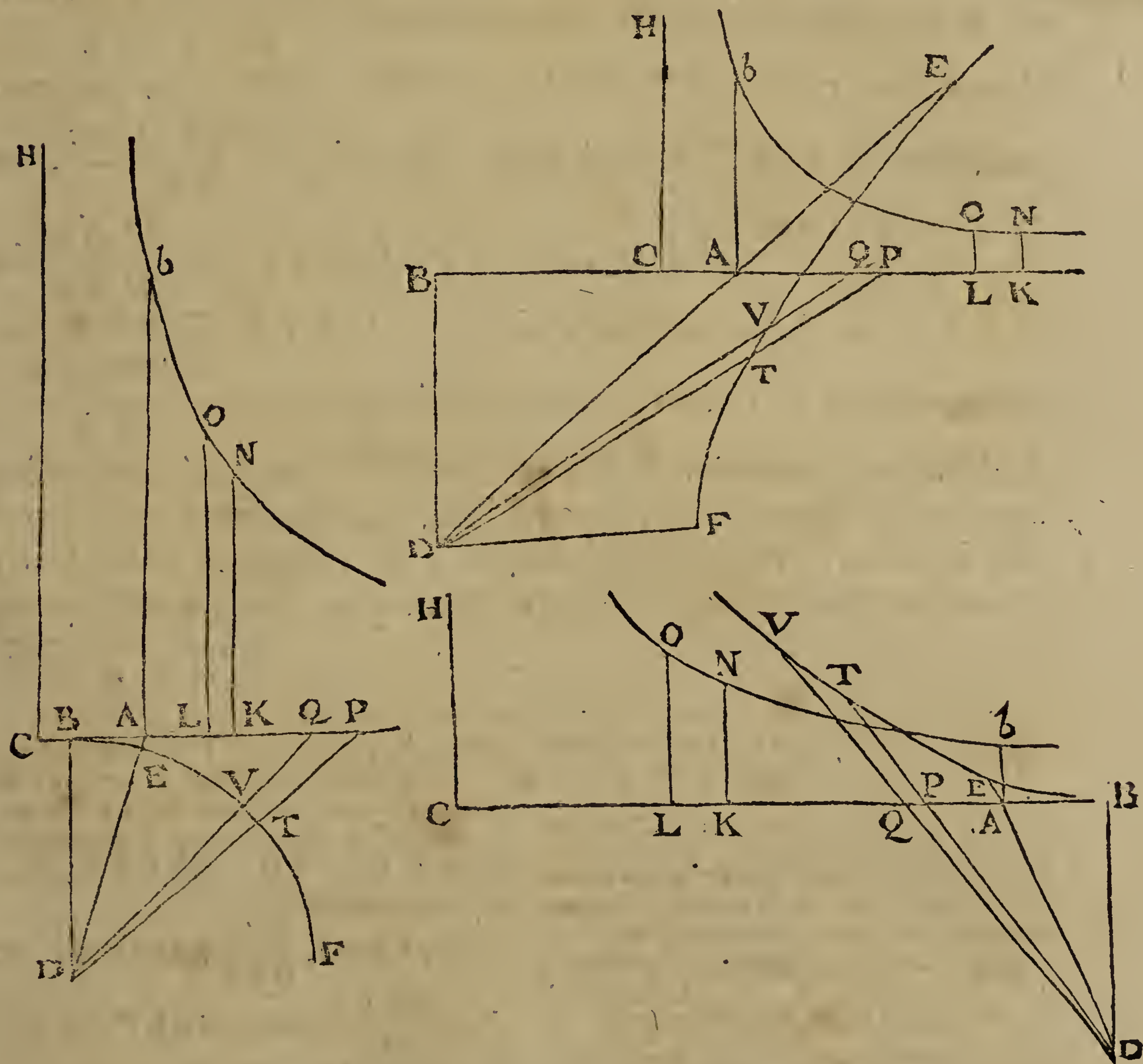
(h) * *Erit area DTV.* (Ex demonstratis in 3°. cas. prop. 13.) area DTV est ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

(i) * *Momentum KLON superius inventum* est $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB} = \frac{BP \times PQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$. Quarè cum sit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, erit $KLON = \frac{BP \times BD \times m}{AB}$.

(k) * *Id est ut momentum spatii.* Nam dato temporis momento, momentum spatii est ut velocitas (11.).

(l) * *Sunt proportionalia.* (Per coroll. Lem. 4. Lib. 1.) Dum autem evanescit AP, seu velocitas, evanescit quoque resistentia AK; cum areâ AbNK, & tempore DTE.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD, dicatur M; & longitudo alia V sumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea DA ad lineam DE: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium, quod corpus in medio



non resistente è quiete cadendo eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resisten-

ſtente eſt in duplicatâ ratione temporis, ſive (m) ut V^2; & ob datas BD & AB ut $\frac{AD \times V^2}{AB}$. (n) Hæc area æqualis eſt areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & (o) ipſius M momentum eſt m; & propterea hujus areæ momentum eſt $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum eſt ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & $AbNK$, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, ſive (p) ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP, ideoque, ubi areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, (q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & $AbNK$, quando omnes hæ areæ quam minimæ ſunt, æqualia habent momenta; (r) ideoque ſunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam ſpatia in medio utroque in principio deſcenſûs vel fine aſcenſûs ſimul de-

(m) * *Sivè ut V^2.* Nam ob datas BD, DA, DE, longitudo quæ æquatur $DET \times \frac{DA}{BD \times DE}$ (per hyp.) eſt ut area DET, ſeu ut tempus. Spatium autem in medio non reſiſtente eſt in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. 1.) ideoque ut V^2.

(n) * *Hæc area.* Quoniam (per hyp.) $V : M = DA : DE$, erit $V = \frac{DA \times M}{DE}$ & $V^2 = \frac{DA^2 \times M^2}{DE^2}$, adeoque $\frac{BD \times V^2}{AB} = \frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$.

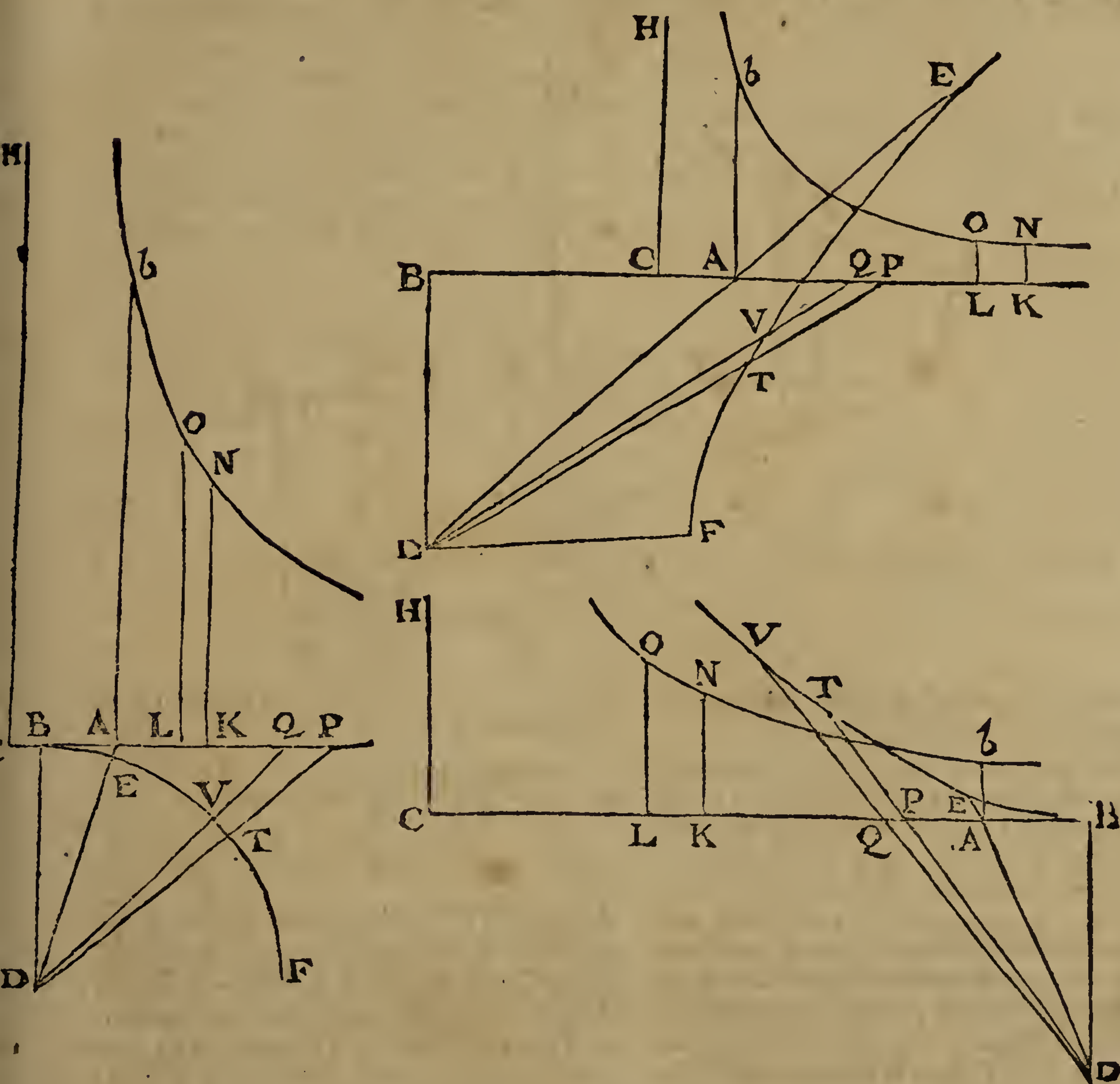
(o) * *Et ipſius M momentum eſt m.* Cùm enim ſit (per hyp.) $M = \frac{DET}{BD}$, momentum ipſius M, erit $\frac{DTV}{BD}$, ſed ſuperiùs ſupponebatur $DTV = BD \times m$; Quarè momentum ipſius M, eſt m; Et ideò momentum quadrati M^2 eſt $2M \times m$ (per caſ. 3. Lem. hujus) & *propterea* ob datas DA, BD, DE & AB, *hujus areæ momentum* &c.

(p) * *Sivè ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET &c.* Ob $M = \frac{DET}{BD}$, ideoque $M \times BD = DET$, & $\frac{1}{2} BD \times AP = DAP$.

(q) * *In ratione æqualitatis.* Ubi enim areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, fit $DET : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET = DAP$.

(r) *Ideóque ſunt æquales.* Quandò ſunt quam minimæ.

descripta accedant ([f]) ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ dif-



ferentia; & præterea cùm spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuò ut arearum DET & $AbNK$ differentia: necesse est, ut spa-

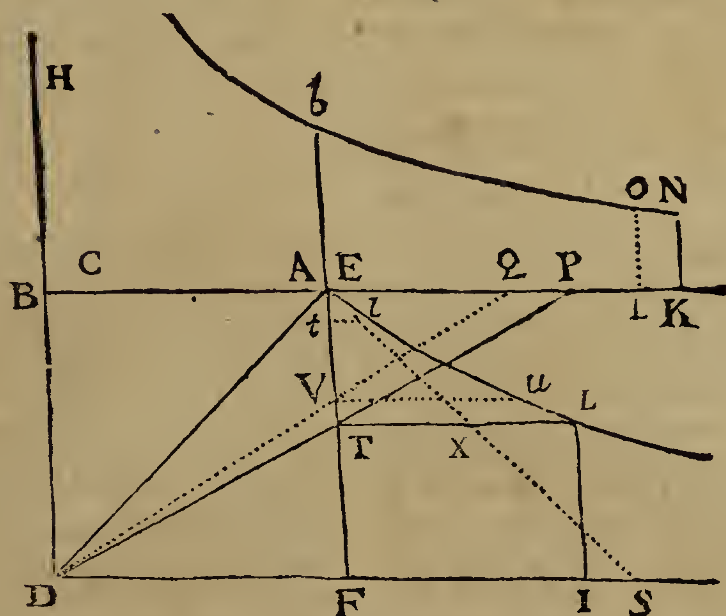
([f]) *Accedant ad æqualitatem.* Ob resistentiam cum velocitate nascentem vel evanescentem, manente gravitate. 144. Constructione casûs 3i. propositio-

ſpatia in medio utroque, in æqualibus quibuſcunque temporibus deſcripta, ſint ad invicem ut area illa $\frac{CD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*

tionis hujus 14*. uti poſſumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorſum projecti cum velocitate quæ terminali minor eſt. Nam ſi æqualis ipſi fuerit, motus eſt æquabilis; ſi verò celeritas projectionis terminali major ſit, paulò mutanda erit caſûs tertii conſtructio. Iiſdem enim poſitis in not. 139. capiatur A C gravitati & A K reſiſtentiæ proportionalis, ità ut ſit C inter A & K, quod reſiſtentia gravitate major ſupponatur. Sit A a velocitas projectionis terminali major; erigatur perpendicularis a b, quæ ſit ad D B, ut DB^2, ad $4 AB \times Ca$, & deſcriptâ ad aſymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K, perpendiculari, area a b N K augebitur in progreſſione arithmeticâ, dum vires C K in progreſſione geometrica minuuntur: Spatium autem tempore D E T deſcriptum erit ut exceſſus areæ a b N K, ſuprà aream D E T; nam ponatur, (*ut in demonſtratione prop.* 14.) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & ideò $KL = \frac{2BPQ}{Z}$ atque areæ ab N K momentum K L O N, $= \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times DB^3}{2Z \times AB \times CK}$. Cùm gravitas ſit ut $BD^2 - AB^2$, erit $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, & area D T V ad aream D P Q ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$ (136) ſive $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, ſive $AK \times Z - AC \times Z$, vel $CK \times Z$. Si itaque pro areâ conſtante D T V, ſcribatur $BD \times m$, erit area D P Q, id eſt, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BD^2, atquè indè fit $PQ \times BD^3 = 2 BD \times m \times CK \times Z$, & areæ a b N K momentum K L O N ſuperiùs inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ auferatur areæ D E T momentum D T V ſeu $BD \times m$ & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum ut velocitas A P, id eſt,

est, ut momentum spatii quod corpus describit, ideòque differentia arearum ut spatium descriptum.

145. Hinc spatium tempore D E T, velocitate uniformi A a descriptum est ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente ut factum $A a \times DET$ ad arearum a b N K & D E T differentiam in A B ductam. Nam spatium tempore DET, velocitate uniformi A a descriptum, est ut $A a \times DET$ (5. lib. 1.) & spatii hujus momentum est ut $A a \times DTV$; momentum autem spatii in medio resistente descripti est ut $AP \times DTV$, seu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) & quia evanescente DET, fit $AP = Aa$, hæc momenta $Aa \times DTV$, $AP \times DTV$, initio temporis æqualia sunt, sicut & spatia initio descripta. Sed $AP \times DTV = AP \times BD \times m$ & momentum differentiæ arearum a b N K & DET; est $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ (144). Ergo $AP \times DTV$ æquale est momento differentiæ arearum a b N K & DET per A B ducto, unde manifestum est propositum. 145.



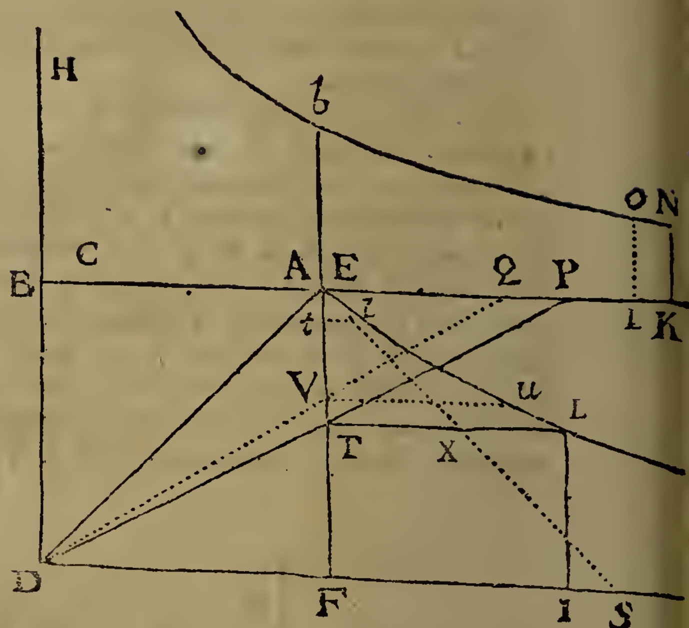
146. Si corporis ascendentis velocitas exponatur per longitudinem A P, & resistentia per A K quæ ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, ita ut assumptâ datâ quâvis quantitate Z, sit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per A C, quæ sit semper ut AB^2, ita ut sit $AC = \frac{AB^2}{Z}$ eademque constructio fiat quæ (not. 141.) *& in A erigatur perpendiculum $Ab = \frac{AB^2}{4CA}$. Denique erecto perpendiculo in C describatur ad Asymptotos Rectangulos C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K perpendiculari, area A b N K diminuetur in progressione Arithmeticâ dum vires C K in progressione Geometricâ decrescente sumuntur. Et distantia corporis ab ejus altitudine maximâ erit ut excessus areæ A b N K supra Triangulum D E T.

Cùm enim sit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$ erit ipsius A K momentum K L (*per lib. 2. Lem. II.*) $= \frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z} = \frac{2BPQ}{Z}$ & areæ A b N K momentum $KLON = \frac{2BPQ \times LO}{Z}$, & quia, per naturam hyp. est $CK : CA = Ab \left(\text{sive } \frac{AB^2}{4CA}\right) : LO$, est $LO = \frac{AD^2}{4CK}$, ideoque $KLON =$

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. III. Prop. XIV. Theor. XI.

$\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$. Est verò area DTV ad aream DPQ ut DT^2 ad DP^2, sive etiam ob Triangula similia TDF, BDP, ut DF^2 sive AB^2 ad BP^2, seu $AP^2 + 2BAP + AB^2$ (*per* 4. 2. *El.*) hoc est (quia ex hypothesi est, $AP + 2BAP = AK \times Z$, & $AB^2 = CA \times Z$) ad $CK \times Z$. Hinc si pro area DPQ scribatur ejus valor $\frac{1}{2} BD \times PQ = \frac{1}{2} AB \times PQ$, erit area $DTV = \frac{AB \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, quæ valorem constantem exprimere debet, quia momentum temporis sibi semper æquale exponit, ejus itaque loco scribatur Rectangulum $AB \times m$ in quo m erit momentum constans, est $m = \frac{AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, erit ergo areæ AbNK momentum superius inventum $\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK} = BP \times m$, igitur differentia momentorum KLON & DTV, est $BP \times m - AB \times m = AP \times m$ & propterea ob datum m ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo describit, & quo minuitur corporis distantia ab ejus altitudine maximâ. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis decrescentia, simulque evanescentia sunt proportionalia.

Verùm in isto casu facilius quam per methodum *Newtonianam* obtinetur spatium à corpore ascendente usque ad quietem in medio resistente descriptum, & ejus relatio ad spatium in medio non resistente eodem tempore percurrendum: Etenim per punctum A asymptotis DB, DF describatur hyperbola, & ex puncto T ducatur perpendiculum T *L* ad Hyperbolam usque, Trilineum AT*L* erit ut spatium quæsitum. Ducatur *L* I ad asymptotum perpendicularis, erit FI = T*L* & TF = *L*I, sed ex natura Hyperbolæ est DF : DI = *L*I (sive TF) : AF, & dividendo DF : FI (sive T*L*) = TF : AT, hoc est alternando DF : TF = T*L* : AT (sed per 141) est DF : TF = AP : AT, ergo est AP = T*L*, itaque ducta ex V parallela Vu, erit VT*L*u, momentum areæ AT*L*



$= VT \times TL$, est autem VT momentum temporis, & T*L* = AP ipsa velocitas eo momento, ergo VT × T*L* est ut momentum spatii eo momento descripti, ergo tota area AT*L* est ut spatium descriptum.

Ducatur præterea tangens AS & designet At ultimum temporis momentum, & ducta tl, Trilineum evanescens AT*L* æquale fiet Triangulo Atl, & eo ultimo momento spatia tam in medio resistente quam in non resistente descripta erunt æqualia, ideoque per idem triangulum Atl exprimentur; spatia verò in medio non resistente descripta sunt ut Quadrata temporum, ideoque spatium tempore At in medio non resistente descriptum erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum sicut $\overline{At}^2$ ad $\overline{AT}^2$, sive ut area trianguli Atl ad aream ATX; spatium verò in medio resistente descriptum tempore At erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum ut Atl ad trilineum AT*L*, unde liquet quod spatium in medio non resistente descriptum, ascendendo ad quietem usque, erit ad spatium in medio resistente descriptum, ut ATX ad AT*L*, existente velocitate, in medio non resistente, ut TX, & in medio resistente, ut T*L*.

Scho-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIV. THEOR. XI.

Scholium.

(t) Reſiſtentia corporum ſphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex denſitate medii. Et reſiſtentiæ partem illam, quæ oritur ex denſitate fluidi, diximus eſſe in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, eſt uniformis, ſive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim vi uniformi ſeu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed ſufficit aditum patefeciſſe ad hanc ſpeculationem in propoſitionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In (u) iiſdem utique pro corporis aſcendentis reſiſtentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, ſubſtitui poteſt reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus ſolâ vi inſitâ movetur; & corpore rectâ aſcendente addere licet hanc uniformem reſiſtentiam vi gravitatis; eandemque ſubducere, quando corpus rectâ deſcendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in propoſitionibus præcedentibus XIII. & XIV. in (x) quibus etiam reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, ſubſtitui poteſt, vel cum eâdem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SEC-

(t) (*) *Reſiſtentia corporum* (Vid. Lemnum. 1.)

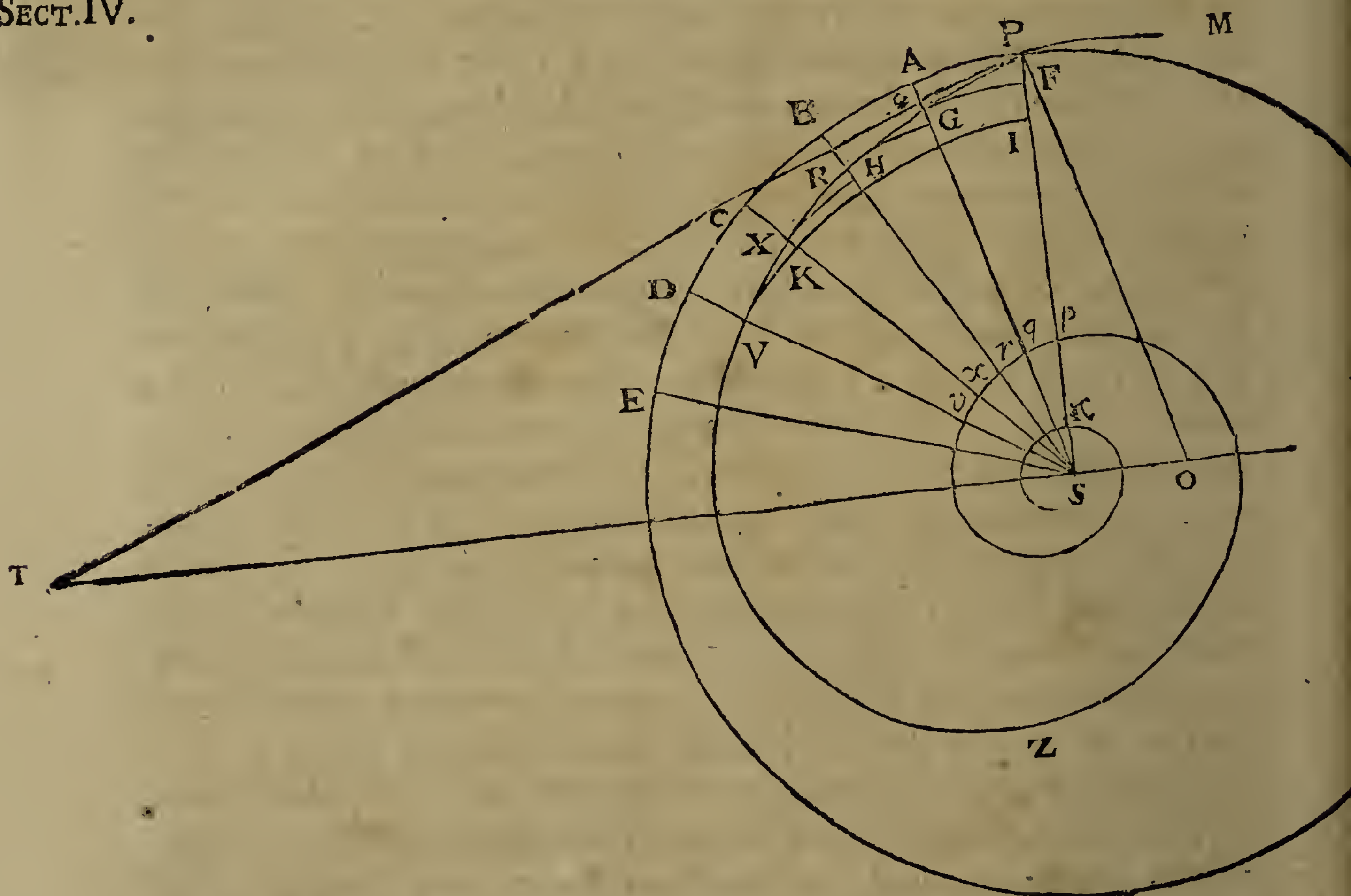
(u) (*) *In iiſdem utique* (105).

(x) * *In quibus etiam reſiſtentia uniformis*, hoc eſt, ſi corpus ſolâ vi inſitâ feratur, in conſtructionibus prop. 13. & 14., quæ ſunt pro corporis aſcenſu, loco gravitatis ſubſtituenda eſt reſiſtentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; ſi corpus aſcendens vi gravitatis etiam urgeatur, quantitas illa quæ ſolam gravitatem exponebat, ſummam gravitatis & reſiſtentiæ uniformis in prædictis conſtructionibus exponet. Tandem ſi corpus vi gravitatis deſcendat, eadem quantitas quæ ſolam gravitatem exponebat, exceſſum gravitatis ſuprà reſiſtentiam uniformem in conſtructionibus quæ ſunt pro deſcenſu repræſentabit (cæteris manentibus.) 146.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV.

SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis resistentibus (*).



(*) NEWTONUS in hâc sectione præcipuas supponit Logarithmicæ spiralis proprietates, postulat igitur instituti nostri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus P A E L, centro S, & radio quovis S P descriptus divisus sit in arcus quotlibet æquales P A, A B, B C, C D &c., sintque radiorum P S, A S, B S, C S &c., partes P S, Q S, R S, X S &c. in continuâ progressione geometricâ, puncta P, Q, R, X &c., erunt in *Spirali Logarithmicâ* in quâ proindè si radii Q S, R S, X S &c., sint numeri, arcus circuli P A, P B, P C &c., sicut & anguli P S Q, P S R, P S X &c., erunt ut illorum numerorum Logarithmi, prorsùs ut in vulgari Logarithmicâ axis partes sunt ut Logarithmi ordinatarum correspondentium.

148. Quoniam autem progressio geometrica in infinitum decrescere & crescere potest, manifestum est spiralem Logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quàm ab eodem versùs M recedendo per gyros infinitos continuari posse, continuatâ progressione radiorum decrescentium vel crescentium circà centrum S, ad quod idcircò curva decrescentibus radiis proportionalibus, magis magisque accedit, licet nunquam illud possit attingere, sive ut loqui amant, licet illud centrum non attingat nisi post infinitas revolutiones.

149. Angulus S Q R, quem radius quilibet S Q, cum curvâ ad easdem partes constituit constans est; si quidem evanescentibus arcubus æqualibus P A, A B, B C &c., triangula evanescentia P S Q, Q S R, R S X &c., similia fiunt propter latera circà æquales ad centrum angulos proportionalia (147) & ideò alii anguli homologi

gi SPQ, SQR, SRX &c., & PQS, QRS, RXS, æquales ſunt.

150. Quoniam itaque ſpira quælibet PQRZp, pqrzπ &c., totidem triangulis PQS & qqS, QRS & qrS &c. ſimilibus ſimiliterque poſitis diviſa eſt, ſpiræ omnes quæ à radio poſitione dato SP, ad eundem radium ductæ ſunt, inter ſe ſimiles radiiſque correſpondentibus proportionales erunt, id eſt PS : pS = PQRZp : pqrzπ &c. Atquè hinc ſequitur (147) tam ſpiras omnes quàm radios ipſis correſpondentes ad centrum uſque in progreſſione geometricâ decreſcere, ſunt enim PS, pS, πS, &c. progreſſionis geometricæ termini æquidiſtantes ob æqualem angulorum æqualium PSQ, QSR, pSq, qSr, &c. numerum in ſingulis ſpiris comprehenſum undè radiorum quoque differentiæ Pp, pπ &c. in eâdem geometricâ progreſſione decreſcunt.

151. Ductâ rectâ PT ſpiralem tangente in P, & rectâ PO ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium SP perpendiculum TSO rectis PT & PO occurrens in T & O, longitudo ſpiralis PZpzπS, ad centrum uſque S, æquabitur tangenti PT, eritque proindè ad radium SP in datâ ratione PT ad SP, vel OP ad OS. Nam centro S, radiis SQ, SR, SX, SV &c. infinitè propinquis deſcripti ſint arcus circulares QF, RG, XH, VK &c., & ob angulos QFP, RGQ, XHR rectos, anguloſque QPF, RQG, XRH &c. æquales (149), triangula evaneſcentia PFQ, QGR, RHX &c. ſimilia ſunt triangulo PST, eſt igitur PT : PS = PQ : PF = QR : QG = RX : RH &c. & compoſite PT : PS = PQ + QR + RX &c. : PF + QG + RH &c. id eſt, ut longitudo ſpiralis ad totum radium PS. Quarè longitudo ſpiralis æquatur tangenti PT. Eſt autem ubique tangens PT ad radium correſpondentem PS, in ratione datâ, ob triangulum PTS ſpecie datum (149) & ob triangula TPS, POS, (*per conſtr.*) ſimilia, eſt etiam OP : OS = PT : PS, ſeu ut longitudo ſpiralis ad radium.

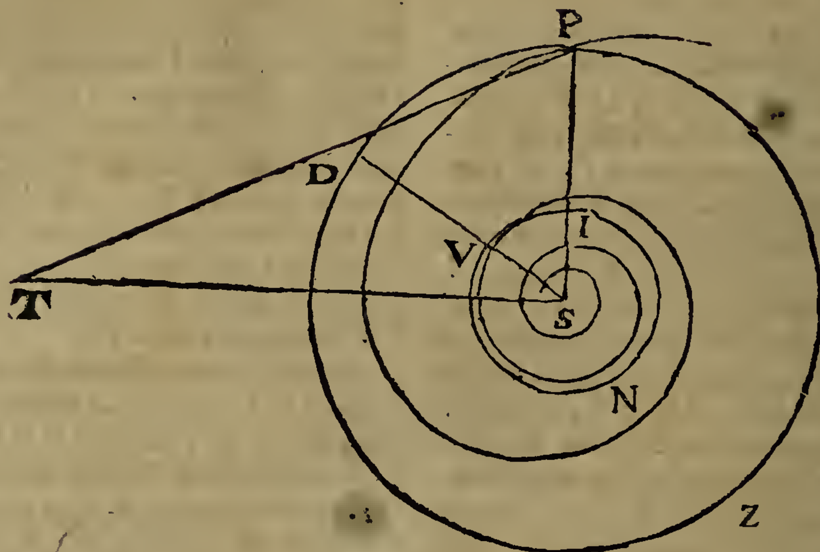
152. Hinc quoque patet quòd ſi centro S & radio quovis VS deſcribatur circulus ſecans ſpiralem in V & radium PS, in I, pars ſpiralis PV erit ad partem PI, radii PS, ut tangens PT ad totum radium PS. Quarè ſi, manentibus circulorum radiis SP, SI, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis ſeu ipſius tangens continet cum radio PS, longitudo ſpiralis tota ad centrum uſquè S, ſicut & longitudo inter duos circulos radiis SP, & SI deſcriptos comprehenſa, erit ut ſpiralis tangens PT, ſeu ut ſecans anguli TPS. Oſtendimus (151) longitudinem ſpiralis æqualem eſſe tangenti PT, & partem ſpiralis PV, inter prædictos circulos contentam, eſſe ad tangentem PT, in ratione PI ad PS, quæ (*per hyp.*) data eſt; manente autem radio ſeu ſinu toto PS, eſt PT ſecans anguli PTS. 152.

153. Dicantur radius conſtans PS = a, ſubtangens ST = b, arcus quilibet circuli PC vel PCLP + PC, vel 2 PCLP + PC = x, correſpondens ſpiralis radius SX = y, qui crescente arcu x decreſcit, erit ob triangulorum XKV, PST ſimilitudinem PS : ST = XK : VK, & ob ſectores SVK, SDC ſimiles, SK ſive SX : SC ſeu PS = VK : DC, ideoque ex æquo SX : ST = XK : DC; id eſt, $y : b = - dy : dx = - \frac{b\,dy}{y}$, hinc ſumptis fluentibus $x = Q - b\,L.\,y$, & quia ubi $x = o$, fit $y = a$, erit $Q = bL.a$, & ideo $x = b\,L.a - b\,L.y = b\,L.\frac{a}{y}$; ſi itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x, ſeu angulo PSC dabitur b ſubtangens anguli ſpiralis, eſt enim $b = \frac{x}{L.\frac{a}{y}}$.

Si verò datus ſit tum arcus x tum ſubtangens b dabitur radius y; Ponatur enim $L.\,h = 1$. & erit $\frac{x}{b} \times L.\,h = L.\,\frac{a}{y}$, adeòque $h^{\frac{x}{b}} = \frac{a}{y}$; $y = \frac{a}{h^{\frac{x}{b}}}$, & hinc etiam $a = y \times h^{\frac{x}{b}}$.

154. Hinc ſi manentibus radiis SP ſeu a, & SV vel SI ſeu y, adeòque & $L.\frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis cum radio continet, arcus circularis PD vel x, comprehenſus inter radios SP & SVD, erit ſemper ut ſubtangens ſpiralis ST, ſeu b, quæ, manente radio ſeu ſinu toto PS, eſt ut anguli TPS tangens.

155.



155. Iisdem positis; hoc est, manentibus radiis S P sive a, & S I sive y, & utcumque mutato angulo T P S, numerus revolutionum spiralis inter circulos P D Z P, & I V N I centro S & radiis datis S P S V vel S I descriptos est ut tangens S T anguli T P S, quem spiralis cum medio continet. Sit enim c circumferentia circuli P T Z P, & n numerus integer vel fractus revolutionum spiralis a puncto P ad punctum V inter circulos P D Z P, & I V N I, erit (153) $nc = x = bL.\frac{a}{y}$; & hinc $n = \frac{b}{c} \times L.\frac{a}{y}$. Quarè ob datas c; a & y; (per hyp.) erit n ut b, id est numerus revolutionum inter circulos datos ut subtangens spiralis S T, seu ut tangens anguli T P S, quem spiralis cum radio continet.

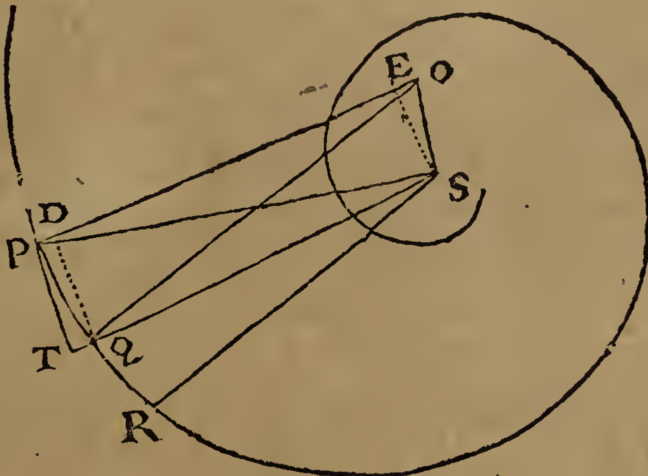
156. Spiralis post infinitos sibi superimpositos gyros comprehendit cum radio P S spatium duplum trianguli P S T. Iisdem enim positis quæ num. 153. cum sit (fig. pag. 142.) P S (a) : S T (b) = XK($-dy$) : V K $= -\frac{bdy}{a}$, erit sector SVK seu SVX $= -\frac{ybdy}{2a}$, & sumptis fluentibus, sector S P V $= Q - \frac{by^2}{4a}$; quia verò evanescente sectore S P V, fit $y = a$, erit $Q = \frac{ba^2}{4a}$, & hinc S P V $= \frac{baa - byy}{4a}$. Quarè ubi radius $y = o$, fiet area S P V $= \frac{ba}{4} = \frac{PS \times ST}{4} = \frac{1}{2}$ Triang. P S T.

LEM-

LEMMA III.

Sit P Q R *spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* S Q *in* T; *& ad spiralem erectis perpendiculis* P O, Q O *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico quod si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* $TQ \times 2PS$ *ad* P Q *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* subducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo circulus qui transit per puncta O, S, P transibit (y) etiam per punctum *Q*. Coëant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitûs *PQ* tanget spiralem, (z) ideoque perpendiculariter secabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & (a) linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, seu 2 *PO* ad 2 *PS*; item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2 *PO*; & ex æquo perturbatè *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2 *PS*. Unde fit *PQq* æquale $TQ \times 2PS$. *Q. E. D.*

PRO-

(y) * *Transibit etiam per punctum Q.* (per prop. 21. lib. 3. Elem.)

(z) *Ideòque perpendiculariter secabit rectam OP*, quæ (*per hyp.*) perpendicularis est ad arcum QP, fiet igitur OP diameter circuli hujus (*per prop.* 19. *lib.* 3. *Elem.*) & angulus OSP in semicirculo rectus (*per prop.* 31. *lib.* 3. *Elem.*).

(a) * *Et linearum rationes ultimæ.* Quoniam lineæ PT, DQ, ES ad PO normales, sunt parallelæ, erit (*per prop.* 10. *lib.* 6. *Elem.*) TQ : PD = TS vel PS : PE, & ob similitudinem triangulorum PSO, PES, PS : PE = PO : PS, seu 2 PO : 2 PS, ideoque TQ : PD = 2 PO : 2 PS. Quia verò radii OP, OQ sunt ad arcum eva- 156.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XV. Theor. XII.

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis; dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore lemmate, & producatur SQ ad V, ut sit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio resistente, describat corpus arcum quàm minimum PQ, & tempore duplo arcum quàm minimum PR; & decrementa horum arcuum ex resistentiâ oriunda, sive defectus ab arcubus, qui in medio non resistente iisdem temporibus describerentur, (b) erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcûs PQ pars quarta decrementi arcûs PR. (c) Unde etiam, si areæ PSQ æqualis capiatur area QSr,

evanescentem P Q perpendiculares, punctum O est centrum, P O radius & 2 P O diameter circuli spiralem osculantis in P (121. *lib.* 1.) & (*per lem.* 7. *lib.* 1.) P Q hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeo (ex naturâ circuli) abscissa P D est ad chordam P Q ut P Q ad diametrum 2 P O. Quare *ex æquo perturbatè* &c.

(b) * *Erunt ad invicem.* Cùm enim resistentia per arcum P R considerari possit tanquam vis retardatrix (4), decrementa arcuum minimorum P Q, P R ex resistentiâ oriunda sunt ut spatia quæ urgente vi acceleratrice resistentiæ æquali corpus describeret iisdem temporibus quibus describit arcus illos P Q, P R; Quarè decrementa illa sunt ut quadrata temporum quibus generantur (*per Lem. X. lib.* 1.).

(c) * *Undè etiam si areæ.* Corpus eâ velocitate quam habet in loco P, temporibus æqualibus describat arcus quàm minimos P q, q v, in medio non resisten-

QSr, erit decrementum arcûs PQ æquale dimidio lineolæ Rr; ideoque vis reſiſtentiæ & vis centripeta ſunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & TQ quas ſimul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, (d) eſt reciprocè vt SPq, & (*per* (e) *lem.* x. *lib.* 1.) lineola TQ, quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ deſcribitur (nam reſiſtentiam in hoc caſu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$, id eſt (per lemma noviſſimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicatâ temporis, (g) ideoque tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & (h) corporis velocitas, quâ arcus PQ illo tempore deſcribitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ſeu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc eſt, in ſubduplicatâ ratione ipſius SP reciprocè. Et ſimili argumento, velocitas quâ arcus QR deſcribitur, eſt in ſubduplicatâ ratione ipſius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut (i) velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in ſubduplicatâ ratione SQ ad SP, ſive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$;

&

te, & arcus P Q, Q R in medio reſiſtente, & erit (*ex dem.* ♥) 4 Q q = R v, ſunt autem areæ P S q & q S v æquales (*per prop.* 1. *Lib.* 1.) ideóque ob areas P S Q, & Q S r, etiam æquales (*per hyp.*) erit P S q — P S Q ſeu area Q S q æqualis q S v — Q S r, ſeu r S v — Q S q, & hinc area r S v æqualis eſt 2 Q S q; ſed demiſſis ex centro S ad tangentes Q T & r t per puncta Q & r ductas perpendiculis S T & s t, area evaneſcens Q S q eſt $\frac{1}{2}$ S T × Q q, & area r S v, eſt $\frac{1}{2}$ S t × r v. Quarè S T × Q q æquatur $\frac{1}{2}$ S t × r v, & coeuntibus punctis P & v, fit S t = S T atquè adeo Q q = $\frac{1}{2}$ r v, & 2 Q q = r v. Cùm igitur ſuprà invenerimus 4 Q q = R v, erit 4 Q q—2 Q q, ſeu 2 Qq = R v — r v = R r, & ideò Q q = $\frac{1}{2}$ R r. Itaque eodem tempore quo reſiſtentia generat decrementum Q q, ſeu $\frac{1}{2}$ R r, vis centripeta quâ corpus 156.
à tangente P T (*vid. fig. text.*) ad punctum Q arcûs P Q retrahitur, generat decrementum T Q, & ideò vis reſiſtentiæ eſt ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ R r ad T Q, (*per cor.* 4. *Lem. X.*) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcumque fuerit tum curva P Q R, cujus proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum reſiſtentia, tum velocitas corporis.

(d) * *Eſt reciprocè ut S P q* (per hyp.).

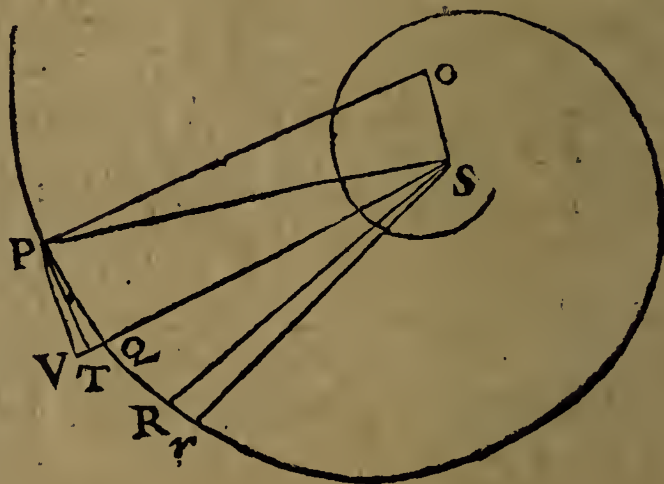
(e) * *Per Lem. X.* (cor. 3.).

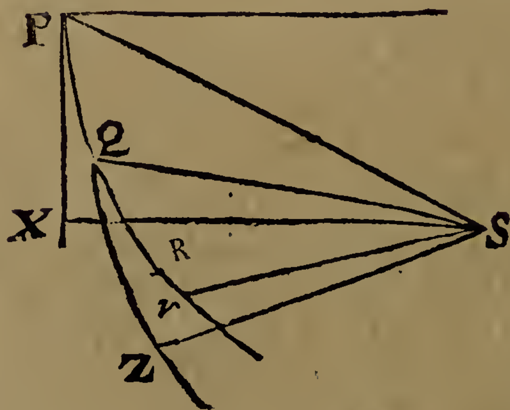
(g) * *Ideoque tempus.* (Neglectâ fractione datâ $\frac{1}{2}$ *eſt ut* &c.

(h) * *Et corporis velocitas.* (14).

(i) * *Ut velocitates deſcriptrices ad invicem* (11), quia arcus illi P Q, & Q R, æqualibus temporibus deſcribuntur (*per Hyp.*).

& (k) ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. (l) Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{2} VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ad $\frac{1}{2} VQ$ eſt (m) æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs PQ, ex reſiſtentiâ oriundum, ſive hujus duplum Rr, (n) eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; (o) erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad





(k) * *Et ob æquales angulos.* Ex centro S ad tangentes PX, QZ demiſſa ſint perpendicula SX, SZ, & areæ æquales PSQ & QSr, erunt $\frac{1}{2}$ SX × PQ, & $\frac{1}{2}$ SZ × Qr, ideóque SX ad SZ ut Qr ad PQ; ſed ob angulos rectos ad X & Z, & angulos æquales XPS & ZQS (*per lem.* 3.) ſimilia ſunt triangula SXP & SZQ, & ideò SX : SZ = SP : SQ, quare fit Qr : PQ = SP : SQ.

(l) * *Sumantur proportionalium &c.* Cùm enim ſit (*per dem.*) $PQ : SQ = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, & $PQ : SQ = Qr : SP$; erit etiam $Qr : SP = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, unde erit $PQ : SQ = Qr - QR$ ſeu $Rr : SP - \sqrt{SP \times SQ}$, & hinc $PQ : Rr = SQ$:

(m) * *Eſt æqualitatis.* Eſt enim $SQ = SP - VQ$, & proindè $SP \times SQ = SP^2 - SP \times VQ$, ideoque extrahendo radicem quadratam (per formulam lib. 1. 551.) fit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ - \frac{VQ^2}{8\,SP}$ — &c., in infinitum; cæteri verò termini poſt ſecundum negligi poſſunt, quia coeuntibus P & Q, evaneſcunt reſpectu VQ, & ideò erit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ$, ac proindè $\frac{1}{2} VQ = SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(n) * *Eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (Per cor. 3. Lem. X. lib. 1.)

(o) *Erit reſiſtentia &c.* Nam tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$ (*ex Dem.*).

ad $\frac{1}{2} VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ five ut $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & (p) ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2} VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2} OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia; (q) id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis; & (r) ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia à centro SP, corpus gyrari potest in hâc spirali. *Q. E. D.*

Corol.

(p) * *Et ob similia triangula* PVQ, PSO, angulus PSO (*per Lemma novissimum*) rectus est & ideò æqualis angulo etiam recto PVQ, & prætereà si ex angulis rectis QPO & VPS subducatur communis angulus QPS, remanent æquales VPQ & SPO; Quarè triangula PVQ & PSO sunt similia.

(q) * *Id est in ratione &c.* (per Hyp.) 156.

(r) * *Ob datam rationem* OS *ad* OP. Datâ spirali datur angulus QPS & hinc in Triangulo SPO datur angulus SPO cum isto QPS rectum faciens, datur etiam rectus PSO (*per Lem.* 3.) atquè ideò trianguli POS anguli omnes dantur, & proindè datur ratio OS ad OP.

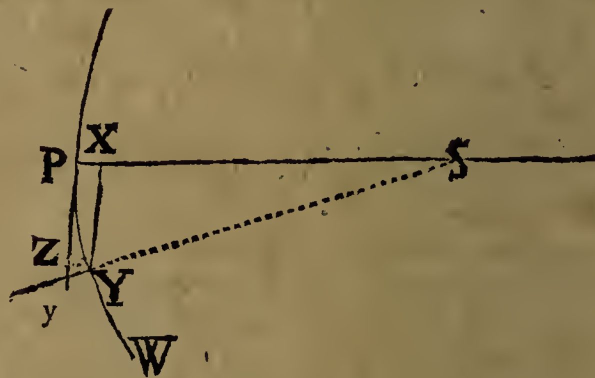
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XV. Theor. XII.

Corol. 1. (f) Velocitas in loco quovis *P* ea semper est, quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo, ad eandem à centro distantiam *S P*.

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia *S P*, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et (t) inde spiralis ad quamlibet medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis *P*, est ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$ *O S* ad *O P*. Nam vires illæ sunt

(f) * *Velocitas in loco quovis P &c.* * Gyretur corpus in medio non resistente in circulo P W radio P S descripto, in eoque retineatur vi centripetâ quæ sit eadem cum illâ qua corpus urgetur in puncto P spiralis (*vide fig. textûs*). Sumatur in radio P S particula P X æqualis T Q, sive spatio quod generatur per vim centripetam quâ corpus retinetur in spirali in P, ductâque tangente P Z, è puncto Y ducatur per centrum linea S Y y ad Tangentem usque; Y y erit spatium quod generatur per vim centripetam quâ corpus in circulo retinetur, sed coëuntibus punctis P & Y, linea y Y fit ultimò parallela lineæ P S, ideoque y Y fit æqualis particulæ P X, sive T Q. Cùm ergo eadem sit vis centripeta tam in Circulo quàm in spirali, & spatia æqualia y Y & T Q ab illâ vi centripeta generentur, æquali tempore utrinque generabuntur, unde eodem tempore quo corpus in spirali in Q pervenerit, eo ipso tempore perveniet in Y in circulo, velocitas ergo in spirali erit ad velocitatem in hoc circulo ut est arcus P Q ad arcum P Y, sed ex naturâ spiralis per Lemma III. est $PQ = \sqrt{TQ \times 2PS}$, & ex naturâ circuli est $PY = \sqrt{PX \times 2PS}$ & ex constructione cùm sit $PX = TQ$ erit $PY = \sqrt{TQ \times 2PS}$ ergo $PQ = PY$, ergo velocitas in loco quovis spiralis ea est quâcum corpus eâdem vi centripetâ in medio non resistente ad eandem à centro distantiam gyrari potest.



(t) * *Et inde spiralis &c.* * Fingantur duo media diversæ densitatis, talia tamen ut in singulo medio densitas in locis diversis sit reciprocè ut distantia locorum à centro. Sumptâ verò in utroque æquali à centro distantiâ S P, sit ratio densitatis prioris medii ad densitatem posterioris in eo loco ut *a* ad *b*, ea ratio eadem erit in aliâ quâcumque distantiâ à centro, putà in distantiâ S X. Nam in utroque medio densitas in P erit ad densitatem in X ut $\frac{1}{SP}$ ad $\frac{1}{SX}$; Itaque si in priore medio densitas in *P* fuerit ut *a*, densitas in X erit ut $\frac{a \times SP}{SX}$, & si in secundo medio densitas in P fuerit ut

sunt ad invicem ut $\frac{1}{2} R r$ & $T Q$ sive (u) ut $\frac{\frac{1}{4} V Q \times P Q}{S Q}$ & $\frac{\frac{1}{2} P Q q}{S P}$ hoc est, ut $\frac{1}{2} V Q$ & $P Q$, seu (x) $\frac{1}{2}$ $O S$ & $O P$. (y) Datâ igitur spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & vice versâ ex datâ illâ proportione datur spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc spirali, (z) nisi ubi vis resistentiæ minor est quàm dimidium vis centripetæ.

ut b densitas in X erit ut $\frac{b \times SP}{SX}$, est verò $\frac{a SP}{SX}$ ad $\frac{b \times SP}{SX}$ ut a ad b, ergo in his duobus mediis densitates erunt ubique in datâ ratione a ad b, in æqualibus à centro distantiis.

Si itaque data sit spiralis quæ in medio priore describitur; inveniri poterit illa quæ in posteriore medio describi posset; nam sumpta distantia quâvis S P, fiat a ad b ut $\frac{OS}{OP}$ ad $\frac{b \times OS}{a \times OP}$ hæc erit ratio quæ in hâc novâ spirali intercedet inter lineas, lineis O S & O P correspondentes, sive quia angulus S in Triangulo O S P est rectus, hæc erit ratio inter sinum anguli quem facit linea P S cum perpendiculari ad curvam, & Radium; quo sinu dato ejusque angulo, spiralis obtinetur ad hanc medii densitatem aptata.

Ex quibus illustratur quod præcedit in hoc ipso Corollario, si duæ spirales in diversis mediis describantur, mediorum densitates in eadem distantia erunt ut $\frac{OS}{OP}$, sed si distantiæ à Centro diversæ sumantur, Ratio inversa distantiarum est huic conjungenda, eruntque ideo mediorum densitates ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(u) * *Sive ut &c.* Nam (per Dem.) $PQ : Rr = SQ : \frac{1}{2} VQ$, & (per Lem. 3.) $TQ = \frac{PQ^2}{2 PS}$, & punctis Q & P coeuntibus, est $SQ = SP$. 156.

(x) * *Seu* $\frac{1}{2} O S$ & $O P$. Quia triangula P V Q, P S O similia sunt (ex Dem.) est $\frac{1}{2} VQ : PQ = \frac{1}{2} OS : OP$.

(y) * *Datâ igitur spirali.* Nam datâ spirali datur specie triangulum P S O (ex Dem.) & indè datur ratio O S ad O P, & viceversâ datâ hâc ratione, datur specie triangulum rectangulum P S O, & hinc datur angulus P O S æqualis angulo Q P S quem spiralis cum radio continet, ideóque datur spiralis. Iis enim datis & assumpto ut libet radio S P, dabitur subtangens spiralis Logarithmicæ, seu tangens anguli Q P S; & hinc dato angulo quovis P S R, dabitur radius S R cum puncto R in spirali (153).

(z) * *Nisi ubi vis resistentiæ minor est &c.* Cùm enim vis resistentiæ sit ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP, & ad dimidium vis centripetæ ut $\frac{1}{2}$ O S ad $\frac{1}{2}$ O P, seu ut O S ad O P, sitque trianguli rectanguli P S O (Lem. 3.) crus O S minus hypothenusâ O P, manifestum est vim resistentiæ minorem esse dimidiâ vi centripetâ.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

tæ. (a) Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, & spiralis conveniet cum lineâ rectâ *P S*, inque hac rectâ corpus descendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, quâ probavimus in superioribus in casu parabolæ (*theor.* x. *lib.* 1.) descensum in medio non resistente fieri, in (b) subduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium. (c) Et tempora descensûs hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro distantiis velocitas (d) eadem est in spirali *P Q R* atque in rectâ *S P*, & lon-

(a) * *Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ &c.* Ideóque O S æqualis O P, & puncto O in infinitum abeunte, fiet O P perpendicularis ad S P, & angulus P O S ipsique æqualis angulus Q P S quem spiralis continet, cum radio P S evanescet, convenietque proindè spiralis cum lineâ rectâ P S.

(b) * *In subduplicatâ ratione unitatis*, Nam (*in theor. X. lib.* 1.) corporis in medio non resistente rectâ cadentis velocitas in loco quovis P æqualis est velocitati quâ corpus ad distantiam dimidiam à centro, seu ad distantiam $\frac{1}{2}$ S P circulum describere potest, & (*per cor.* 1. *hujus*) corporis in medio resistente spiralem seu rectam P S cum quâ spiralis convenire supponitur describentis velocitas in eodem loco P æqualis est velocitati quâcum corpus in medio non resistente gyrari potest in circulo ad integram distantiam S P. Sed velocitates corporum diversos circulos describentium) in hypothesi quòd vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum) sunt inter se reciprocè in Radiorum ratione subduplicatâ (*pro convers. cor.* 6. *prop.* 4. *lib.* 1.) adeóque velocitas in circulo cujus radius S P est ad velocitatem in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, sive ut 1. ad $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio resistente per rectam P S descendentis ad velocitatem descendentis in medio non resistente per rectam eandem & in eodem loco P existentis, ut 1 ad $\sqrt{2}$. Q. E. D.

* Observandum verò quòd velocitates initiales utrinque debent esse secundùm Legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc est velocitas initialis in medio resistente esse debet æqualis celeritati quâ corpus ad eamdem à centro distantiam in medio non resistente circulum describeret, & velocitas initialis in medio non resistente æqualis esse debet velocitati quâ corpus ad dimidiam à centro distantiam in medio non resistente in circulo revolveretur.

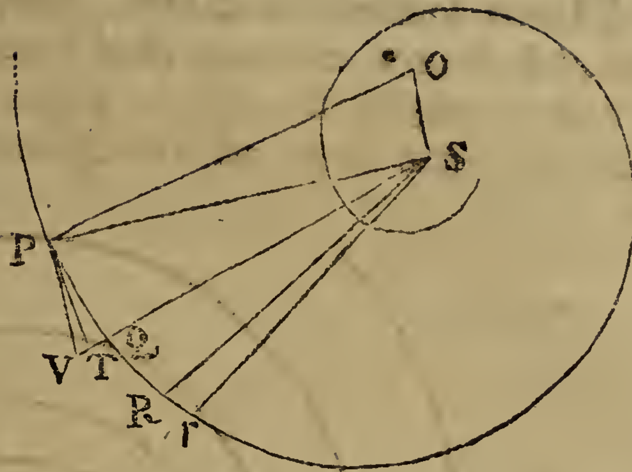
Quoniam itaque velocitas corporis in medio non resistente descendentis datur (*per theor.* X. *lib.* 1.) dabitur etiam velocitas in medio resistente descendentis.

(c) * *Et tempora descensûs, hic erunt reciprocè ut velocitates, atquè ideò dantur.* Nam momenta temporis quibus corpora duo in medio resistente & in eodem non resistente describunt spatium idem quam minimum R r, sunt ut corporum velocitates reciprocè (12) id est ut $\sqrt{2}$ & 1 directè (per modò demonstrata) adeóque in datâ ratione. Quarè (*per cor. Lem.* 4. *lib.* 1.) tempora tota quibus corpora illa idem spatium quodvis P R describunt, sunt etiam in eâdem datâ ratione $\sqrt{2}$ ad 1, seu ut velocitates reciprocè. Cùm igitur (*per prop.* 36. *&* 37. *lib.* 1.) detur tempus quo corpus in medio non resistente cadendo spatium quodlibet describit, dabitur quoque tempus quo corpus in medio resistente spatium quodvis datum cadendo percurrit.

P R r S

(d) *Eadem est in spirali.* (Per cor. 1. hujus.

longitudo ſpiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in datâ ratione, (e) nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſûs in ſpirali erit ad tempus deſcenſûs in rectâ SP in (f) eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.



Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus quem ſpiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in ſpirali à circumferentiâ ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut (g) $\frac{PS}{OS}$, ſive ut tangens anguli illius quem ſpiralis continet cum radio PS; (h) tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciprocè ut medii denſitas.

Cor-

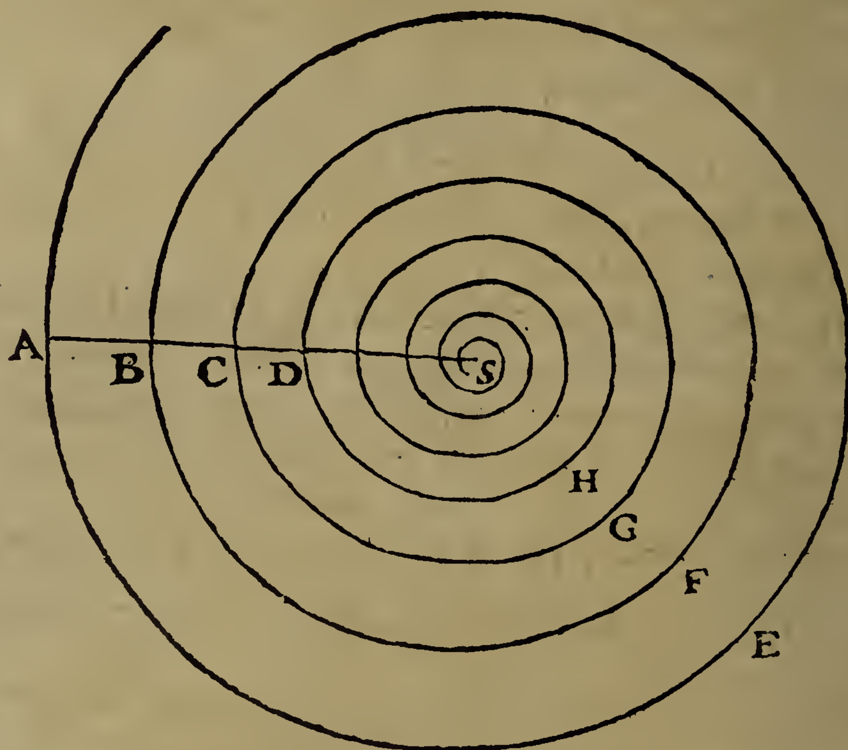
(e) * *Nempè in ratione O P ad O S* (151).

(f) * 157. *Id eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus & uniformibus deſcripta ſunt ut tempora quibus deſcribuntur; undè ſi ſpiralis P Q R & recta P S, diviſæ intelligantur in partes quam minimas totis proportionales, quod fit dum puncta diviſionum in ſpirali & in radio P S à centro S æquidiſtant (152) tempora quibus partes illæ quam minimæ in ſpirali & in rectâ P S homologæ deſcribuntur, erunt ut eædem partes, ſeu in datâ ratione, ſiquidem velocitas in ſpirali & in recta P S in iis punctis à centro æquidiſtantibus ſunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem diſtantiam in circulo revolventis; ideóque (*per cor. lem.* 4. *lib.* 1.) totum tempus deſcenſûs in ſpirali erit ad totum tempus deſcenſûs in rectâ P S per ſpatia homologa in datâ illâ ratione longitudinis nempe ſpiralis ad longitudinem P S, ſeu in ratione O P ad O S. 157.

(g) * *Eſt ut* $\frac{PS}{OS}$ *ſivè ut tangens anguli &c.* (155). Si autem ſinus totus ſit 1, cum ſit O S, ad P S, ut ſinus totus ad tangentem anguli P O S, ſeu anguli æqualis Q P S, erit tangens illa $\frac{PS}{OS}$.

(h) * *Tempus verò revolutionum earumdem ut* $\frac{OP}{OS}$, *id eſt, ut ſecans &c.* Eſt enim tempus illud revolutionum inter circulos duos datos, ad tempus deſcenſûs per partem datam rectæ P S inter circulos contentam ut longitudo revolutionum illarum ad partem hanc rectæ P S, circulis duobus interceptam (157); ſed mutato utcumque angulo quem ſpiralis continet cum

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro, revolutionem in curvâ quâcunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & radium primum *AS* in eodem angulo ſecuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in *A* reci-



procè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro (id eſt, ut *AS* ad mediam proportionalem inter *AS* & *BS*) (i) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet radium *AS* in partes

cum radio P S longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehenſa eſt ut ſecans anguli illius (152). Quarè cùm datum ſit tempus deſcenſûs per partem datam rectæ PS inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut ſecans anguli quem ſpiralis continet cum radio P S ſeu ut $\frac{OP}{OS}$; Si enim ſinus totus ſit 1, erit O S ad O P ut 1 ad ſecantem anguli P O S ſeu Q P S, & ideò ſecans eſt $\frac{OP}{OS}$. Porrò datâ rectâ P S, denſitas eſt ut $\frac{OP}{OS}$ reciprocè (*per cor.* 2. *hujus*). Ergò &c.

(i) * *Corpus illud perget &c.* Centro S & radio dato S A deſcripta intelligatur ſpiralis Logarithmica quæ primâ revolutione abſolutâ, tranſeat per punctum B datum in radio S A (153.) & ſpiralis illa ſuis ſemper ſimilibus revolutionibus diſtinguet radium A S in partes A S, B S, C S, D S &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quòd iiſdem poſitis quæ (*in*

tes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inversè; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}$ AS ad AB quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

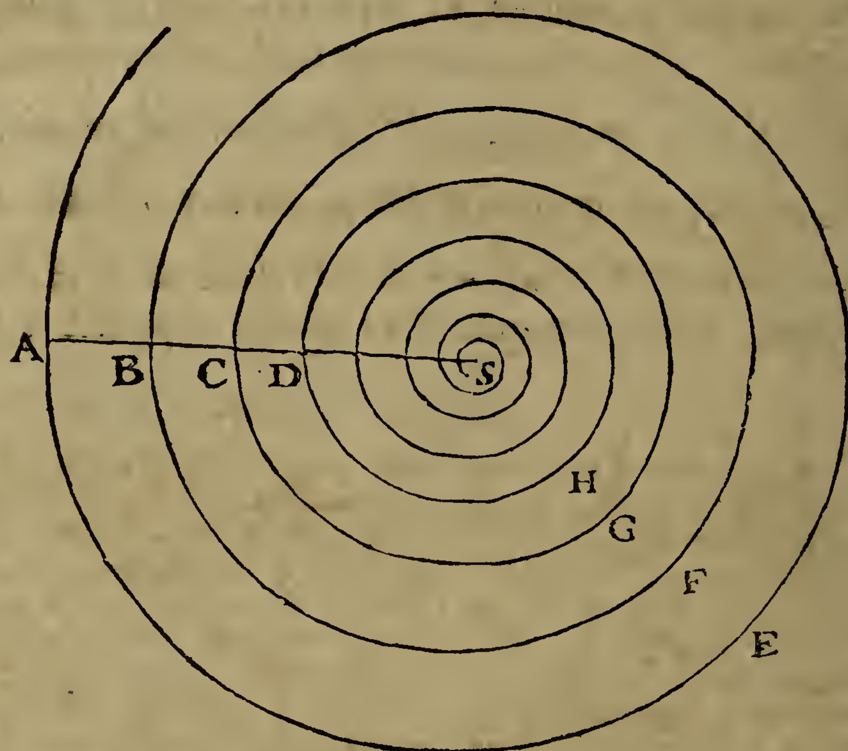
Co-

(*in prop.* 15.) corpus aliquod P in medio justæ densitatis spiralem illam Logarithmicam describat, dum corpus aliud Q in alio medio describit curvam A E B F C S & in iisdem à centro S distantiis densitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio sit (*per hyp. cor. hujus* & *per prop.* 15) densitas in loco A ad densitatem in loco B, ut S B ad S A. Simili modo velocitates corporum P & Q in loco B, erunt ut eorumdem velocitates in loco A, *per prop.* 15. *& hyp. coroll. hujus*) ideóque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corporâ P & Q urgentur, sunt in utroque medio iisdem in locis eædem (*per hyp.*), & tandem ob angulos datos quos tam spiralis Logarithmica, quàm curva A E B continet cum radio A S, directiones motuum in utrâque curvâ pares sunt in locis A & B; Quarè postquam corpus Q primâ revolutione A E B absolutâ, pervenit in B, per quod punctum transit etiam spiralis Logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P secundam suam revolutionem absolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmularetur motum corporis ejusdem P primam suam revolutionem perficientis; cùm (*per dem.*) omnia paria sint in locis B & A videlicet mediorum densitates, corporum velocitates, directiones, viresque centripetæ. Quoniam igitur secunda spiralis Logarithmicæ revolutio à puncto B ad punctum C priori à puncto A ad punctum B absolutæ similis est (150), necessum est ut secunda quoque curvæ revolutio B F C priori A E B sit similis; Et simili modo ostendetur revolutiones omnes B F C, C G D &c. & motus corporis Q eas absolventis esse inter se similes. Erunt igitur revolutiones A E B, B F C, C G D &c. ut radii A S, B S, C S &c. id est, continuè proportionales, & ob similitudinem motuum in similibus revolutionibus A E B, B F C &c. si ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas secans in F, E, G &c. quæ erunt in revolutionibus A E B, B F C &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, & proinde velocitas in E ad velocitatem in B, ut velocitas in A ad velocitatem in B, id est, (*per hyp. cor. hujus*) ut $BS^{\frac{1}{2}}$ ad $AS^{\frac{1}{2}}$; sed tempora quibus spatia homologa quam minima in locis E & F describuntur sunt ut spatia illa directè & velocitates inversè (12); Quare cùm spatia homologa in locis E & F sint ut radii A S & B S, & velocitates ibidem ut $AS^{\frac{1}{2}}$ & $BS^{\frac{1}{2}}$ inversè (*ex dem.*) tempus quo spatium minimum revolutionis A E B describitur est ad tempus quo describitur spatium homo- 157.

lo-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro *S*, in-



tervallis continuè proportionalibus *SA*, *SB*, *SC*, &c. deſcribe circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter peri-

logum revolutionis ſimilis B F C ut $AS \times AS^{\frac{1}{2}}$ ad $BS \times BS^{\frac{1}{2}}$, id eſt, ut $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$, ideóque in datâ ratione. Undè (*per cor. lem.* 4. *lib.* 1.) tempus totum quo corpus Q primam ſuam revolutionem A E B abſolvit eſt ad tempus quo ſecundam revolutionem B F C, perficit in eâdem ratione $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$. Et ſimili argumento liquet tempora revolutionum B F C, C G D &c. eſſe inter ſe ut ſunt $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ &c. Cùm igitur revolutionum tempora ſicut quantitates $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$, &c. progreſſionem geometricam in infinitum decreſcentem conſtituant, tempus totum quo corpus Q, perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ A E B ut ſumma omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$ &c. pergentium, in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; porrò ſumma illa eſt ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempè $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$. Nam ſcribatur ſic terminorum ſeries, $AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}} = BS^{\frac{3}{2}} : CS^{\frac{3}{2}}$ $= CS$

perimetros duorum quotumvis ex his circulis, in medio (k) de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito; ut (l) medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quàm proximè: Sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium *A S*, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: (m) Atque etiam ut sunt eorumdem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. Si (n) hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad (o) formam ovalium accedentibus peragantur; tamen conci-

$= CS^{\frac{3}{2}} : DS^{\frac{3}{2}}$, &c. in infinitum, & ultimo progressionis termino evanescente, erit summa antecedentium, id est, summa omnium terminorum quæ dicatur *S* ad summam consequentium, seu summam omnium terminorum dempto primo, ut primus ad secundum, hoc est $S : S - AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}}$; undè habetur dividendo $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$; Est autem $BS = AS - AB$, & ideò $BS^{\frac{3}{2}} = (AS - AB)^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB + \frac{3}{8} \times \frac{AB^2}{AS^{\frac{1}{2}}} -$ &c. in infinitum (551. *lib.* 1.). Quapropter si distantia A B minima fuerit, respectu radii A S, fiet $BS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB$, quàm proximè, neglectis nimirum cæteris terminis ferè evanescentibus; erit igitur $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB = \frac{2}{3} AS : AB$ quàm proximè; Et hinc dato tempore revolutionis primæ A E B, tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, A S ad A B ut 300000 ad 1, & tempus primæ revolutionis = 1, erit tempus totum = 200000, quàm proximè. 157.

(k) * *In medio de quo egimus.* (In prop. 15. & cor. ejus), cujus nimirum densitas est reciprocè ut distantia locorum à centro.

(l) * *Ut medii propositi densitas* (per cor. 6. hujus) supponendo spirales Logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio descriptas.

(m) * *Atquè etiam ut sunt &c.* Per cor. 6. hujus.

(n) * *Si hæc fiant passim inter circulos binos*, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, seu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus seriei regularis terminis, cognoscitur lex quâ illa progreditur, *atquè hoc pacto &c.*

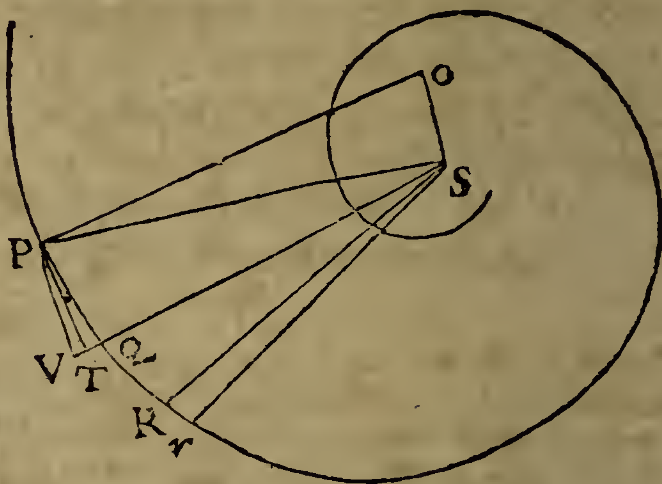
(o) * *Ad formam ovalium accedentibus &c.* Sunt enim spirales quarum revolutiones singulæ ferè concentricæ sunt & ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutiones accedunt ad formam ova-

lium

cipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcriptâ, (p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Demonſtratur eâdem methodo cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciprocè ut diſtantiæ SP, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$: (q) colligetur ut ſupra, quòd tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^{n}}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^{n} \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cùm velocitas ſit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciprocè ut SP.

Co-

lium centro ſpiralis pro ellipſeos vel ovalis foco accepto.

(p) * *Intelligemus etiam* (ut in cor. 8°.) *quomodò &c.*

(q) * *Colligetur ut ſuprà &c.* Quæcumque enim ſit vis centripeta, illa eſt ad vim reſiſtentiæ ut T Q ad $\frac{1}{2}$ R r (*per dem. prop.* 15.). Quoniam igitur vis centripeta quâ corpus urgetur in P, eſt reciprocè ut SP^{n+1}, & (*per cor. Lem. X. lib.* 1.) lineola T Q quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus P Q deſcribitur; erit $TQ \times SP^{n+1}$, id eſt, (*per Lem.* 3.) $\frac{1}{2} PQ^{2} \times SP^{n}$, in ratione duplicatâ temporis, ideóque tem-

Corol. 1. (r) Reſiſtentia eſt ad vim centripetam ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP. DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVI. THEOR. XIII.

Corol. 2. Si vis centripeta ſit reciprocè ut SP *cub.* (s) erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque reſiſtentia & denſitas medii nulla erit, ut in propoſitione nonâ libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta ſit reciprocè ut dignitas aliqua radii SP cujus index eſt major numero 3, reſiſtentia affirmativa (t) in negativam mutabitur.

Scho-

tempus eſt ut $PQ \times SP^{\frac{n}{2}}$, & corporis velocitas quâ arcus PQ illo tempore deſcribitur ut $\frac{PQ}{PQ\times SP^{\frac{n}{2}}}$, ſeu $\frac{1}{SP^{\frac{n}{2}}}$; & ſimili argumento velocitas quâ arcus QR deſcribitur eſt ut $\frac{1}{SQ^{\frac{n}{2}}}$; ſunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates deſcriptrices ad invicem, id eſt, in ratione $SQ^{\frac{n}{2}}$ ad $SP^{\frac{n}{2}}$, & (*per dem. prop.* 15.) arcus Qr, eſt ad arcum PQ ut SP ad SQ; Quarè (per compoſitionem rationum & ex æquo) $Qr : QR = SP \times SQ^{\frac{n}{2}} : SQ \times SP^{\frac{n}{2}} = SQ^{\frac{1}{2}n-1} : SP^{\frac{1}{2}n-1}$, & ſumptis terminorum differentiis $Qr : Rr = SQ^{\frac{1}{2}n-1} : SQ^{\frac{1}{2}n-1} - SP^{\frac{n}{2}-1}$. Quia verò $SP = SQ + VQ$, ideóque (549. *lib.* 1.) $SP^{\frac{1}{2}n-1} = SQ^{\frac{1}{2}n-1} + \overline{\frac{1}{2}n-1} \times VQ \times SQ^{\frac{1}{2}n-2}$ + &c., neglectis reliquis terminis reſpectu priorum evaneſcentibus, erit $SQ^{\frac{1}{2}n-1} - SP^{\frac{1}{2}n-1} = (1-\frac{1}{2}n) \times VQ \times SQ^{\frac{1}{2}n-2}$, atque adeò $Qr : Rr = SQ : (1-\frac{1}{2}n) VQ$. Erat autem $PQ : Qr = SQ : SP$; undè (ex æquo) fit $PQ : Rr = SQ^2 : (1-\frac{1}{2}n) VQ \times SP$, & hinc $Rr = \frac{(1-\frac{1}{2}n) VQ \times SP \times PQ}{SQ^2} = \frac{(1-\frac{1}{2}n) \times VQ \times PQ}{SQ}$, ob $SP = SQ$, ubi puncta Q & P coeunt.

Quoniam decrementum arcûs PQ ex reſiſtentiâ oriundum, ſivè hujus duplum Rr, eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim, erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$; id eſt, ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n) VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$. Sivè ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n) OS}{OP \times SP^{n+1}}$ (quia $VQ : PQ = OS : OP$ ex dem. prop. 15.) hoc eſt, ob datum $\frac{(1-\frac{1}{2}n) OS}{OP}$ ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$. Et proptereà cùm velocitas (*ex dem.*) ſit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$, ſi ex reſiſtentiâ auferatur duplicata velocitatis ratio $\frac{1}{SP^n}$, manebit medii denſitas in P, ut $\frac{1}{SP}$, ſeu reciprocè ut SP. 157.

(r) * *Reſiſtentia eſt ad vim centripetam.* Nam vires illæ ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ, ſivè ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n) VQ \times PQ}{2SQ}$ & $\frac{PQ^2}{2SP}$, hoc eſt, ut $(1-\frac{1}{2}n) VQ$ & PQ, ſeu $(1-\frac{1}{2}n) OS$ & OP.

(s) * *Erit* $1-\frac{1}{2}n=0$. Cùm enim (*per hyp.*) ſit $n+1=3$; erit $n=2$, $\frac{1}{2}n=1$ & $1-\frac{1}{2}n=0$.

(t) * *In negativam mutabitur.* Tum enim $n+1$, erit numerus ternario major, & ideò n binario major, & hinc $1-\frac{1}{2}n$, numerus negativus.

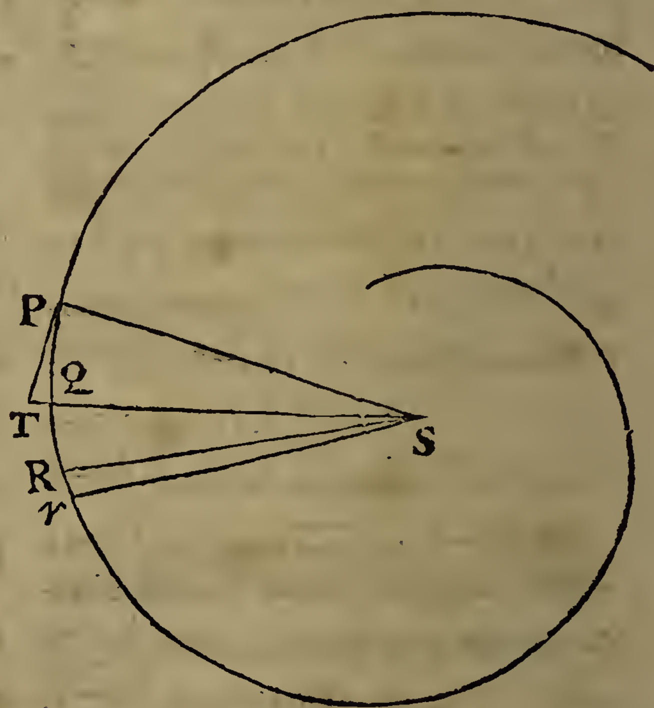
Co-

Scholium.

Cæterum hæc propositio & superiores, quæ ad media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut medii ex uno corporis latere major densitas quàm ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in mediis, quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui; ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA VI.

Invenire & vim centripetam & medii resistentiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege, revolvi potest.



Sit spiralis illa PQR. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum PQ, dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia

Coroll. 4. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP}$; sin distantia illa non datur ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP\times SP}$, seu ob datum numerum $1-\frac{1}{2}n$; ut $\frac{OS}{OP}$, vel $\frac{OS}{OP\times SP}$.

Coroll. 5. Quoniam (*per cor.* 1. *prop.* 15.) mutato utcumque spiralis angulo, ità ut

$R\,S\,r$, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac (u) densitas medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut (x) in propositione superiore.

Methodum verò tractandi hæc problemata aperui in hujus propositione decimâ, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

ut etiam evanescat, & spiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quo vis P ea semper est quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo ad eandem à centro distantiam S P (*per Const.* 1. *Cor.* 7. *Prop.* IV. *lib.* 1.) liquet (*per cor.* 6. *prop.* 15. & 152.) tempora descensûs à puncto dato P ad centrum usque S, fore etiam (*in hyp. prop.* 16.) ut spiralium variarum longitudines; quod observavit *Joannes Bernoullius* in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

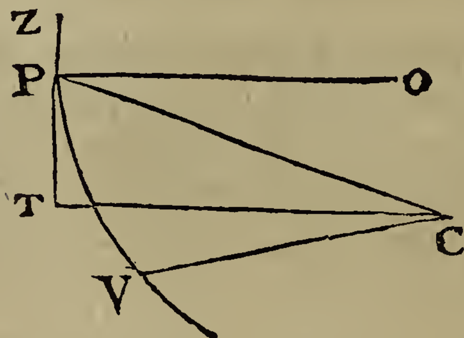
(u) * *Ac densitas medii.* Sit, exempli causâ, curva P Q R spiralis Logarithmica & velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{SP^m}$, erit tempus quo describitur arcus P Q, ut $PQ \times SP^m$ (12); vis autem centripeta quæ (*per cor.* 4. *Lem.* X. *lib.* 1.) est ut Lineola T Q directè & quadratum temporis inversè erit ut $\frac{TQ}{SP^2 \times SP^{2m}}$, id est, (*per Lem.* 3. *hujus*) ut $\frac{1}{SP^{2m+2}}$. Inventis tempore & velocitate, invenietur (*ut in not. ad prop.* 16.) resistentia ut $\frac{(1-m)\,VQ}{SQ \times PQ \times SP^{2m}}$, sivè ut $\frac{(1-m)\,OS}{OP \times SP^{2m+1}}$, & auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{SP^{2m}}$ erit densitas ut $\frac{(1-m)\,OS}{OP \times SP}$, sive ut $\frac{1}{SP}$.

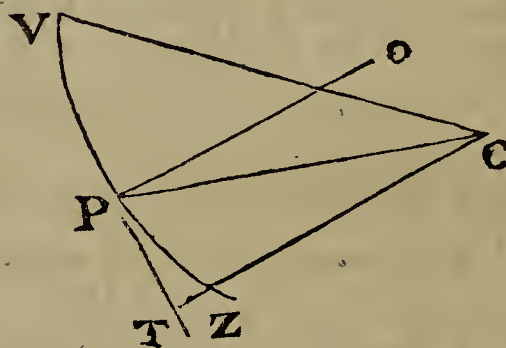
(x) * *Ut in propositione superiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$ & quoniam T Q est ut vis centripeta & quadratum temporis quo describitur arcus P Q, erit $TQ \times SP^{n+1}$, id est, (*per Lem.* 3.) $PQ^2 \times SP^n$ ut quadratum temporis, ideoque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & corporis velocitas quâ arcum P Q illo tempore describit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore & velocitate, invenietur resistentia & densitas ut in notâ superiore. 157.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROBL. V.

PROBLEMA.

Vis centripeta tendens ad datum punctum C sit in loco quovis P ut distantiæ CP dignitas CP^n reciprocè, & medii resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas quælibet conjunctim; requiritur tum medii densitas in locis singulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ V P Z moveatur, tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.



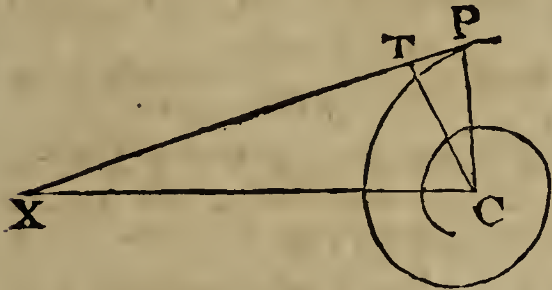


158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, resistentia r, medii densitas k, velocitas corporis v, distantia P C, y, radius P O circuli curvam osculantis in P, R, arcus V P s; perpendiculum C T in tangentem P T ductum p, & a, b, n, m, quantitates datæ, erit (*per hyp.*) $g = \frac{a}{y^n}$, & $r = \frac{kv^m}{b}$, sed est semper (27) $vv = \frac{Rpg}{y} = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26.) $r = \frac{-vdv - gdy}{ds} = \frac{-vdv}{ds} - \frac{ady}{y^n ds}$, vel etiam (*ibid.*) $\pm r = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp} - gdy \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} - \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}$. Quarè si in alterutrâ harum æquationum loco $v\,dv$ scribatur ipsius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $vv = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$, obtinebitur resistentia r, seu $\frac{kv^m}{b}$, ejusque valore diviso per $\frac{v^m}{b}$ quod datum est inventâ velocitate v, dabitur medii densitas k. Q. E. I.

159. Exemplo sit spiralis Logarithmica. In illâ ob datum angulum T P C datur ratio P C ad C T seu y ad p; sit ergò $c : a = y : p$, & ideò $p = \frac{ay}{c}$; atque $dp = \frac{ady}{c}$, & erit $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{pc}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$. Et his verò habetur $\sqrt{yy - pp} = \frac{y\sqrt{cc-aa}}{c}$, & $vdv = \frac{(1-n)ady}{2y^n}$, undè pro corporis descensu invenitur $r = \frac{(3-n)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$; & pro ascensu $r = \frac{(n-3)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$, ideoque resistentia est reciprocè ut y^n. Cùm autem (*per hyp.*) sit $r = \frac{kv^m}{b} = \frac{ka^{\frac{m}{2}}}{by^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit densitas k ut $ry^{\frac{mn-m}{2}}$, seu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, & hinc si ponatur $m = 2$, erit densitas k, ut y^{-1}, seu ut $\frac{1}{y}$, prorsus ut (*in prop.* 16.) demonstratum est.

160. *Coroll.* 1. Per superiores æquationes (158). ex datâ corporis velocitate inve-

invenitur tum vis centripeta, tum resistentia & medii densitas. Est enim $g=\frac{vvy}{Rp}=\frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ & celeritate, invenitur tum resistentia r, tum medii densitas k, ut supra (158).



161. Exemplum sit in spirali hyperbolicâ cujus hæc est proprietas ut si per centrum C erigatur ad radium CP, perpendicularis CX tangenti PX per P ductæ occurrens in X sit subtangens illa CX constans. Velocitas sit ut tangens PX, & resistentia r ut densitas medii & quadratum velocitatis conjunctim, hoc est $r=\frac{kv^2}{b}$, dicaturque CX, c, & ideò PX$=\sqrt{yy+cc}$, atque (*per hyp.*) $v=\frac{e\sqrt{yy+cc}}{c}$, & e, quantitas data. Erit ob triangula CPT, XPC similia, PX $(\sqrt{yy+cc})$: CX (c) = PC (y) : CT (p), & ideò $p=\frac{cy}{\sqrt{yy+cc}}$, $dp=\frac{c^3dy}{\overline{yy+cc}^{\frac{3}{2}}}$, & $\sqrt{yy-pp}=\frac{yy}{\sqrt{yy+cc}}$. Quarè fiet (160) $g=\frac{vvdp}{pdy}=\frac{e^2}{y}$; id est, vis centripeta ut distantia PC reciprocè. Quia verò $vv=\frac{ee}{cc}\times(yy+cc)$ erit $vdv=\frac{eeydy}{cc}$ & propterea pro corporis descensu $r=\frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy}+\frac{g\sqrt{yy-pp}}{y}=\frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+cc}}+\frac{e^2}{\sqrt{yy+cc}}=\frac{e^2\times\overline{yy+cc}}{cc\sqrt{yy+cc}}=\frac{e^2}{c^2}\times\sqrt{yy+cc}$, adeóque resistentia ut tangens PX, seu ut velocitas. Cùm igitur sit $r=kv^2=\frac{ke^2}{cc}\times(yy+cc)=\frac{e^2}{cc}\times\sqrt{yy+cc}$, erit densitas medii $k=\frac{1}{\sqrt{yy+cc}}$, seu reciprocè ut tangens PX sivè reciprocè ut velocitas. 161.

162. *Coroll.* 2. Datâ medii densitate & concessis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta & corporis velocitas. Est enim (27. & 160.) $vdv+\frac{vvdp}{p}=-rds=-\frac{kv^m ds}{b}$ (158) & dividendo per v^m, & multiplicando per p^{2-m}, fit $p^{2-m}v^{1-m}dv+v^{2-m}p^{1-m}dp=-\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, & sumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m}\times p^{2-m}\times v^{2-m}=-S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideòque $v^{2-m}=(m-2)\frac{S.kp^{2-m}ds}{b\times p^{2-m}}$. Quare si densitas medii k, sit ut functio quævis distantiæ PC à centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, & loco ds, scribi potest $\pm\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g=\frac{vvdp}{pdy}=\frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. *Corol.* 3. Si in superiori corollario sit $m=2$, id est, resistentia ut densitas & quadratum velocitatis conjunctim, erit $2-m=0$, & æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv+v^{2-m}p^{1-m}dp=-\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v}+\frac{dp}{p}=-\frac{kds}{b}$; undè sumptis fluentibus, habetur $L.v+L.p=-S.\frac{kds}{b}$, & $L.v=-S.\frac{kds}{b}-L.p$; ex

ex quâ æquatione invenitur v, & hinc habetur g ut suprà.

164. *Cor.* 4. Sit in Hypothesi coroll. 3. densitas medii k uniformis, velocitas corporis in loco dato $v = c$, & perpendiculum p in eodem loco $= q$ datæ, erit $L.\,v = -\frac{ks}{b} L.\,p + Q$, & quia in loco V, fit $s = o$, $v = c$, $p = q$; erit $Q = L.\,c + L.\,q = L.\,cq$. Et hinc $L.\,v = L\frac{cq}{p} - \frac{ks}{b}$. Ponatur $L.\,h = 1$, ut fit $L.\,v = L.\,\frac{cq}{p} - \frac{ks}{b} \times L.\,h = L.\,\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$. Undè deducitur $v = \frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$, $vv = \frac{c^2q^2}{p^2h^{\frac{2ks}{b}}}$, & hinc $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{c^2q^2y}{Rp^3h^{\frac{2ks}{b}}}$, vel $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$.

165. *Cor.* 5. In his autem omnibus inveniri potest tempus per æquationem $dt = \frac{ds}{v}$, seu $t = S.\,\frac{ds}{v}$ (13).

166. *Cor.* 6. Datâ vi centripetâ & resistentiâ ac densitate medii, inveniri potest æquatio ad trajectoriam Z P V quam corpus projectile circà centrum virium C describit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, resistentia ut quadratum velocitatis & vis centripeta $= \frac{a}{y^n}$ & (164.) erit $\frac{a}{y^n} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$, ideoque $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$, & $L.\,h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{2ks}{b} = L.\,\frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$; capiantur utrinque fluxiones, factâ dy constante, & fiet (26) $\frac{2kds}{b}\left(= \pm\frac{2kydy}{b\sqrt{yy-pp}}\right) = \frac{ndy}{y} + \frac{ddp}{dp} - \frac{3dp}{p}$ (Notum supponimus (40) quantitatis cujusvis Logarithmicæ $L.\,z$ fluxionem esse $\frac{dz}{z}$). Hinc verò habetur $\frac{2ks}{b} = L.\,y + L.\,dp - 3\,L.\,p - \frac{L.\,dy}{Q}$, ubi $\frac{dy}{Q}$, est quantitas constans, ideoque fit $\frac{2ks}{b} = L.\,y^n + L.\,\frac{Qdp}{dy} - L.\,p^3 = L.\,\frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, & hinc $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, æquatio ad trajectoriam.

167. *Schol.* Si curva V P Z sit sectio conica cujus umbilicus C axis major c semiaxis minor e, erit (276. lib. 1.) pro ellipsi $pp = \frac{cey}{c-y}$, pro hyperbolâ $pp = \frac{eey}{c+y}$, & pro parabolâ, si latus rectum axis dicatur $4e$, erit (per *Lem.* 14. *lib.* 1.) $pp = ey$. Undè facile est super oris problematis solutiones ad sectiones conicas transferre. Sit V P Z parabola, vis centripeta $g = \frac{a}{y^n}$, resistentia $r = \frac{kv^2}{b}$, & quæratur tum corporis velocitas tum resistentia & medii densitas in loco quovis P. Quoniam $pp = ey$, erit $2pdp = edy$, $dp = \frac{edy}{2p}$, $\frac{p}{dp} = \frac{2pp}{edy} = \frac{2y}{dy}$; undè fit (158) $vv = \frac{apdy}{y^ndp} = \frac{2a}{y^{n-1}}$; Hinc verò habetur $vdv = \frac{(1-n)ady}{y^n}$, atque ideò pro corporis descensu (158) $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}} = \frac{(2a-na)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; & pro ascensu $r = \frac{(na-2a)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; resistentia igitur est semper ut $\frac{PT}{PC^{n+1}}$; porrò est (per hyp.) $r = \frac{kv^2}{b} = \frac{2ak}{by^{n+1}} = (2a-na)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$, vel $= (na-2a)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; Quarè

SECTIO V.

De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostaticâ. (*)

Definitio Fluidi.

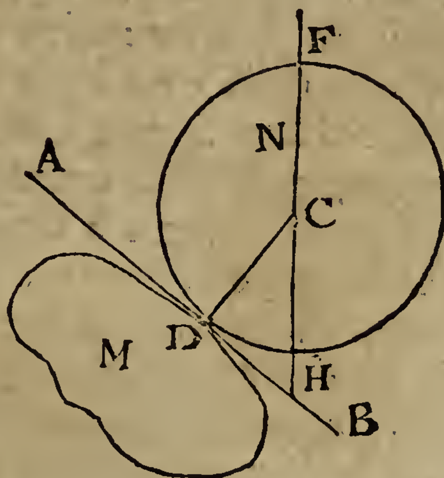
Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facilè moventur inter se.

Quarè erit medii densitas k, ut $\frac{\sqrt{yy - ey}}{y^2}$, seu ut $\frac{PT}{PC^2}$. Et simili modo in ellipsi & hyperbolâ invenitur medii densitas ut $\frac{PT}{PC^2}$. At in circulo fit $PT = 0$, ideóque medii densitas & resistentia nulla. Evanescit quoque resistentia, si $n = 2$, id est, si vis centripeta sit ut quadratum distantiæ reciprocè, quo casu sectiones conicæ, ut lib. 1°. demonstratum est, in medio non resistente describuntur. Si n est numerus binario minor, sectiones conicæ per descensum describi possunt; per ascensum verò si n, binario major. Tandem ubi est $n = 1$, hoc est, vis centripeta distantiæ PC, reciprocè proportionalis, velocitas in parabolâ sicut & in spirali Logarithmicâ uniformis est.

(*) 168. *Hydrostatica* est scientia pressionum quas fluida vel ipsorum partes in se mutuò vel in corpora solida exercent.

169. *Fluidum homogeneum* dicitur, cujus densitas est uniformis, adeò ut nimirum æqualis materiæ quantitas sub voluminibus æqualibus ubique per totam fluidi massam contineatur, *fluidum heterogeneum* appellatur cujus densitas uniformis non est.

170. *Gravitas specifica* corporis est ratio ponderis ejusdem ad volumen; ità ut corpora ejusdem gravitatis specificæ dicantur quæ sub æqualibus voluminibus æquale pondus habent; specificè graviora vel leviora quæ sub æqualibus voluminibus majus vel minus pondus continet; Quarè cum



densitas sit ratio massæ ad volumen corporis (2. *lib.* 1.) ubi pondera sunt ut massæ, gravitates specificæ sunt ut densitates. 170.

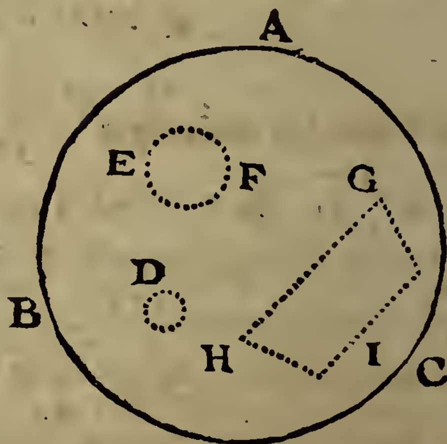
171. Lemma. *Pressiones quas corpora quævis in se mutuò exercent, fiunt juxtà directiones communi plano contingenti perpendiculares, & per punctum contingentiæ eorumdem corporum transeunt.*

Corpus N vi quâlibet secundum directionem FC urgeatur, tangaturque in D à corpore M; producatur FC ut plano AB quod utrumque corpus contingit in D occurrat in H, ductâ per D rectâ DC ad planum AB perpendiculari, vis quâ corpus N urgetur, exponatur per lineam CH, & hæc (*per leg. mot. cor.* 2.) resolvi poterit in vires æquipollentes CD & DH. Sed corpus M minimè premitur vi DH secundùm directionem plani contactûs agente; quarè solâ vi CD ad planum AB normali & per punctum contactûs D transeunte premitur. Q.E.D.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſitâ condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu à preſſione illâ orto permanent in locis ſuis.

Caſ. 1. In vaſe ſphærico *A B C* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illâ preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc ideo quia ſimilis & æqualis eſt omnium



preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui à preſſione illâ oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longiùs ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervatâ ſuâ à centro diſtantiâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *E F* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, premanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebant in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis,

per

per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quòd ſphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Dico præterea quòd diverſarum partium ſphæricarum æqualis ſit preſſio. Nam partes ſphæricæ contiguæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motûs legem III. Sed &, per caſum ſecundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ, ([a]) quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque, prementur eâdem vi. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Dico jam quòd fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt à partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque, & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per caſum 3. & viciſſim ab illis æqualiter premuntur, per motûs legem tertiam. *Q. E. D.*

Caſ. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus ſe mutuò æqualiter premant & quieſcant inter ſe; manifeſtum eſt quòd fluidi cujuſcunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes ſe mutuò premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

Caſ. 6. Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem preſſioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Caſ. 7. Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, ſed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum, & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primum à parte magis preſsâ recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum; redu-

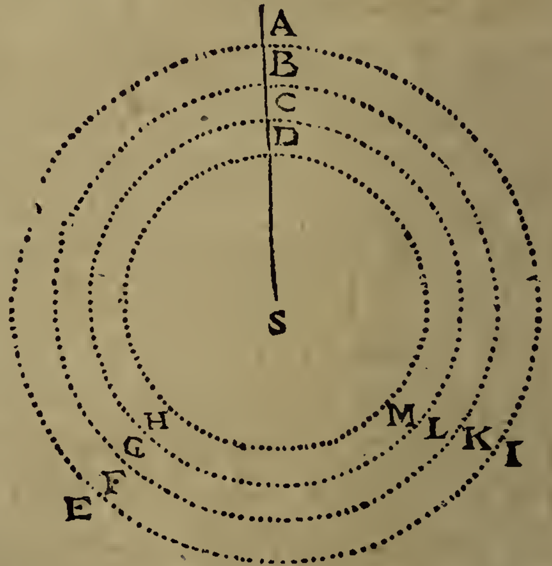
(a) * *Quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque.* Nam pars illa intermedia duas alias partes ſphæricas in punctis contactûs premet; atque ab illis premetur æqualiter, (*ex dem.*) 171

reducetur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, sine motu locali: & subinde partes fluidi, per casum quintum, se mutuò prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externâ superficie illatam, mutari possunt, nisi quâtenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensiùs vel remissiùs sese premendo difficiliùs vel faciliùs labuntur inter se.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si (b) *fluidi sphærici, & in æqualibus à centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*



Sit *D H M* superficies fundi, & *A E I* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *B F K*, *C G L* distinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *A E* vi simplici gravitatis propriæ, quâ & omnes

(b) 172. *Si fluidi sphærici &c.* Fluidi quiescentis superficies ad gravitatis directionem perpendicularis est ubique, & ideo si vis gravitatis ad centrum unum dirigatur, sphærica est. Si enim superficiei fluidi pars aliqua ad gravitatis directionem inclinata sit, resolvatur vis gravitatis in duas vires quarum una directionem habeat superficiei fluidi perpendicularem, altera parallelam; & (*ex definitione*) fluidum secundùm hanc directionem movebitur, contra hyp. Erit igitur pars quælibet

nes orbis supremi partes & superficies secunda *B F K* (*per prop.* XIX.) pro (c) mensurâ suâ æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda *B F K* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione triplâ urgetur superficies tertia *C G L*. Et similiter pressione quadruplâ urgetur superficies quarta, quintuplâ quinta, & sic deinceps. Pressio igitur quâ superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis à superficie infimâ ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* (d) Et simili argumentatione patet propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quâvis assignatâ distantiæ à centro, ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ sustentato.

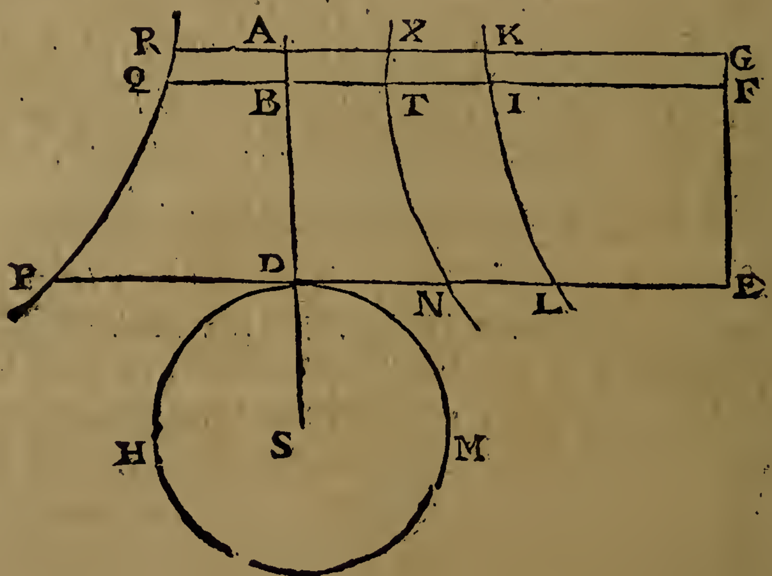
Co-

libet superficiei ad gravitatis directionem perpendicularis: & quoniam nulla est alia superficies, præter sphæricam, quæ hanc habeat proprietatem, ut lineæ omnes ipsi perpendiculares ad centrum unum concurrant, superficies illa fluidi sphærica erit. Q. E. D.

(c) * *Pro mensurâ suâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, superficiei secundæ partes, semotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales superficiei supremæ; quod per Prop. XIX. manifestum fit, si spatium, quod illas superficies continet, tanquam vas aliquod consideretur quod fluidum æqualiter undique compressum complectitur.

(d) * *Et simili argumentatione &c.* 172. Patet ut in superiori demonstratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ D A existentium sustineatur à parte D correspondente fundi sphærici D H M. Hoc igitur fundum sustinet pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis D A; modò tamen in locis à fundo sphærico D H M & à basi planâ cylindri æquidistantibus, eadem servetur fluidi densitas, eademque vis gravitatis quæ in basim cylindri perpendiculariter tendat ubique.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive (e) ſuperficies preſſa ſit horizonti



173. Deſignet D A G E prædictum cylindrum, cujus baſis D E æqualis ſit fundo ſphærico D H M. Per punctum D, & per puncta B & A infinitè propinqua ductæ ſint rectæ D E, B F & A G perpendiculares ad A S; in illis perpendicularibus capiantur D L, B I, A K denſitatibus fluidi & D N, B T, A X viribus gravitatis acceleratricibus in locis D, B, A proportionales, ſintque curvæ L I K & N T X loca punctorum L, I, K, & N, T, X. Producatur K A in R, ut ſit ſemper A R rectangulo A X × A K proportionalis, & R Q P curva quam punctum R perpetuo tangit: & preſſio fluidi in fundum ſphæricum D H M erit ut fundum D H M & area D A R P conjunctim. Nam preſſio fluidi cylindrulo B A G F contenti in baſim D E eſt ut quantitas materiæ in vim gravitatis ſingularum particularum ducta (*per definit. VIII. lib.* 1.). Quantitas materiæ cylindro B A G F contenta eſt ut cylindrus B A G F & denſitas conjunctim (2. *lib.* 1.), id eſt, ut baſis cylindri D E & rectangulum A B × A K. Quare preſſio fluidi cylindro B A G F contenti eſt ut baſis D E & ſolidum A B × A K × A X, ſeu ut baſis D E & rectangulum A B × A R conjunctim. Dividatur tota fluidi altitudo D A in partes innumeras ut A B, & erit preſſio fluidi totius in baſim cylindri D E vel in fundum ſphæricum D H M, ut baſis D E vel fundum D H M & area D A R P conjunctim. Q. E. D.

Si vis acceleratrix gravitatis conſtans ſit, curva X T N in rectam lineam mutabitur axi A D parallelam, eritque proinde preſſio fluidi in fundum D H M, ut fundum hoc & area D A K L conjunctim; in hâc enim hypotheſi, ob datam A K, area D A R P proportionalis eſt areæ D A K L.

Si vis gravitatis & denſitas fluidi conſtantes ſint, curvæ X T N, K I L & R Q P in rectas lineas axi A D parallelas migrant; & ideo preſſio fluidi in fundum ſphæricum D H M, vel in baſim cylindri D E, eſt ut fundum illud D H M, vel baſis D E, & altitudo fluidi A D conjunctim. Si verò conferantur liquores in ſe homogenei, ſed diverſæ inter ſe denſitatis, preſſiones erunt in ratione compoſitâ baſium, altitudinum & denſitatum, modò gravitas acceleratrix conſtans, ſit in utroque liquore æqualis; nam ſi inæqualis eſſet, preſſiones forent in ratione compoſitâ baſium, altitudinum, denſitatum & virium gravitatis.

(e) * *Sive ſuperficies preſſa ſit horizonti &c.* * Sumatur quævis particula inter duos orbes concentricos B F K, C G L; illa

zonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive (f) fluidum, à superficie pressâ sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit obliquè per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maximè irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

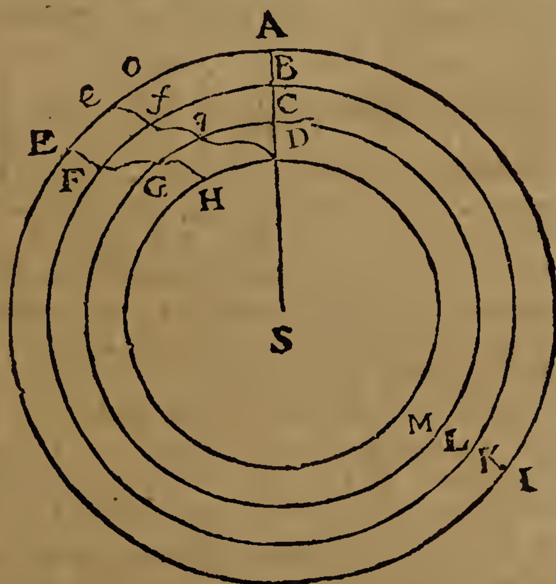
Corol. 3. Eâdem demonstratione colligetur etiam (*per prop.* XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modò excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ cor-

illa particula per casum 5. Prop. XIX. undique æqualiter premitur, ergo per motûs Leg. III. undique æqualiter premit, substituatur itaque loco particulæ cujusvis hanc contingentis superficies quævis, sive horizontalis, sive perpendicularis, sive obliqua, æqualis erit in eam pressionis quantitas: *Ergo in æqualibus à centro distantiis &c.*

(f) * *Sive fluidum à superficie pressâ &c.* Si fluidum vase utlibet irregulari E F G H d g f e contineatur, vasis fundum H d sustinebit pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi H d, & altitudo D A eadem quæ fluidi in vase contenti. Iisdem enim positis, quæ in demonstratione propositionis hujus, premitur superficies suprema E e vi simplici gravitatis propriæ, quâ & superficies secunda F f pro mensura sua æqualiter premitur. Premitur præterea superficies secunda F f vi propriâ gravitatis, quæ addenda est vi priori. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, & insuper vi propriæ gravitatis, urgetur superficies tertia G g; & sic deinceps. Quare patet, ut supra, pressionem quam superficies infima H d subit, æqualem esse ponderi cylindri cujus est altitudo D A & basis fundo H d æqualis.

Manente igitur tum basi H d, tum fluidi altitudine perpendiculari D A, manet fluidi in basim pressio, utcumque mutetur vasis fluidum continentis figura. Atque hinc in vasis communicantibus æquilibrium est, ubi perpendiculares fluidi altitudines supra fundum commune in utroque vase æquantur, dummodo in paribus à centro virium gravitatis S distantiis tam fluidi densitas quàm vis gravitatis servetur eadem. Nam si, manente vi gravitatis acceleratrice, conferantur fluida in se homogenea, sed diversæ inter se densitatis, erit in vasis communicantibus æquilibrium, ubi fluidorum in utroque vase altitudines perpendiculares erunt in ratione densitatum reciprocâ, quia in eo casu fluidorum in basim communem pressiones æquales sunt (173).



173.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XX. THEOR. XV.

corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est, manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est, manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido liberè innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet, vel descenderet, vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet, vel descenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui (*per cas.* 5. *prop.* XIX.) jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quàm fluidum sibi contiguum, subsidebit, & quod specificè levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est gravitas, altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota quâ corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia

non

non eſſent. Quæ in aëre ſunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non ſuſtinentur. Pondera vulgi nihil aliud ſunt quàm exceſſus verorum ponderum ſupra pondus aëris. Unde & vulgò dicuntur levia, quæ ſunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparativè levia ſunt, non verè, quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt, ſunt comparativè & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ, vel ab eâ ſuperatur. Quæ verò nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt, etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in ſenſu vulgi non gravitant in aquâ. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonſtrantur, obtinent in aliis quibuſcunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde ſi medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium eſt vis illa motrix, quam in præcedentibus propoſitionibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cùm autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum figuras externas, patet inſuper (*per corollarium prop.* XIX.) quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe: proindeque, ſi animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quâtenus hæc corpora à compreſſione condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum ſyſtematis fluido comprimente circundati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur, ac ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam, niſi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. V. Prop. XXI. Theor. XVI.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

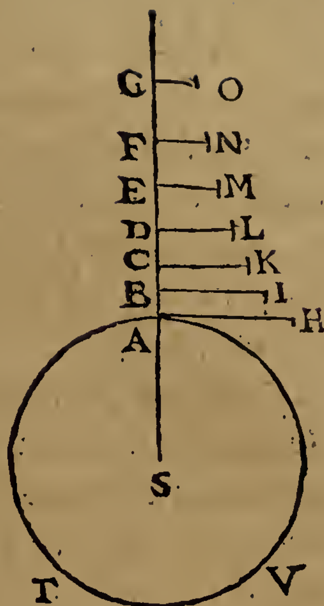
Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ distantiis suis à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continuè proportionales.

Designet ATV fundum sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. distantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ sint ut densitates medii in locis A, B, C, D, E, F; & (g) specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, (h) quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. (i) Et hæ gra-

(g) 174. *Et specificæ gravitates &c.* Fluidi enim cujus singulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Est enim gravitas specifica ut pondus directè & volumen inversè (170); Sed pondus (*per defin. VIII. lib. 1.*) est ut quantitas materiæ & vis gravitatis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (2. *lib.* 1.) est ut densitas & volumen conjunctim. Quare, conjunctis his rationibus; gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. E. D.

(h) * *Vel, quod perinde est, ut &c.* Cùm enim (*per hyp.*) distantiæ SA, SB, SC, SD &c. sint continuè proportionales, earum differentiæ AB, BC, CD &c. ipsis proportionales erunt.

(i) * *Et hæ gravitates ductæ &c.* Nam si pondus quod fundum sphæricum ATV sustinet, exponatur per cylindrum cujus basis æqualis sit superficiei ATV & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro altitudine AB erit ATV×AB, ideoque ob datam superficiem ATV, erit volumen illud ut AB, multiplicetur illud per gravitatem specificam & factum erit ut pondus seu pressio; quare cùm (ex *demonst.*) gravitas specifica sit ut $\frac{AH}{AB}$, pressio fluidi



gravitates ductæ in altitudines *AB*, *EC*, *CD*, &c. conficient pressiones *AH*, *BI*, *CK*, &c. quibus fundum *ATV* (juxta theorema xv.) urgetur. Sustinet ergo particula *A* pressiones omnes *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, (k) pergendo in infinitum; & particula *B* pressiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH*, *BI*; & sic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* densitas *AH*, est ad particulæ secundæ *B* densitatem *BI* ut summa omnium *AH* + *BI* + *CK* + *DL*, in infinitum, ad summam omnium *BI* + *CK* + *DL*, &c. Et *BI* densitas secundæ *B* est ad *CK* densitatem tertiæ *C*, ut summa omnium *BI* + *CK* + *DL*, &c. ad summam omnium *CK* + *DL*, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (*per hujus lem.* 1.) proindeque differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. summis proportionales, sunt etiam continuè proportionales. Quare cùm densitates in locis *A*, *B*, *C*, &c. sint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per saltum, & ex æquo in distantiis *SA*, *SC*, *SE* continuè proportionalibus, erunt densitates *AH*, *CK*, *EM* continuè proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continuè proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, densitates *AH*, *DL*, *GO* erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum à fundo *A* ad summitatem fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continuè proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, densitates *AH*, *DL*, *GO*, semper existentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. *Q. E. D.*

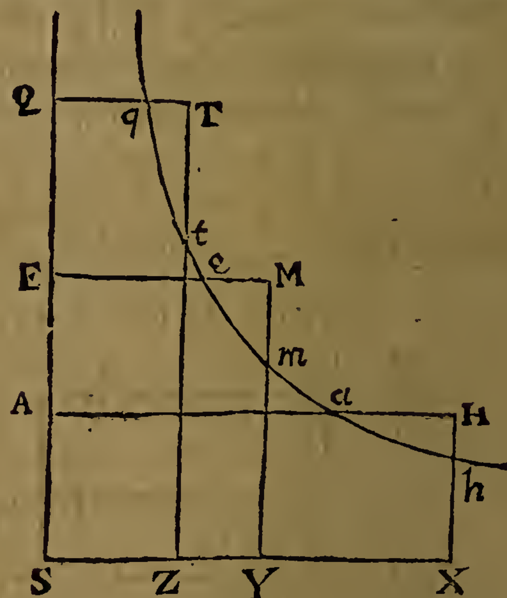
Co-

di cylindrici, cujus est altitudo AB, erit ut AH, & ita de cæteris.

(k) 175. * *Pergendo in infinitum.* Quoniam enim (*per hyp.*) densitas compressioni proportionalis est, ubi compressio nulla evadit, evanescit quoque densitas, seu, fluidum fit infinitè rarum, ac proinde in infinitum expanditur, cùm ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita evadat (2. *lib.* 1.). 175.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXI. THEOR. XVI.

Corol. Hinc ſi detur denſitas fluidi in duobus locis, putà *A* & *E*, colligi poteſt ejus denſitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, aſymptotis rectangulis *SQ*, *SX* deſcribatur hyperbola ſecans perpendicula *AH*, *EM*, *QT* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *HX*, *MY*, *TZ*, ad aſymptoton *SX* demiſſa, in *h*, *m* & *t*. Fiat area *YmtZ* ad aream datam *YmhX* ut area data *EeqQ* ad aream datam *EeaA*; & linea *Zt* producta abſcindet lineam *QT* denſitati proportionalem. Namque ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* ſunt continuè proportionales, (l) erunt areæ *EeqQ*, *EeaA* æquales, & inde areæ his proportionales *YmtZ*, *XhmY* etiam æquales, & lineæ *SX*, *SY*, *SZ*, id eſt, *AH*, *EM*, *QT* (m) continuè proportionales, ut oportet. Et ſi lineæ *SA*, *SE*, *SQ* obtinent alium quemvis ordinem in ſerie continuè proportionalium, lineæ *AH*, *EM*, *QT*, ob proportionales areas hyperbolicas, (n) obtinebunt eundem ordinem in aliâ ſerie quantitatum continuè proportionalium.



PRO-

(l) * *Erunt areæ EeqQ, EeaA æquales*, per not. 379. lib. 1.

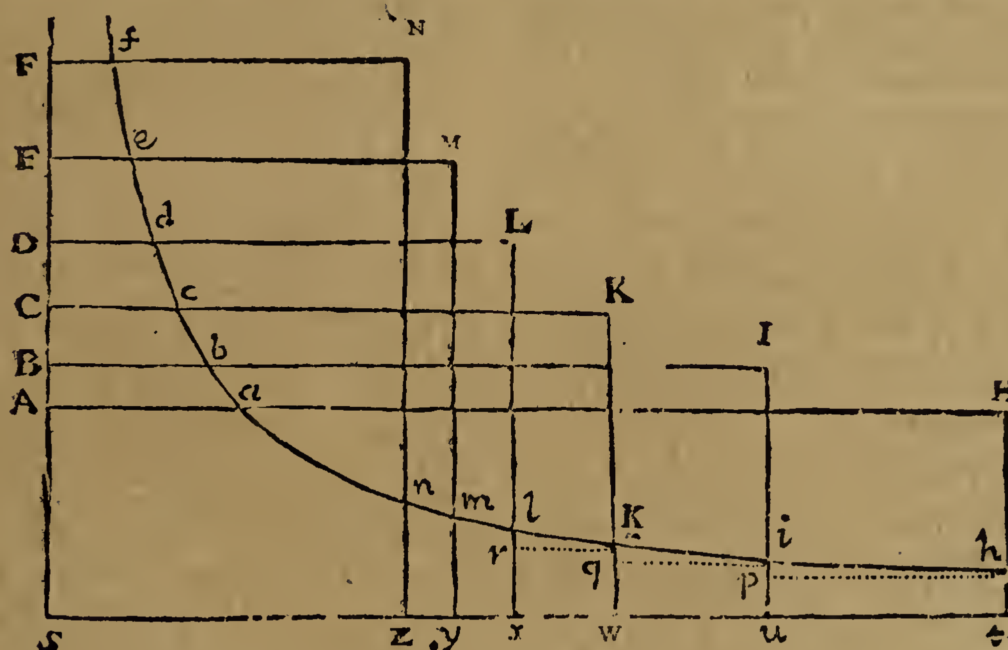
(m) * *Continue proportionales*,) 379. lib. 1.)

(n) * *Obtinebunt eumdem ordinem &c.* * Etenim areæ Hyperbolicæ EeaA, QqaA ſunt Logarithmi linearum SE, SQ, & pariter areæ VmtZ, XhtZ ſunt Logarithmi linearum SY, SX, (*379, 389, lib.* 1.) ſed cùm areæ YmtZ, XhtZ ſint per conſtructionem proportionales areis EeaA, QqaA, illæ areæ YmtZ; XhtZ per Doctrinam Logarithmorum (n. 38) poterunt eſſe Logarithmi linearum SE, SQ; cùm ergo eædem quantitates poſſint eſſe Logarithmi tam quantitatum SE, SQ, quàm quantitatum SY, SX, oportet ut iſtæ quantitates SE, SY & SQ, SX correſpondentia loca occupent in Progreſſionibus Geometricis ad quas pertinent.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis distantiarum suarum à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, (o) *si distantiæ sumantur in progressione musicâ, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione geometricâ.*

Designet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*,



CK, &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

(o) * *Quòd si distantiæ sumantur in progressione musicâ*, aut, quod idem est, si tales sumantur distantiæ ut earum reciprocæ sint in progressione arithmeticâ.

* Scilicet tres quantitates dicuntur esse in continuâ proportione Musicâ sive Harmonicâ, si prima sit ad tertiam ut differentia primæ & secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ. Et si sit series plurium quantitatum talium ut terminus quivis sit ad subsequentem, ut differentia prioris à termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii à posteriore termino, ea series dicitur *Progressio Musica*. 175.

Cor. 1. *In progressione Musicâ factum duorum priorum terminorum est ad factum duorum quorumvis immediatè sibi succedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam sunto termini progressionis Musicæ *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* &c. & differentiæ inter singulos *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* &c. erit per definitionem hujus progressionis

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.

E, &c. & ipsius gravitates (p) specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam à B ad C, tertiam à C ad

$A : C = M : N$
$B : D = N : P$
$C : E = P : Q$
$D : F = Q : R$, unde ex compositione rationum patet quod est

$A \times B : E \times F = M : R.$

Cor. 2. *Differentia inter duos primos terminos est ad differentiam inter duos quosvis alios, ut secundus terminus, toties multatus differentiâ sua à primo quot sunt termini inter primum & ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iisdem litteris adhibitis quæ in superiore Corollario) cùm ex naturâ progr. sit $A : C = M : N$, sitque $A = B - M$; est $B - M : C = M : N$, ergo in hoc casu, differentia M inter duos primos terminos A & B est ad differentiam N inter B & C ut secundus terminus B semel mulctatus differentiâ suâ à primo, cùm sit unicus terminus inter primum A & ultimum C, ad eum ultimum C.

Cùm ergo sit $B - M : C = M : N$, vicissim $B - M : M = C : N$, & dividendo $B - 2M : M = C - N : N$; cùmque sit $C - N = B$, est $B - 2M : M = B : N$, sed; per defin. progress. est $B : N = D : P$ ergo $B - 2M : M = D : P$ & vicissim $B - 2M : D = M : P$, sunt verò duo termini inter A & D, unde rursus in hoc casu constat Corollarii veritas.

Item cùm sit $B - 2M : D = M : P$ & vicissim $B - 2M : M = D : P$, erit dividendo $B - 3M : M = D - P : P$, cùmque sit $D - P = C$ erit $B - 3M : M = C : P$ cùmque per defin. progr. sit $C : P = E : Q$ erit $B - 3M : M = E : Q$ & vicissim $B - 3M : E = M : Q$, sunt verò inter A & E tres termini: Cùmque eadem recurrat semper demonstratio si numerus terminorum progressionis inter primum & ultimum sit n; si secundus terminus dicatur B, differentia à primo M, ultimus terminus sit F, differentiâ à præcedente R erit, $M : R = B - nM : F$. Q. E. Dem.

Cor. 3. *In Progressione Musicâ secundus terminus toties mulctatus suâ differentiâ à primo quot sunt termini inter eum & ultimum est ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progressionis ad factum duorum postremorum.*

Liquet utique ex collatione duorum præcedentium Corollariorum; unde est semper, $B - nM : F = A \times B : E \times F$.

Theor. I. *Quilibet terminus progressionis Musicæ est æqualis facto duorum primorum terminorum diviso per secundum terminum toties mulctatum differentiâ suâ à primo quot sunt termini à primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus est $\frac{A \times B}{B}$, secundus terminus $\frac{A \times B}{A}$ sed $A = B - M$ ergo 2us. terminus est $\frac{A \times B}{B - M}$. Pro reliquis terminis habetur semper per *Coroll.* 3. $B - nM : F = A \times B : E \times F$ divisis ergo Consequentibus per F, erit $B - nM : 1 = A \times B : E$ unde est $E = \frac{A \times B}{B - nM}$ sed cum n designaret numerum terminorum inter A & F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

Theor. II. *Termini omnes progressionis Musicæ sunt inter se sicut quantitates quarum reciprocæ constituunt progressionem Arithmeticam.*

Nam per Theor. prius termini $A : B$. C. D. E &c. prog. Musicæ sunt $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$, $\frac{A \times B}{B - 2M}$, $\frac{A \times B}{B - 3M}$, &c. $\frac{A \times B}{B - nM}$.

$\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B - M}$, $\frac{1}{B - 2M}$, $\frac{1}{B - 3M}$, $\frac{B}{B - 2M}$.

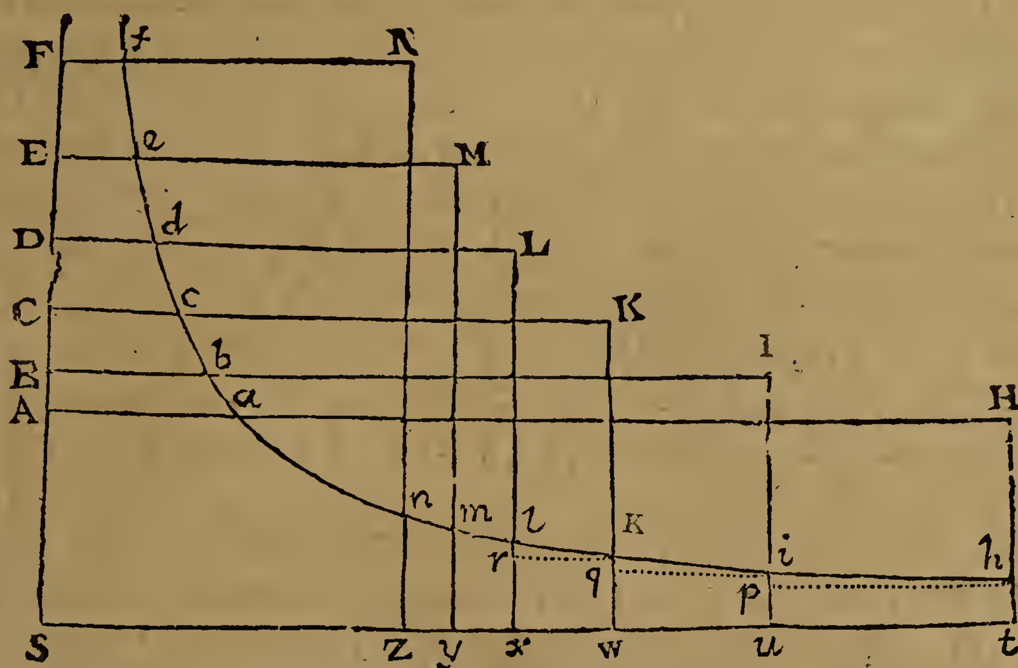
Sed hæ sunt reciprocæ quantitatum B, $B - M$, $B - 2M$, $B - 3M$, $B - nM$ quæ sunt in progressione arithmeticâ; Ergo &c.

Scholium. Progressio musica potest esse decrescens & omnia ut prius procedent, mutatis signis negativis in positiva.

(p) * *Gravitates specificæ in iisdem locis erunt &c.* (174).

C ad D &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, (q) conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, asymptotis SA, Sx describatur

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.



hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in h, i, k, & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. [seu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c.] id

 est;

(q) * *Conficient exponentes pressionum*, &c. [Quod patet ut in demonstratione 111. seu quantitates pressionibus proportionales, prop. XXI.].

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. V. Prop. XXII. Theor. XVII.

eſt, ut Aa, Bb, &c. Eſt enim, (r) ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. (ſ) Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continuè proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ ſummæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejuſmodi termini quàm plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & (t) rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa - Ff$. (u) Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF, in progreſſione muſicâ, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt, AH, DL, FN, (x) continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi dentur fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area $thiu$, harum differentiæ tu reſpondens; & inde invenietur denſitas FN, in altitudine quâcunque SF, ſumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thiu$ ut eſt differentia $Aa - Ff$ (y) ad differentiam $Aa - Bb$.

Scho-

(r) * *Ex natura hyperbolæ*; per theor. 4. de hyperbola.

(ſ) *Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continuè proportionales.* Nam (*per hyp.*) SA, SB, SC ſunt continuè proportionales, & (*per theor. 4. de hyp.*) Aa, Bb, Cc ſunt reciprocè ut SA, SB, SC, ideoque etiam continuè proportionales.

(t) * *Et rectangula evadent æqualia areæ hyperbolicæ ztnn*, per Lemma III. lib. 1.

(u) * *Sumantur jam* diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progreſſione muſicâ, & earum reciprocæ Aa, Dd, Ff erunt in progreſſione arithmetica, ideoque differentiæ Aa — Dd, Dd — Ff æquales.

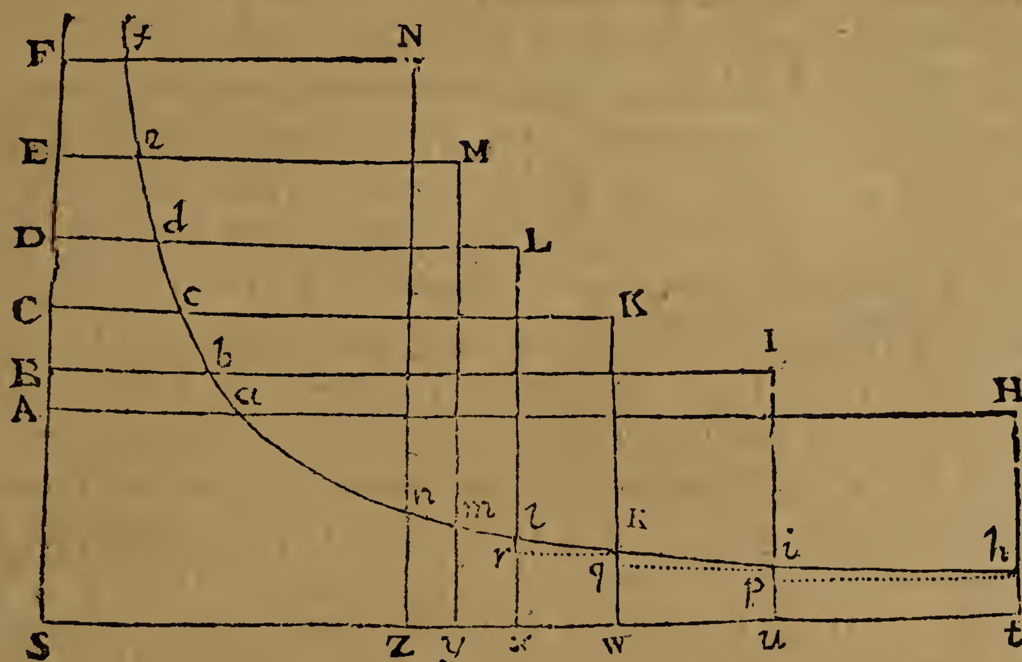
(x) * *Continuè proportionales.* (379 lib. 1.)

(y) 176. * *Ad differentiam. Aa — Bb.* Quoniam verò area thiu eſt ad aream

thnz.

Scholium.

(z) Simili argumentatione probari potest, quòd si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione distantiarum à centro, & quadratorum distantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SAq}$, $\frac{SA\ cub.}{SBq}$, $\frac{SA\ cub.}{SCq}$) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt



in progressione geometricâ. Et si gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\ cub.}$, &c.) sumantur

in

t h n z ut Logarithmus lineæ S t vel A H ad Logarithmum lineæ S z seu F N (379 & 380 *lib.* 1.), densitas F N per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice versâ, datâ densitate F N invenietur altitudo S F: nam per prop. superiorem dabitur A a — F f, & inde dabitur F f, unde invenietur $FS = \frac{SA \times Aa}{Ff}$ (*per theor.* 4. *de hyp.*) Quia verò fluidi elasticitas, cæteris paribus, vi comprimenti, ideoque densitati (*per hyp.*) proportionalis est, patet per hoc corollarium ex datis altitudinibus inveniri posse elasticitates, & vice versâ. 176.

(z) 177. * *Simili argumentatione probari potest &c.* Sit vis centripeta particularum fluidi reciprocè ut distantiæ di-

 gni-

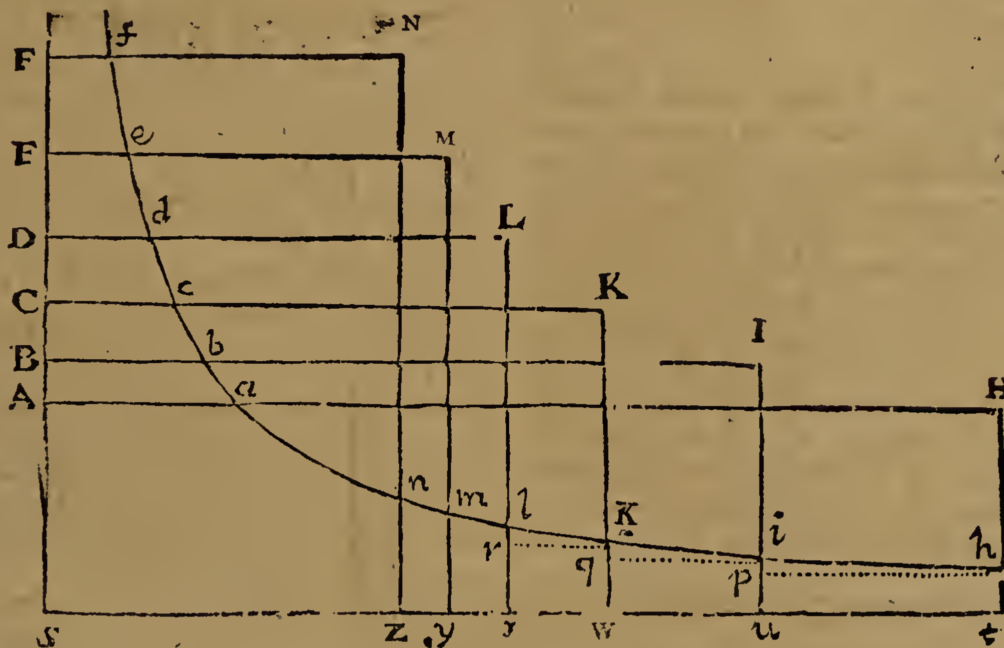
in progreſſione arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione geometricâ. Et ſic in infinitum. Rurſus

gnitas; cujus index eſt n; deſignet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE diſtantias in progreſſione geometricâ. Erigantur perpendicula AH, BI, CK &c. quæ ſint ut fluidi denſitates in locis A, B, C, D, E &c. Et ipſius gravitates ſpecificæ in iiſdem locis erunt $\frac{AH}{SA^n}$, $\frac{BI}{SB^n}$, $\frac{CK}{SC^n}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, ſecundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE &c. vel quod perinde eſt, in diſtantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes preſſionum $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. Quare cùm denſitates ſint ut harum preſſionum ſummæ, differentiæ denſitatum AH − BI, BI − CK; &c. erunt ut ſummarum differentiæ $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. fiat eadem conſtructio, quæ ſupra in prop. XXII, & denſitatum differentiæ tv, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, &c. & rectangula $tv \times th$, $uw \times ui$, &c., ſeu tp, uq &c. ut $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$, &c. id eſt, ut Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, &c. Eſt enim (*per theor.* 4. *de hyp.*) $AH \times th$ æquale $SA \times Aa$, & Aa reciprocè ut SA, ſeu directè ut $\frac{1}{SA}$, ideoque $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$ ut $SA \times Aa \times Aa^{n-1}$, ſive ut Aa^{n-1} cum ſit $SA \times Aa = 1$, & ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$ ut Bb^{n-1}; &c. ſunt autem Aa, Bb, Cc, &c. ideoque Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, Cc^{n-1} &c. continuè proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa^{n-1} - Bb^{n-1}$, $Bb^{n-1} - Cc^{n-1}$, &c. proportionales, ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa^{n-1} - Cc^{n-1}$, vel $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$ ſummæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejuſmodi termini quàm plurimi, & ſumma omnium differentiarum; puta $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta zthn, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ zthn, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$.

Sumantur jam diſtantiarum quarumlibet, puta SA, SD, SF dignitates SA^{n-1}, SC^{n-1}, SF^{n-1} in progreſſione muſicâ, ideoque earum reciprocæ $\frac{1}{SA^{n-1}}$, $\frac{1}{SD^{n-1}}$, $\frac{1}{SF^{n-1}}$, ſeu Aa^{n-1}, Dd^{n-1}, Ff^{n-1} in progreſſione arithmeticâ, & differentiæ $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$, $Dd^{n-1} - Ff^{n-1}$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ thlx, xlnz æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt, AH, DL, FN continuè proportionales. Quare ſi gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ diſtantiarum, cujus exponens ſit n, & dignitatum SA^{n-1}, SB^{n-1}, SC^{n-1}, &c. reciproca (nempe $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SC^{n-1}}$, &c. in quibus SA data eſt) ſumantur in progreſſione arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt in progreſſione geometricâ.

Si itaque loco n ſcribantur numeri 3, 4, 5, 6 &c. in infinitum; & rurſus ſcribantur 0, −1, −2, −3 &c. in infinitum, patet veritas ſcholii in hypotheſi denſitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem $n = 0$, ſeu quando gravitas particularum fluidi in omnibus diſtantiis eadem eſt, eſt $\frac{SA^n}{SA^{n-1}} = SA$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}} = SB$;

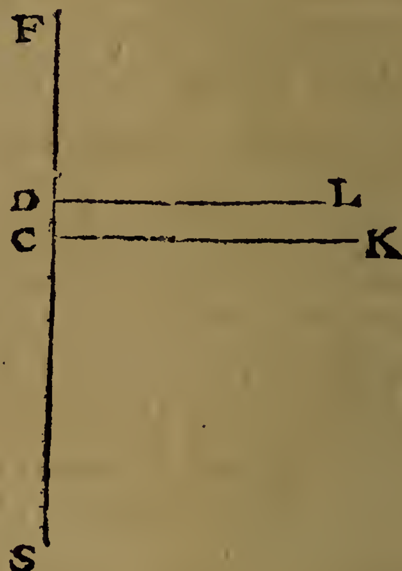
ſus ſi gravitas particularum fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione arithmeticâ denſitates erunt in progreſſione geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium à fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges, ut quòd cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplicata



177 S B, ideoque ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ, ideoque diſtantiæ ſunt ut denſitatum logarithmi, quia creſcentibus diſtantiis in progreſſione arithmeticâ, decreſcunt denſitates in progreſſione geometricâ. Quia verò *per experimenta conſtat, quod denſitas aëris,* cæteris paribus ac potiſſimum manente eodem caloris gradu, *ſit ut vis comprimens vel accuratè vel ſaltem quam proximè* in aëre quem experimentis poſſumus ſubjicere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæteris etiam paribus, æqualis ſit ponderi aëris totius incumbentis, ideoque proportionalis altitudini mercurii in barometro; & præterea particularum aëris gravitas, in minoribus ſaltem à telluris ſuperficie diſtantiis, conſtans cenſeri poſſit, patet; quod, cæteris paribus, aëris denſitatem ad hujuſmodi diſtantias minores, metiri poſſimus per logarithmos. Sed de his plura videre eſt in Elementis Aërometriæ Clar. *Wolfii*, in libro 2°. *Phoronomiæ*, & in ſectione 10ª. *Hydrodynamicæ* Clar. *Danielis Bernoulli.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.

ta ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione denſitatis. Quo in caſu, ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ à centro, denſitas erit reciprocè ut cubus diſtantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-cubus denſitatis, & ſi gravitas eſt reciprocè ut quadratum diſtantiæ, denſitas erit reciprocè in ſeſquiplicatâ ratione diſtantiæ. Fingatur quòd vis comprimens ſit in duplicatâ ratione denſitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ diſtantiæ, & denſitas erit reciprocè ut diſtantia. ([a]) Caſus omnes percurrere longum eſſet. Cæterùm per experimenta conſtat quòd denſitas aëris ſit ut vis comprimens vel accuratè, vel ſaltem quàm proximè: & propterea denſitas aëris in atmoſphærâ terræ eſt ut pondus aëris totius incumbentis, id eſt, ut altitudo mercurii in barometro.



(a) 178. * *Caſus omnes percurrere longum eſſet*; Satius erit generalem formulam tradere, ex quâ ſinguli caſus pro dubitu eruantur. Iiſdem igitur, quæ ſupra, poſitis, ſit diſtantia variabilis $SC = x$, altitudo $CD = dx$, denſitas $CK = y$, vis tota comprimens in loco $C = v$, vis gravitatis ibidem $= g$; & erit gravitas ſpecifica in eodem loco ut gy (174), & hæc ducta in altitudinem evaneſcentem CD ſeu dx conficient momentum preſſionis $gy\,dx = -dv$. Sumitur autem fluxio dv negativè, quod creſcente diſtantia x, pondus incumbens v decreſcat.

Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, denſitas y ut vis comprimentis dignitas v^n, ideoque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v, & ſumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ ut dv. Loco g & dv ſubſtituantur hi valores in æquatione $gy\,dx = -dv$, & fiet $\frac{y\,dx}{x^m} = -\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ ſeu $-\frac{dx}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy$. His verò æquationibus non æqualitates, ſed proportiones tantum exponimus, & ideo coefficientes datas negligimus.

Si in ultimâ æquatione ponatur $n = 1$, id eſt, denſitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progreſſione arithmeticâ; & earum fluxiones, ſeu differentiæ naſcentes $-\frac{(m-1)\,dx}{x^m}$, ideoque & $\frac{-dx}{x^m}$ conſtantes erunt, & propterea quantitates $\frac{dy}{y}$ etiam datæ; ac proinde denſitates y ſuis differentiis dy proportionales, erunt con-

continuè proportionales, (*per lem. II. lib. II.*). Si in eadem hypothesi ponatur $m = 1$, fit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$; unde si capiantur quantitates $\frac{dx}{x}$ constantes, seu distantiæ x in progressione geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{dy}{y}$ constantes, & ideo densitates y in progressione geometricâ. Prorsus ut in prop. XXII, XXI. & initio scholii hujus demonstratum est. Sumptis fluentibus, æquatio $\frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy = -\frac{dx}{x^m}$ in hanc abit $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m} + Q$. *const.* in quâ non potest esse $m = 1$, nec $n = 1$, neque $n = 0$, ut patet. Ut autem determinetur valor constantis Q, primum definienda est altitudo S F, ubi densitas y evanescit. Nam si altitudo illa finita est & dicatur $= a$, positâ $y = 0$, habebitur $Q = \frac{-1}{m-1} a^{1-m}$, & hinc $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{x^{1-m} - a^{1-m}}{m-1} = \frac{a^{1-m} - x^{1-m}}{m-1}$, in qua æquatione debet esse $\frac{1-n}{n}$ numerus positivus, seu n numerus positivus unitate minor, ut crescentibus distantiis x, decrescant densitates y, & contra. Si altitudo S F ad quam densitas y evanescit, infinita supponatur, erit constans $Q = o$, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$. Nam si in æquatione $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{x^{1-m} - a^{1-m}}{m-1}$, ponatur y nulla & x infinita, quantitas constans a erit infinita, contra hypothesim.

Jam vero si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, id est si $m = 2$, æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{x}$, unde est y ut $x^{\frac{1}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu y^4 ut v^3, ideoque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, & hinc $n = \frac{3}{4}$; & erit $x^{\frac{1}{1-n}} = x^4$, ac proinde densitas y ut x^3 reciprocè, seu densitas, reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, hoc est, y^5 ut v^3, adeoque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, & hinc $n = \frac{3}{5}$; & erit y ut $x^{\frac{3}{2}}$ reciprocè, id est, densitas reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis; seu y ut $v^{\frac{1}{2}}$; & hinc erit $n = \frac{1}{2}$, ac proinde y ut x reciprocè, sive densitas est reciprocè ut distantia. Quæ Newtonus in scholio dixerat. Vide monumenta Academiæ Regiæ scientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic sumus sequuti.

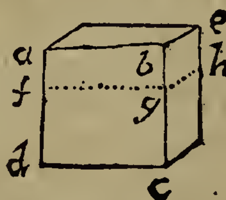
178.

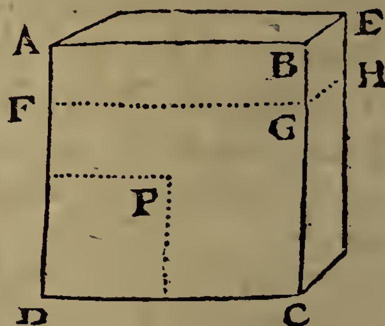
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXIII. THEOR. XVIII.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in spatio cubico *A C E*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *a c e*; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, (b) distantiæ erunt ut cuborum latera *A B*, *a b*; & (c) mediorum densitates reciprocè ut spatia continentia *A B cub.* & *a b cub.* In cubi majoris latere plano *A B C D* capiatur quadratum *D P* æquale lateri plano cubi minoris *d b*; & ex hypothesi, pressio, quâ quadratum *D P* urget fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum *d b* urget fluidum inclusum, ut medii densitates ad invicem, hoc est, ut *a b cub.* ad *A B cub.* Sed pressio, quâ quadratum *D B* urget fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum *D P* urget idem fluidum, ut quadratum *D B* ad quadratum *D P*, hoc est, ut *A B quad.* ad *a b quad.* Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum *D B* urget fluidum, est ad pressionem quâ quadratum *d b* urget fluidum, ut *a b* ad *A B*. Planis *F G H*, *f g h*, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, & hæ (d) se mutuo prement iisdem viri-





(b) * *Distantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b*, per lemma V. lib. I.

(c) * *Et mediorum densitates, ut &c.* ob datam in utroque spatio fluidi massam (2. lib. 1.).

(d) * *Et hæ se mutuo prement iisdem viribus &c.* Pressiones enim in unoquoque spatio sunt ubique æquales; nam cùm fluidum uniforme supponatur, si pressio minor esset in uno loco quàm in alio, sta-

viribus, quibus premuntur à planis *AC*, *ac*, hoc eſt, in proportione *ab* ad *AB*: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *FGH* in cubo majore, ſunt ad vires, quas ſingulæ exercent, in ſingulas ſecundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab* ad *AB*, hoc eſt, reciprocè ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXIII. THEOR. XVIII.

Et vice verſâ, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciprocè ut diſtantiæ, id eſt, reciprocè ut cuborum latera *AB*, *ab*; ſummæ virium erunt in eâdem ratione, & preſſiones laterum *DB*, *db* ut ſummæ virium; & preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati *DP* ad preſſionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

(e) *Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si

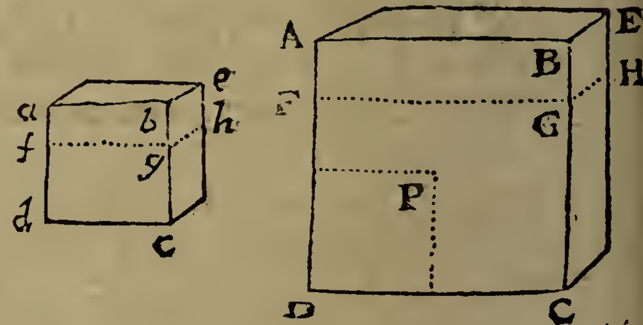
ſtatim cederet fluidum magis preſſum, atque ita preſſio ad æqualitatem reſtitueretur, ut in caſu 6°. prop. XIX.

(e) * *Simili argumento &c.* Sunto *D* & *d* particularum diſtantiæ in ſpatiis cubicis ACE & ace quæ ſunt ut AB & ab, earumdem vires centrifugæ ut D^n & d^n reciprocè, fluidi denſitates *E* & *e*, & vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$.

Nam cùm ſummæ virium quas omnes ſimul particulæ exercent in latera DB, db, ſint ut ſingularum particularum vires erunt iſtæ ſummæ virium ut D^n & d^n reciprocè, ſeu ut ab^n & AB^n directè; & preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati DB ut ab^2 ad AB^2; unde ex æquo preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati db, hoc eſt, vis comprimens in ſpatio ACE ad vim comprimentem in ſpatio ace, ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Sunt autem denſitates, ſive eſt *E* ad *e*, ut ab^3 ad AB^3, & ideo 178.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXIII. THEOR. XVII.

Si vires centrifugæ ſint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantiâ, & E pro denſitate fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciprocè ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n + 2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete quam à laminâ trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſuis generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur fluida de quibus actum eſt in hâc propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris



ideo $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$ ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}.

Quare vires comprimentes ſunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. E. D.

Et vice verſâ, ſi vires comprimentes ſunt ut denſitatum dignitates $E^{\frac{n+2}{3}}$, $e^{\frac{n+2}{3}}$, ſeu ut ab^{n+2}, AB^{n+2}; erit preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati d b in eâdem ratione, & preſſio quadrati D B eſt ad preſſionem quadrati D P, ut AB^2 ad ab^2; &, ex æquo, preſſio quadrati D B ad preſſionem quadrati d b, ut ab^n ad AB^n, ſeu ut d^n ad D^n. Sunt autem vires particularum ſingularum ut ſummæ virium, hoc eſt, ut preſſiones laterum D B, d b; quare vires particularum centrifugæ ſunt reciprocè ut diſtantiarum dignitates D^n, d^n. Q. E. D.

Jam ſi loco n ſcribantur numeri 2, 3, &c., patet veritas eorum quæ initio ſcholii dixit Newtonus.

(f) * *Opus erit vi majori &c.* Non enim ſolum vincenda erit per compreſſionem vis centrifuga particularum proximarum, ſed & remotiorum vis erit ſuperanda quæ (ex hyp.) in infinitum propagatur.

joris quantitatis fluidi. An vero fluida elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, quæstio physica est. Nos proprietatem fluidorum ex ejusmodi particulis constantium mathematicè demonstravimus, ut philosophis ansam præbeamus quæstionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & resistentiâ corporum funependulorum.

(g) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum à centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directè, & materia inversè. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem

(g) * *Propositio XXIV.* In hâc propositione & ejus corollariis supponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut saltem in exiguis magni circuli arcubus oscillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ à materiâ ipsorum distinguuntur; primo, quod nondum assumi possit gravitatem agere secundùm rationem massarum; cum id ipsum ex isto Theoremate postea deducatur, cor. 7. ; & secundo, in diversis locis gravitas diversa esse potest (ut quidem ex experimentis constat) ideoque corporum duorum in diversis iis locis spectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum. 178.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIV. Theor. XIX.

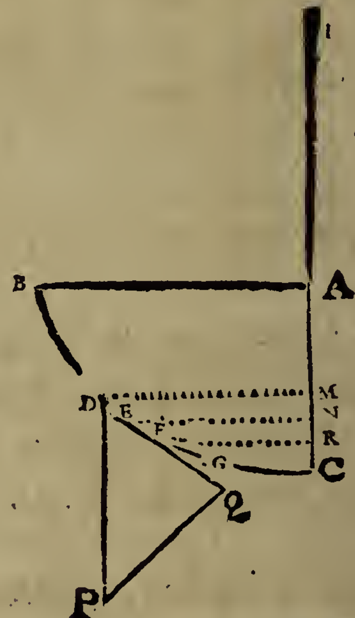
gem secundam manifestum est. (h) Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cùm (i) tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillatio-

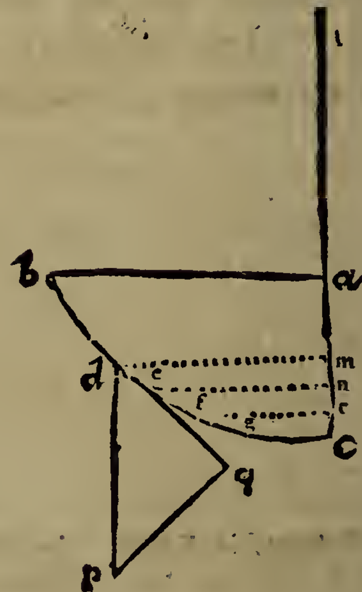
(h) *Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut Pondera.*

* Nam si Pendula ejusdem sint longitudinis, Cycloides plane similes & æquales describent: In unaquâque autem Cycloide, vires quibus corpora in locis quibusvis D, vel d accelerantur, sunt ad totum singuli corporis pondus in locis altissimis, ut arcus Cycloidis inter loca proposita D, d & puncta infima C, c, ad totas semi-Cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. 1.) Ergo si semicycloides sint æquales & loca D & d à perpendiculo æqualiter distent, arcus D C & d c erunt æquales, ideoque vis quâ corpus acceleratur in primâ Cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ Cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde vicissim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, est ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideoque *si pendula sint ejusdem longitudinis vires motrices &c.* Q. E. D.

(i) *Cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes* (æquales) *correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum.*

* Sint arcus D C, d c æquales, secenturque in partes æquales infinitè parvas D E, E F &c.; d e, e f &c., ex punctis D, E, F & d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, D M, E N, F R; D m, e n, f r; liquet lineolas M N & m n, M R & m r ex hypothesi fore æquales; Ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquisita in E erit ad velocitatem acquisitam in F ut Radix altitudinis M N ad Radicem M R, & pariter velocitas acquisita in e, erit ad velocitatem acquisitam in f ut $\sqrt{m\,n}$ ad $\sqrt{m\,r}$, cum er-





go $\sqrt{MN} = \sqrt{m\,n}$ & $\sqrt{MR} = \sqrt{m\,r}$ velocitas acquisita in E est ad velocitatem acquisitam in F, ut velocitas acquisita in e est ad velocitatem acquisitam in f, & vicis-

lationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè: ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directè & velocitates reciprocè. (§) Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora, atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. (††) *Q. E. D.*

Co-

vicissim velocitas acquisita in E, est ad velocitatem acquisitam in e; ut velocitas acquisita in F est ad velocitatem acquisitam in f. Sed quoniam arcus E F & e f F G & f g sunt infinite parvi & æquales, uniformiter describi censendi sunt, & tempora quibus describuntur erunt in ratione reciprocâ velocitatum, ideoque tempus quo describitur E F est ad tempus quo describitur e f, ut velocitas in e ad velocitatem in E, & tempus quo describitur F G est ad tempus quo describitur f g, ut velocitas in f ad velocitatem in F &c. sed rationes velocitatum in E & e, in F & f &c. sunt semper æquales inter se, ergo & rationes temporum quæ istarum sunt inversæ sunt æquales inter se; ergo tempora quibus singulæ partes arcus D C describuntur, sunt ad tempora quibus correspondentes partes arcus d c describuntur, in eâdem ratione, ergo omnes antecedentes & omnes consequentes summando, omnia simul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus D C, hoc est, totum tempus oscillationis per D C, est ad omnia tempora quibus partes arcus d c percurruntur, hoc est ad totum tempus oscillationis per d c ut tempus unum quo quædam pars arcus D C percurritur, est ad tempus quo pars correspondens arcus d c percurritur. Q. E. D.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè.* * Ex demonstratione notæ superioris liquet velocitates in correspondentibus partibus esse omnes in eâdem ratione, ideoque ut velocitas acquisita in E ad velocitatem acquisitam in e, sed cùm arcus D E & d c infinitè parvi supponantur, censendum est, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur; motus ergo per eas productus crescet tam pro ratione virium ipsarum quàm pro ratione temporis quo arcus illi describuntur sive (ex demonstratis) pro ratione temporum oscillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. lib. 1. æstimatur à Newtono ex velocitate & materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in *correspondentibus oscillationum partibus erunt ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ inversè.* 178.

(§) *Sed velocitates sunt reciprocè ut tempora.* * Ex demonstratis (ad notam superiorem i) liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e ut velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d c; Ex eâdem demonstratione liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e, in ratione reciprocâ temporum quibus describuntur arcus E F, & e f; hæc verò tempora esse ut tempora oscillationum integrarum, unde velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C, est ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d e, in ratione reciprocâ temporum oscillationum totarum. Q. E. D.

(††) *Quod Erat Demonstrandum.* * In demonstratione probatum est quod si describantur arcus æquales D C, d c quantitates materiæ sunt ut pondera & quadra-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIV. Theor. XVIII.

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

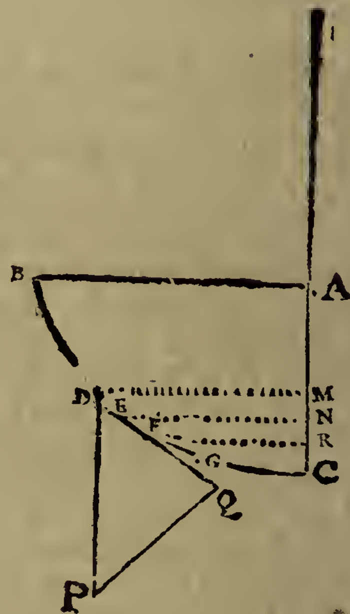
Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

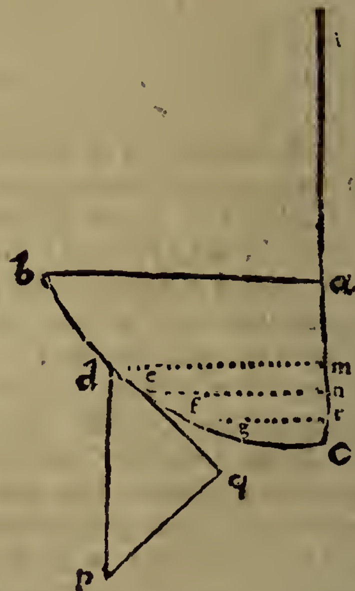
Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde (k) cum quadrara temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantita-

drata temporum, sumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c sed quantitates materiæ & pondera utrinque maneant eadem quæ prius, & pariter ob Isochroneitatem curvæ b d c, tempus oscillationis per b c, æquale erit tempori oscillationis per d c, ideoque quicumque sint arcus descripti si modo maneat penduli longitudo, eademque sit utrinque cycloïs, pariter verum erit quod quantitates materiæ sunt ut pondera & quadrata temporum oscillationum.

(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia esse, & arcus D C, d c non sumi æquales ut prius, sed similes, sive proportionales longitudinibus L C, l c, secetur D C in partes æquales inter se, & d c in partes similes, ita ut sit D E ad d e ut L C ad l c ductisque perpendiculis D M, E N, d m, e n &c. liquet ex similitudine figurarum altitudines M N & m n, M R & m r &c. esse etiam inter se in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus describuntur arcus E F, F G sunt ut $\sqrt{MN}$ ad $\sqrt{MR}$, & velocitates quibus describuntur arcus e f, f g sunt ut $\sqrt{mn}$ ad $\sqrt{mr}$, sed quia M N & m n, M R & m r, sunt in eâdem ratione ideoque & earum radices, vicissim, velocitas quâ describitur E F est ad velocitatem quâ describitur e f, ut velocitas quâ describitur F G ad velocitatem quâ describitur f g; & sic ordine perpetuo demonstrabitur velocitates quibus successivæ partes correspondentes utriusque curvæ percurruntur fore semper in eâdem ratione; tempora verò quibus arcus similes describuntur sunt directè ut illi arcus & inversè ut velocitates; ergo cum ratio





titates materiæ æqualia ſunt, (l) pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et (m) univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo penduli inversè.

Corol. 6. Sed & in medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut (n) ſupra explicui; ideoque idem præſtat in tali medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo. *Co-*

tio arcuum correſpondentium ſit ſemper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut & ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, ſingula tempuſcula quibus deſcribuntur particulæ arcus D C eamdem rationem habebunt ad tempuſcula quibus correſpondentes particulæ arcus d c percurruntur; ideoque tempora tota oſcillationum per D C & d c erunt directè ut longitudines L C & l c, & inversè ut velocitates in punctis quibuſvis correſpondentibus arcuum D C & d c, putà in punctis infimis C & c, ſed quia ex hypotheſi quod pondera ſunt æqualia & quod quantitates materiæ ſunt æquales, velocitates ſunt proportionales Radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C & c erunt ut $\sqrt{MC}$ ad $\sqrt{mc}$: ſed ex ſimilitudine curvarum & arcuum eſt m c ad M C ſicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C & c ſunt ut $\sqrt{LC}$ ad $\sqrt{lc}$, ideoque tempora oſcillationum integrarum in arcubus D C, d c erunt ut $\frac{LC}{\sqrt{LC}}$ ad $\frac{lc}{\sqrt{lc}}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{LC^2}{LC}$ ad $\frac{lc^2}{lc}$ ſive ut L C ad l c, hoc eſt ut longitudines pendulorum. Q. E. D.

(l) * *Pondera erunt ut longitudines pendulorum, & univerſaliter quantitas materiæ Pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inversè.* * Sint duo pendula A & B, quæ materiâ, pondere & oſcillationum temporibus diſcrepent, ſed æqualis ſint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ pendulæ in A ad quantitatem materiæ pendulæ in B, ut pondus & quadratum temporis oſcillationum penduli A conjunctim ad pondus & quadratum temporis oſcillationum penduli B conjunctim; ſit tertium pendulum C, cujus materia & pondus eadem ſint cum materiâ & pondere penduli B, diverſa verò ſit utriuſque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (ſive penduli A, perinde enim eſt ex hypotheſi (ut quadratum temporis in Pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli multiplicato & per longitudinem penduli C diviſo; Unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B ſive in C, ut pondus & quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, ſive in C, cum quadrato temporis in C & longitudine penduli A directè & longitudine penduli C inversè: unde liquet quantitatem materiæ in A eſſe ad quantitatem materiæ in C, ut pondus & quadratum temporis in pendulo A directè & ejus longitudo inversè ad pondus & quadratum temporis penduli C directè & ejus longitudinem inversè. Q. E. D. *univerſaliter.*

Unde ſi & tempora & quantitates materiæ eadem ſunt, pondera ſunt ut longitudines pendulorum directè.

(m) * *Et univerſaliter.* Vide Notam ſuperiorem.

(n) * *Ut ſupra explicui*, in cor. VI. & VIII. prop. XX. 178.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Corol. 7. Et (o) hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, (p) ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut (q) longitudo

(o) * *Et hinc liquet ratio &c.* Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oscillationum temporibus, & ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (*per cor. V.*); & contra.

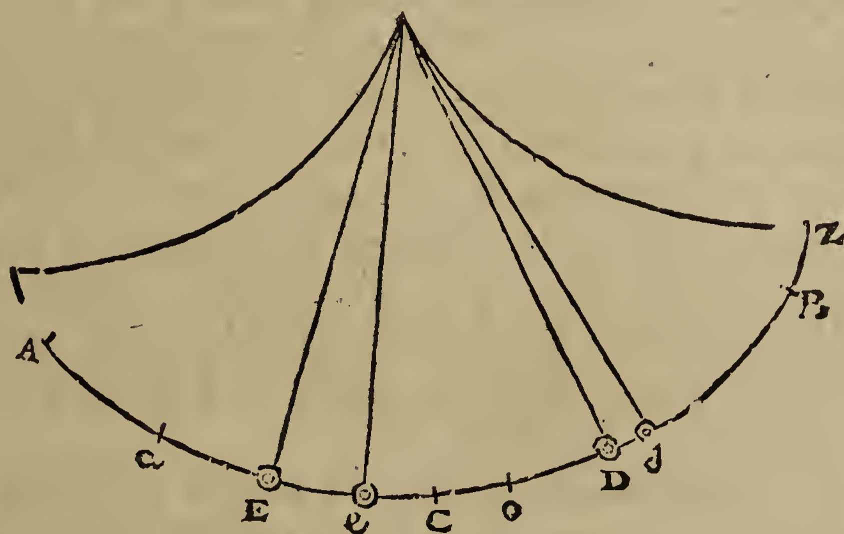
(p) * *Ad cognoscendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejusdem penduli oscillationes tardiores sunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor est, cum in eodem pendulo pondera sint reciprocè ut quadrata temporum (*per cor.* III.). Sed de his plura ad prop. XX. lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda sit diligentia, Clariss. D. *de Mairan* eâ quâ solet perspicuitate & elegantiâ exponit in monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1735.

179. Quia numeri oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt (473. *lib.* I.), numeri oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (*per cor.* V. *prop. hujus*) in compositâ ratione ex ratione subduplicata directa ponderum & subduplicatis rationibus inversis massarum & longitudinum pendulorum; sive, quoniam pondus est ut factum ex massâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oscillationum numeri in ratione subduplicata directa virium gravitatis acceleratricium & ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, sed eâdem vi gravitatis agitatorum, numeri oscillationum eodem tempore absolvendarum sunt in reciprocâ subduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, & numeri oscillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in subduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc est regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit *Joh. Bernoulli* in Actis Erudit. Lips. an. 1713.

(q) *Ut longitudo arcus &c.* Per demonstr. Prop. LI. & cor. II. Prop. LII. Lib. I.

do arcus *C D* vel *C d* vel *C E.* Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem *C O*, & ſumatur arcus *O d* in ratione ad arcum *C D* quam habet arcus *O B* ad arcum *C B*: & vis quâ corpus in *d* urgetur in medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis *C d* ſupra reſiſtentiam *C O*, exponetur per arcum *O d*, ideoque erit ad vim, quâ corpus *D* urgetur in medio non reſiſtente in loco *D*, ut arcus *O d* ad arcum *C D*; & propterea etiam in loco *B* ut ar-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXV. THEOR. XX.



cus *O B* ad arcum *CB*. Proinde ſi corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus *C B* & *O B*; (r) erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi *B D*, & *B d*, arcus reliqui *C D*, *O d* erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipſis *CD*, *O d* proportionales manebunt in eâdem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *O d* ſemper erunt ut arcus toti *C B*, *O B*; &

(r) * *Erunt velocitates primæ &c.* Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ ſunt ut vires (13. *lib.* I.) & ut ſpatia deſcripta (*per cor.* 4. *lem.* X. *lib.* I.)

& propterea arcus illi reliqui (f) ſimul deſcribentur. Quare corpora duo *D*, *d* ſimul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in medio non reſiſtente ad locum *C*, & alterum in medio reſiſtente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* ſint ut arcus *CB*, *OB*; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in (t) eâdem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis quâ corpus *D* in medio non reſiſtente retardatur in *E* eſt ut *CE*, & vis quâ corpus *d* in medio reſiſtente retardatur in *e* eſt ut ſumma vis *Ce* & reſiſtentiæ *CO*, id eſt ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum *CB* & *OB*; & (u) propterea ſi ſumantur arcus toti *AB*, *aB* in eâdem ratione, corpora *D*, *d* ſimul deſcribent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales ſunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum *C*, ſed (x) reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus deſcriptus *aB* biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad *a*, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo à *B* ad *O*.

PRO-

(f) * *Simul deſcribentur.* Quia enim eſt ſemper C B ad O B, ut C D ad O d; evaneſcente arcu O d, evaneſcet etiam arcus C D, ſeu punctum d cum O, & D cum C ſimul coincident.

(t) * *In eâdem ratione.* Sunt enim velocitates, ut ſpatia dato temporis momento deſcripta, tam in medio reſiſtente quam in medio non reſiſtente (11.)

(u) * *Et propterea.* Si ſumatur arcus A C æqualis C B, & deinde arcus a B ad arcum A B in datâ ratione O B ad C B; corpora D & d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Nam cum ſit ſemper arcus C E ad O e ut C B ad O B, ſeu ut C A ad O a, ubi arcus C E æqualis evadet arcui C A, fiet quoque arcus O e æqualis arcui C a; & quia motus in medio non reſiſtente extinguitur in A, ob C A = C B; in medio reſiſtente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e & A, a ſint in datâ ratione.

(x) * *Sed reperitur in puncto illo O, quo &c.* Nam ratio velocitatum in mediis reſiſtente & non reſiſtente eſt ſemper eadem.

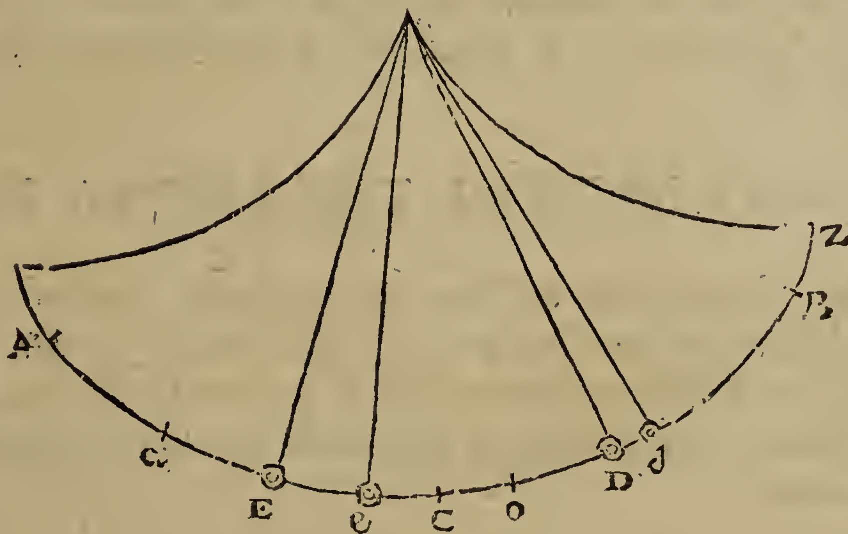
PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVI. THEOR. XXI.

Corporum funependulorum, quibus reſiſtitur in ratione velocitatum, oſcillationes in cycloide ſunt Iſochronæ.

(y) Nam ſi corpora duo, à centris ſuſpenſionum æqualiter diſtantia oſcillando deſcribant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correſpondentibus ſint ad invicem ut

arcus



eadem in punctis correſpondentibus ut in d & D, in O & C, in e & E; ſed corporis in medio non reſiſtente oſcillantis velocitas maxima eſt in loco infimo C, & iiſdem gradibus retardatur in aſcenſu, quibus antea accelerabatur in deſcenſu; quare motus velociſſimus in medio reſiſtente reperitur in O, & iiſdem deinde gradibus retardatur in aſcenſu, quibus ante accelerabatur in deſcenſu.

(y) * *Nam ſi corpora duo*, exempli causâ B & D, *à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtantia, oſcillando deſcribant arcus inæquales* B a, D e, *& velocitates in arcuum partibus correſpondentibus*, ſeu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis &c., *ſint ad invicem ut arcus toti* B a, D e: *reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis* (ſecundum tangentes cycloidis agentibus) *quæ ſint ut iidem arcus* B a, D e, *auferantur* dum corpus deſcendit, *vel addantur* dum corpus aſcendit, *hæ reſiſtentiæ; erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa*, dato temporis momento genita, *ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ* (18), *velocitates ſemper erunt ut arcus toti* B a, D e: *igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt è* locis B, D *deſcendere & arcus illos* B a, D e *deſcribere*, ideoque ubi reſiſtentia nulla eſt, *vires ſunt arcubus illi proportionales.* Vires igitur, & velocitates, & arcus deſcripti, ac proinde & arcus deſcribendi, manent ſemper in datâ ratione. Quare corpora duo 179.

 ſimul.

arcus toti; resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quam proximè.

(z) Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A, B; & resistentia corporis in arcu A, erit ad

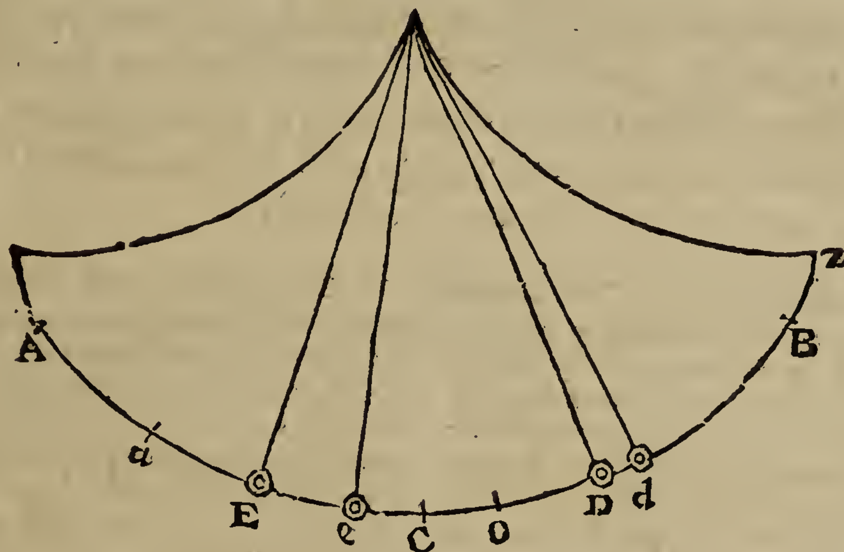
simul perveniunt ad punctum infimum C; & eodem modo probatur quod arcus C a, C e simul describant.

Scholium. Newtonus in duabus propositionibus præcedentibus ostendit cycloidem esse curvam isochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantùm in medio non resistente, sed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, & in medio quod ratione simplici velocitatis resistit; Verum quænam sit curva illa tautochrona in hypothesi resistentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantissimas hujusce problematis solutiones dedere celeberrimi mathematici Eulerus tom. 4. Acad. Petrop. & tom. 2. Mechanicæ; necnon Clariss. Bernoullius in monumentis Acad. Reg. Scientiarum Paris. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochronæ in medio quolibet resistente possint inveniri aperuit D. Fontaine in iisdem monumentis anni 1734.

(z) * *Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A & B,* * ad pleniorem hujus demonstrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter se æquales dividi, singulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque *a* & *b*, si medium aut non resisteret aut resisteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarum-

ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id eſt, ut AA ad BB, quam proximè. Si reſiſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut A B ad A A, tempora in arcubus A & B forent æ-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXVII. Theor. XXII.



qualia, per propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia A A in arcu A, vel A B in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in medio non reſiſtente; & reſiſten-

rumvis correſpondentium a & b, forent ut arcus ipſi A & B; At in medio reſiſtente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diverſa erit hæc velocitatum ratio, ſed propter exiguam rationem reſiſtentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, & ſupponi poteſt velocitates manere in ratione arcuum quam proximè; quod ſi ita ſupponatur *reſiſtentia corporis in quovis puncto arcus A erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B*, ſicut quadrata velocitatum in punctis illis correſpondentibus eorum arcuum, id eſt ut *quadrata ipſorum arcuum A A & B B quam proximè*. Deſignetur vero velocitas initio arcus a per $v\,A$, & initio arcus b per $v\,B$. Deſignetur porro reſiſtentia initio arcus a per $m\,A\,A$, & reſiſtentia initio arcus b per $m\,B\,B$; In medio non reſiſtente tempuſcula quibus ſingulæ particulæ a & b deſcribentur erunt æqualia, (per Prop. II. lib. I.) deſignentur verò per T; Cum ergo in medio reſiſtente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inverſâ ratione velocitatum ut x exceſſus ille tempuſculi quo arcus a deſcribitur in medio reſiſtente ſupra tempuſculum quo idem arcus in medio non reſiſtente percurritur habebiturque ex hypotheſibus $v\,A - m\,A\,A : v\,A = T : T + x$. 179

Ut inveniatur ratio hujus exceſſus x ad exceſſum tempuſculi quo arcus deſcribitur in medio reſiſtente ſecundum Legem duplicatam velocitatis, ſupra tempuſculum T, quo idem arcus in medio non reſiſtente percurritur; ſupponatur arcum B in tali medio deſcribi ut reſiſtentia in punctis a arcûs A, ſit ad reſiſtentiam in punctis correſpondentibus b arcûs B, ſicut A eſt ad B, ideoque ſicut velocitates initio arcuum illorum, ſive cum reſiſtentia in a ſit $m\,A\,A$ reſiſtentia in b fingatur eſſe $m\,A\,B$, cùm

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXVII. Theor. XXII.

resistentia B B efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes A B & B B quam proximè, id est, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut (b) differentia arcuum ad arcum minorem. *Co-*

cùm ergo resistentiæ sint in ipsâ ratione velocitatum, velocitates demptis resistentiis manebunt in eâdem ratione, in ratione nempe arcuum describendorum a & b, qui ergo æqualibus temporibus describentur, sed tempus quo describitur arculus a est $T + x$ ergo si resistentia in arcu B, sive b sit $m\ A\ B$ ideoque velocitas sit $v B - m A B$ tempus quo describetur arcus b erit etiam $T + x$.

Cum autem reverâ resistentia initio arcus b non sit $m\ A\ B$ sed $m\ B\ B$, si y sit excessus tempusculi in quo b describitur in medio resistente juxta quadrata velocitatum supra tempus quo idem arcus in medio non resistente percurritur, erit tempus $T + x$ ad tempus $T + y$ reciproce sicut velocitas $v B - m A B$ quæ supponebatur, ad velocitatem $v\ B - m B B$, eritque ideo $v B - m B B$ ad $v B - m A B = T + x$, ad $T + y$, cum ergo substractio quantitatum $m B B$, $m A B$ ex velocitate $v\ B$ producat excessus x & y supra tempus T, oportet ut illæ quantitates $m B B$, $m A B$, sint reciprocè ut x & y, sed $m\ A\ B$ & $m B B$ sunt ut A ad B, ergo A est ad B, sicut x est ad y, ideoque excessus x temporis arcus A in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatis supra tempus in eodem arcu A in medio non resistente, est ad excessum y temporis arcus B in eodem medio supra tempus in eodem arcu B in medio non resistente, ut arcus A ad arcum B, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quamminimis a & b institui possit, summæ omnium excessuum tempusculorum in arcu A, erit ad summam omnium excessuum tempusculorum in arcu B ut A ad B. Q. E. D.

* Quod excessus x & y tempusculorum quibus describuntur arcus a & b, in medio resistente juxta rationem duplicatam velocitatum, supra tempus quo describerentur in medio non resistente sint ut A & B, ex superiori demonstratione alio modo erui potest. Nam manentibus quæ illic posueramus est.

$v A - m\ A\ A : v A = T : T + x$ est etiam simili ratione $v B - m\ B B : v B = T : T + y$ & dividendo in utraque proportione fit

$v\ A - m\ A\ A : m\ A\ A = T : x$

$v\ B - m B\ B : m B\ B = T : y$.

Sed ob exiguitatem resistentiæ velocitatis respectu assumi potest $v\ A - m\ A\ A$ pro $v\ A$, & $v\ B - m\ B\ B$ pro $v\ B$, unde est quam proximè.

$v\ A : m\ A\ A = T : x$

$v\ B : m\ B\ B = T : y$ & reducendo priores rationes utriusque proportionis ad minores terminos.

$v : m\ A = T : x$

$v : m\ B = T : y$ & viciffim

$v : T = m\ A : x$

$v : T = m\ B : y$, unde est

$m\ A : x = m\ B : y$, ideo viciffim

$m\ A : m\ B = x : y$, sed $m\ A : m\ B = A : B$, ideoque $A : B = x : y$. Ideoque excessus temporum in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatum, supra tempora in medio non resistente in arcubus inæqualibus sunt ut illi arcus.

(b) * *Differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente ut differentia arcuum ad arcum minorem* +.

* Tempus per arcum A est $T + x$, tempus per arcum minorem B, est $T + y$, ergo differentia temporum $T + x - T - y = x - y$,

Corol. 2. ([c]) Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulò majora, ([d]) propterea quòd resistentia in descensu corporis quâ tempus producitur, ([e]) major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quàm resi-



$x - y$, & excessus temporis in minore arcu supra tempus in medio non resistente est y juxta denominationes notæ superioris, sed ex Theoremate est $x : y = A : B$ ergo dividendo $x - y : y = A - B : B$, hoc est *differentia temporum est ad excessum &c.*

(c) * *Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quam proximè.* * Brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quàm proximè; sit A arcus major, B minimus, inventum est (in nota a) quod erat $vA - mAA : vA = T : T + x$, & etiam quod erat $vB - mBB : vB - mAB = T + x : T + y$, unde per compositionem rationum invenitur $v^2AB - mvAAB - mvABB + m^2AABB$ (sive $\overline{v^2AB - mvA^2B} \times \overline{1 - \frac{mB}{v}}$) ad $v^2AB - mvA^2B = T : T + y$, itaque in primo termino neglecto $-\frac{mB}{v}$ (quod infinitè parvum supponitur ob exiguitatem arcus B ut & quantitatis m respectu v) fiet $v^2AB - mvAAB : v^2AB - mvAAB = T : T + y$; est ergo $T = T + y$, sive tempus in medio non resistente idem ac in medio resistente quàm proxime. 179.

Sed oscillationes in medio non resistente sunt Isochronæ, hinc ergo Oscillationes breviores in medio resistente ad has quàm proxime accedentes cæteris sunt magis Isochronæ. Q. E. D.

(d) * *Propterea quod resistentia in descensu &c.* Quo major est resistentia, eò minor fit, cœteris paribus, corporis descendentis velocitas, & ideo, manente descensûs longitudine, tempus per resistentiam producitur; & contra, quò major est resistentia, eò citius extinguitur velocitas corpori insita in ascensu.

(e) * *Major sit pro ratione longitudinis.*

resistentia in ascensu subsequente quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum medii. (f) Nam corporibus tardescentibus paulò minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulò magis quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minns cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

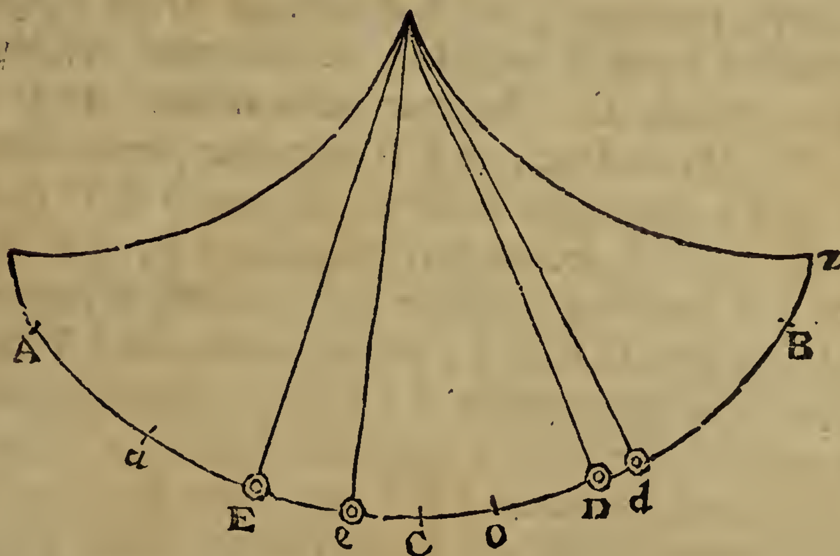
Designet BC arcum descensu descriptum, Ca arcum ascensu descriptum; & Aa differentiam arcuum: & stantibus quæ in propositione xxv. constructa & demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut

nis. Longitudo in descensu descripta semper major est quàm longitudo descripta in ascensu subsequente, si medium resistit; cùm longitudines illæ in medio non resistente sint æquales (92. lib. I.).

(f) * *Nam corporibus tardescentibus*, seu quorum velocitas continuo decrescit, ut fit in corporum ascensu, paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis; & corporibus acceleratis, seu descendentibus, paulò magis resistitur quàm iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim casu, medium eo quem à corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conservat, in eamdem plagam pergit cum corporibus, & ob validiorem ab initio motûs continue decrescentis acceptam impressionem magis agitatur, ac proinde magis conspirat cum corporibus motis, minoremque iis resistentiam objicit. At in secundo casu cùm motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non satis velocem motum accepit, & ideo ejus celeritas novis impulsibus continuo augenda est ut possit cum corporibus motis conspirare; hincque corporibus acceleratis resistit magis quàm uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in descensu magis resistit medium, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur. Nam quò major est resistentia in descensu, & minor in ascensu, eo magis producitur tempus, ut supra dictum est.

ut arcus CD ad arcum CO, qui (g) semissis est differentiæ illius Aa. Ideoque vis, quâ corpus oscillans urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, id (h) est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum C ad arcum CO; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, seu (i) dupla penduli longitudo, ad arcum Aa. *Q. E. D.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVIII. THEOR. XXIII.



PRO-

(g) * *Qui semissis est differentiæ illius Aa.* Nam (*per hyp.*) arcus C A æqualis est arcui C B, & (*per cor. prop.* XXV.) arcus O a æqualis est arcui O B; quare C A — O a, seu A a — C O = C B — O B = C O, & hinc A a = 2 C O, ac C O = ½ A a.

(h) * *Id est vis gravitatis.* In cycloidis principio sive puncto altissimo tangens cycloidis est in directione gravitatis, & idcirco vis in cycloide æqualis est vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex *cor. prop. LI. lib.* I.

(i) * *Seu dupla penduli longitudo* (452. lib. I.).

178.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIX. Probl. VI.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit *B a* arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque *C* infimum cycloidis punctum, & *CZ* semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *O Q* in punctis *O*, *S*, *P*, *Q*, eâ lege, ut (si erigantur perpendicula *O K*, *S T*, *P I*, *Q E*, centroque *O* & asymptotis *O K*, *O Q* describatur hyperbola *T I G E* secans perpendicula *S T*, *P I*, *Q E* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *K F* parallela asymptoto *O Q* occurrens asymptoto *O K* in *K*, & perpendiculis *S T* & *Q E* in *L* & *F*) fuerit area hyperbolica *P I E Q* ad aream hyperbolicam *P I T S* ut arcus *B C* descensu corporis descriptus ad arcum *C a* ascensu descriptum, & area *I E F* ad aream *I L T* ut *O Q* ad *O S*. Dein perpendiculo *M N* abscindatur area hyperbolica *P I N M* quæ sit ad aream hyperbolicam *P I E Q* ut arcus *C Z* ad arcum *B C* descensu descriptum. Et si perpendiculo *R G* abscindatur area hyperbolica *P I G R*, quæ sit ad aream *P I E Q* ut arcus quilibet *CD* ad arcum *B C* descensu toto descriptum; erit resistentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ ad aream *P I N M*.

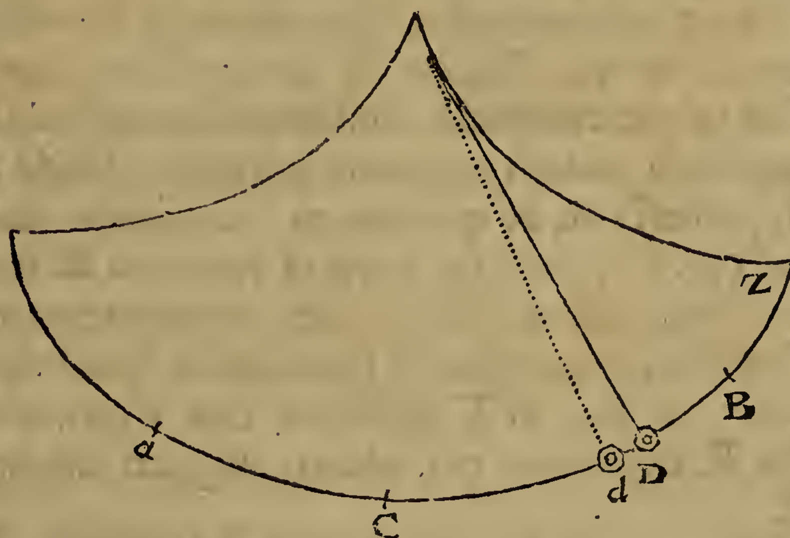
Nam cùm vires à gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, (k) sint ut arcus *C Z*, *C B*, *CD*, *Ca*, & (l) arcus illi sint ut areæ *P I N M*, *P I E Q*, *P I G R*, *P I T S*; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper *D d* spatium quàm minimum à corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *R G g r* parallelis *R G*, *r g* comprehensam; & producatur

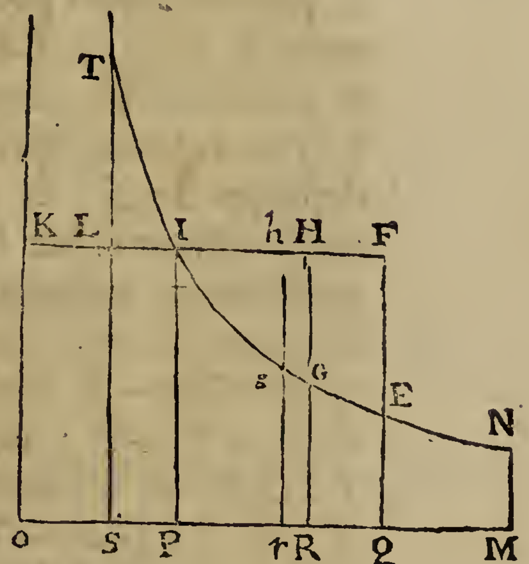
(k) * *Sint ut arcus &c.*, per demonstrata in prop. LI, & Cor. 2, prop. LII. lib. I.

(l) * *Et arcus illi sint ut areæ*, per constructionem.

rg ad h, ut sint $GHhg$, & $RGgr$, contemporanea (m) arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et (n) areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$, seu

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIX. Probl. VI.





$Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ seu (o) $OP \times PI$, hoc est (ob (p) æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$

(m) * *Arearum IGH, PIGR decrementa.* Cum enim corpus è loco D descendit in arcu DC, decrescit area PIGR huic arcui proportionalis, & cum eâ decrescit quoque area IGH.

(n) * *Et areæ &c.* Nam, ob datas OQ, & IEF, decrementum areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$, sumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{Rr}{OQ}IEF - GHhg$; & ideo, mutatis signis, ejusdem areæ incrementum est $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu &c.

179.

(o) * *Seu OP × PI.* Per theor. 4. de hyperbolâ.

(p) * *Ob æqualia &c.* Cùm sit $HG = HR - GR$, erit $OR \times HG = OR \times HR - OR \times GR$; sed $OR \times HR$ æquale est rectangulo $ORHK$, & (*per theor. 4. de hyp.*) $OR \times GR$ æquale est rectangulo $OPIK$. Quare $OR \times HG = ORHK - OPIK = PIHR = PIGR + IGH$.

PIHR & *PIGR*+*IGH*) ut *PIGR*+*IGH*$-\frac{OR}{OQ}$*IEF* ad *OPIK*. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}$*IEF*—*IGH* dicatur Y, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, ([q]) erit incrementum areæ Y ut *PIGR*—Y.

Quod si V designet vim à gravitate oriundam, arcui describendo *CD* proportionalem, quâ corpus urgetur in *D*, & R pro resistentia ponatur; erit V—R vis tota quâ corpus urgetur in *D*. ([r]) Est itaque incrementum velocitatis ut V—R & particula illa temporis in quâ factum est conjunctim: Sed ([s]) & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè & particula eadem temporis inversè. Unde, cùm resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (*per* ([t]) *lem.* 11.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id ([u]) est, ut momentum spatii & V—R conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut V—R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens *PIGR*, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut *PIGR*—Z.

Igitur areâ *PIGR* per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione *PIGR*—

Y,

(q) * *Erit incrementum areæ Y ut PIGR—Y.* Quoniam enim (hyp.) est $\frac{OR}{OQ}$ IEF—IGH=*Y*, & (ex demonstratis) incrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$ IEF—IGH est ad decrementum (*ex hyp.*) datum RGgr, ut PIGR+IGH$-\frac{OR}{OQ}$IEF, seu PIGR—*Y*, ad datum rectangulum OPIK; manifestum est quod incrementum areæ *Y* sit ad PIGR—*Y* in datâ ratione; nimirum in ratione decrementi dati RGgr ad rectangulum datum OPIK.

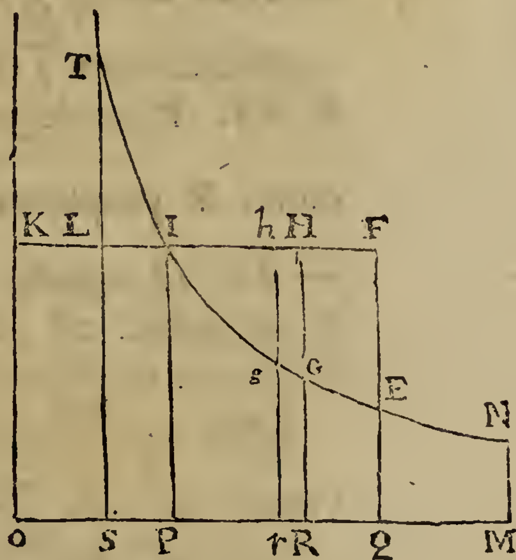
(r) * *Est itaque incrementum velocitatis, ut &c.* (18.)

(s) * *Sed & velocitas ipsa est &c.* (11).

(t) * *Per Lemma* II. casu 3°. idque statim apparet: nam si velocitas dicatur v, cum sit *R* ut vv, erit dR ut $2vdv$, seu ut vdv.

(u) * *Id est, ut momentum spatii &c.* Quia (ex dem.) velocitatis incrementum est ut *V*—*R* & momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipsa ut incrementum spatii directè & momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in suum incrementum ducta, ut *V*—*R* & incrementum spatii conjunctim, in quâ ratione est etiam incrementum resistentiæ (*ex dem.*).

Y, & area Z in ratione *PIGR* — Z. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ (x) per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia



si resistentia Z augeatur; velocitas unà cum arcu illo *Ca*, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis unà cum resistentiâ cessat propius accedente ad punctum *C*, (y) resistentia citius evanescet quàm area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur. Jam

(x) * *Hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales*, &c. Cùm enim semper crescat area *Y* in ratione PIGR — *Y*, & area Z in ratione PIGR — Z; si areæ illæ *Y* & *Z* simul incipiant & initio æquales sint, erunt etiam areæ PIGR — *Y* & PIGR — *Z* sub initio æquales; &, ob datam incrementorum areæ *Y* & areæ *Z* ad PIGR—*Y* & PIGR —*Z* rationem, incrementa illa sicut & PIGR — *Y* ac PIGR — *Z* manebunt semper æqualia, uti sub initio. Quare etiam areæ *Y* & *Z* æqualibus itidem momentis subinde decrescent & simul evanescent.

(y) * *Resistentia citius evanescet quàm area* Y, *& contrarium &c.* Nam si area Z semper æqualis sit areæ *Y*, simul incipient simulque evanescent. Incipit autem area *Y* (ut infra ostendetur) ubi recta R G incidit in rectam Q E, & desinit ubi recta R G incidit in rectam S T, suntque Q & S puncta fixa per arcuum C B, C a longitudines determinata (*per constr.*). Quare si resistentia *Z* augeatur vel minuatur ita ut cesset in puncto arcûs C a infra vel supra a positum, citius vel tardius evanescet area *Z* quàm area *Y*, quia hæc non desinit nisi ubi corpus pervenit ad locum a. Resistentia igitur, seu area *Z* nec major nec minor esse potest quàm area *Y*, si simul incipiant & simul evanescant. 179.

Jam verò area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motûs ubi arcus *C D* arcui *C B* æquatur & recta *R G* incidit in rectam *Q E*, & in fine motus ubi arcus *C D* arcui *C a* æquatur & *R G* (z) incidit in rectam *S T*. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ}$ *I E F* — *I G H* incipit desinitque ubi nulla est, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}$ *I E F* & *I G H* æqualia sunt: hoc (a) est (per constructionem) ubi recta *R G* incidit successivè in rectas *Q E* & *S T*. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}$ *I E F* — *I G H* æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream *P I N M* per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo *C* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}$ *I E F* ad (b) aream *P I N M*.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area *P I H R* est ad aream *I E F* ut *O R* ad *O Q*. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum *P I G R* — Y) (c) evadit nullum. *Corol.*

(z) * *Incidit in rectam S T.* Hæc patent per constructionem, quâ areæ P I E Q, P I G R, P I T S factæ sunt arcubus C B, C D, C a proportionales.

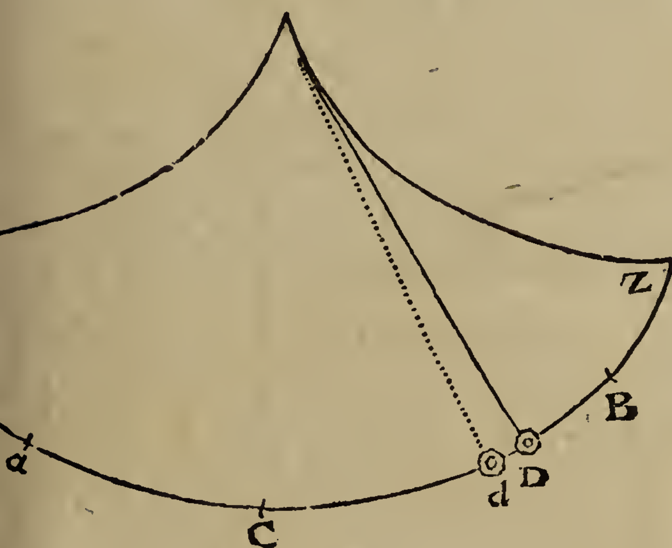
(a) * *Hoc est (per constructionem) ubi &c.* Ubi enim *Y* evanescit, fit quoque $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H = 0, & ideo $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H; hoc autem contingit ubi fit I E F : I G H = O Q : O R, quod evenit primo ubi recta R G incidit in rectam Q E & incipit area *Y*. Tunc enim I E F = I G H & O Q = O R ideoque I E F : I G H = O Q : O R. Est enim $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H, quando fit O R = O S & I G H = I L T: nam cùm (*per constr.*) sit area I E F ad aream I L T ut O Q ad O S, si ponatur O R = O S, fiet I L T = I G H, eritque area I E F ad aream I G H ut O Q ad O R, & hinc $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H. Est autem O R = O S, ubi recta R G incidit in rectam S T, & area *Y* definit ibidem.

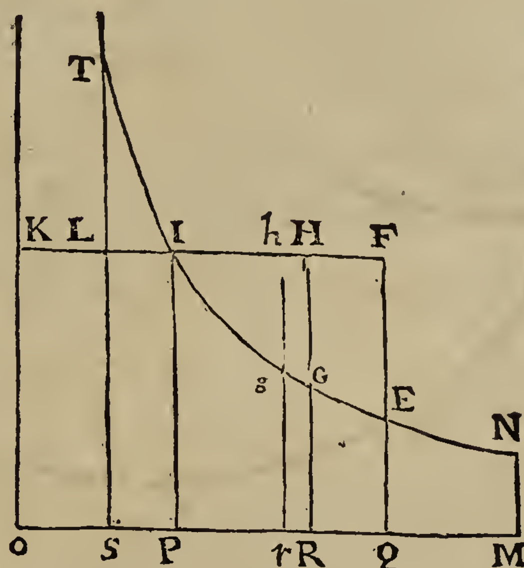
(b) * *Ad aream P I N M.* Nam evanescente arcu C D, evanescit ipsi proportionalis area P I G R, & hinc evanescit etiam area I G H, fitque O R = O P, atque proinde $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H = $\frac{OP}{OQ}$ I E F.

(c) * *Evadit nullum.* Momentum areæ *Y* est ut P I G R — *Y* (*ex dem.*), id est, ut P I G R + I G H — $\frac{OR}{OQ}$ I E F = P I H R = $\frac{OR}{OQ}$ I E F. Quâ propter momentum areæ *Y* nullum fit; & ideo resisten-

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, & ipso motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide sine (d) omni resistentiâ oscillantis.

Cæ-



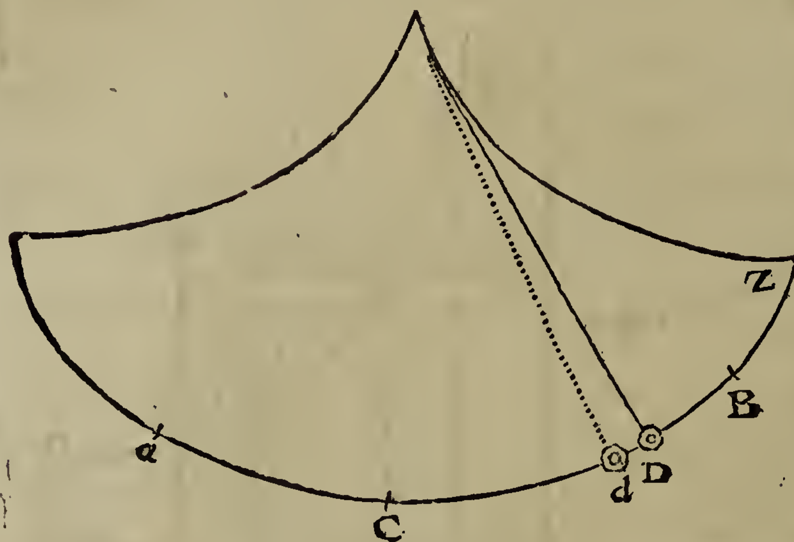


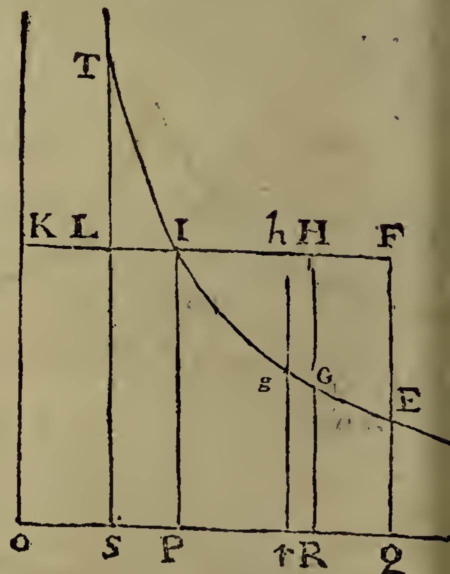
stentia (cui area Y proportionalis est) maxima evadit (48), ubi est $PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF = 0$, seu ubi $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$, ac proinde ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ.

(d) * *Sine omni resistentiâ oscillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D est ut resistentia, seu ut area Y in medio resistente; & ut $CB^2 - CD^2$ (*per prop. LII. lib. I.*) seu ut $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$ in medio non resistente; si velocitates illæ dicantur v, V, sintque C & E quantitates constantes, erit $vv = C \times Y$, & $VV = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$. Et quia initio motûs, dum corpus est in B, velocitates illæ æquales sunt, ob resistentiam respectu vis à gravitate oriundæ evanescentem; erit initio motûs $C \times Y = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$; sed initio motûs est Y, seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE =$ $\frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ}$ 179.
$= \frac{QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF}$, coincidente nimirum GH cum EF, & QR seu HF evanescente. Et similiter initio motus est $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2 = \overline{PIEQ + PIGR} \times \overline{PIEQ - PIGR} = \overline{2PIEQ - QR \times QE} \times \overline{QR \times QE} = 2PIEQ \times QR \times QE$, neglecto termino evanescente $QR^2 \times QE^2$. Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF} = E \times QR \times QE \times 2PIEQ$, & ideo $C : E = 2PIEQ \times QE : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$; unde, cum sit semper $vv : VV = C \times Y : E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$, erit quoque $vv : VV = 2PIEQ \times QE \times \overline{\frac{OR}{OQ} IEF - IGH} : \frac{\overline{OQ \times FE - IEF}}{OQ} \times \overline{\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2}$.

In-

Cæterùm (e) ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc propositionem inveniendæ sunt, visum est propositionem sequentem subjungere.





Innotescet igitur velocitas in medio resistente per inventam ipsius rationem ad velocitatem in medio non resistente in singulis locis.

(e) * *Cæterùm ob difficilem calculum &c.* Sit $OP = a$, $PI = FQ = b$, $OS = x$, & ideo $ST = \frac{ba}{x}$, $SP = LI = a - x$, & $LT = \frac{ba}{x} - b$. Deinde $OQ = z$, & hinc $QE = \frac{ba}{z}$, $PQ = FI = z - a$, & $FE = b - \frac{ba}{z}$. Et erit areæ PIEQ elementum $= \frac{badz}{z}$, areæ PITS elementum $= -\frac{badx}{x}$; & inde area PIEQ $= baL.z + Q$ *const.*; & quia area illa evanescit ubi est $PQ = z - a = 0$, seu ubi $z = a$, invenitur constans $Q = -baL.a$, atque adeo area PIEQ $= baL.z - baL.a = baL.\frac{z}{a}$. Simili modo reperitur area PITS $= baL.\frac{a}{x}$. Sit jam arcus BC ad arcum Ca, ut m ad 1; & erit (*per constr.*) $m : 1 = baL.\frac{z}{a} : baL.\frac{a}{x} = L.\frac{z}{a} : L.\frac{a}{x}$, ac proinde $L.\frac{z}{a} = mL.\frac{a}{x} = L.\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a} = \frac{a^m}{x^m}$, & $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex superioribus denominationibus invenitur areæ IEF elementum $= bdz - \frac{badz}{z}$, & inde area ipsa IEF $= bz - baLz + Q$ *const.* quæ cùm sit o ubi $FI = z - a$ evanescit fitque $z = a$, est $Q = -ba + baL.a$, ideoque IEF $= baL.\frac{a}{z} + bz - ba$; & similiter habetur area ILT $= baL.\frac{a}{x} + bx - ba$. Sed (*per constr.*) area IEF est ad aream ILT ut OQ ad OS; seu ut z ad x: quare $z : x = baL.\frac{a}{z} + bz - ba$

$-ba : baL\frac{a}{x} + bx - ba$, & dividendo per b, ac loco z ſcribendo ipſius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit $a^{m+1} : x^{m+1} = aL.\frac{x^m}{a^m} + \frac{a^{m+1}}{x^m} - a : aL.\frac{a}{x} + x - a$; unde habetur $a^{m+2}L.\frac{a}{x} + a^{m+1}x - a^{m+2} = ax^{m+2}L.\frac{x^m}{a^m} + a^{m+1}x - ax^{m+1}$; & inde eruitur $mx^{m+1}Lx - mx^{m+1}La + a^{m+1}Lx - x^{m+1} = a^{m+1}L.a - a^{m+1}$. Si itaque ex hâc æquatione per ſerierum regreſſum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitrariam lineam a, & deinde per æquationem $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatur valor ipſius z; *Newtoniana* conſtructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

Scholion. *Hermannus* prop. 73. & 74. lib. 2. *Phoronomiæ* geminam conſtructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oſcillantis reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, & *Newtonianam* pro cycloide conſtructionem ope logarithmicæ ſimpliciorem reddidit. Difficile autem non eſt (44) hanc NEWTONI conſtructionem revocare ad logarithmicam per punctum N & aſymptoto K O ad partes O productâ deſcribendam. 179.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXX. Theor. XXIV.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta a B *æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* D K, *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* B K a *à perpendiculis omnibus* D K *occupatæ.*

Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatione integrâ descriptus, per rectam illam sibi æqualem *a B*, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem *A B*. Bisecetur *A B* in *C*, & (f) punctum *C* repræsentabit infimum cycloidis punctum, & (g) erit *C D* ut vis à gravitate oriundâ, quâ corpus in *D* secundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam (h) habet vis in *D* ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem *C D*, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in *D E* capiatur *D K* in eâ ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit *D K* exponens resistentiæ. Centro *C* & intervallo *C A* vel *C B* construatur semicirculus *B E e A*. Describat autem corpus tempore quàm minimo spatium *D d*, & erectis perpendiculis *D E*, *d e* circumferentiæ occurrentibus in *E* & *e*, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo à puncto *B*, acquireret in locis *D* & *d*. Patet hoc (*per prop.* LII. *lib.* I.). Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa *D E*, *d e*; sitque *D F* velocitas quam acquirit in *D* cadendo de *B* in medio resistente. Et si cen-

(f) * *Et punctum C repræsentabit infimum cycloidis punctum.* Nam cycloidis punctum infimum arcum quem corpus in medio non resistente oscillando describit in duas partes æquales dividit.

(g) * *Et erit C D ut vis à gravitate oriundâ &c.* patet per demonstr. prop. LI. lib. I.

(h) * *Quam habet vis in D ad vim gravitatis*, per cor. 1. prop. LI. & not. 462. lib. I.

centro C & intervallo CF deſcribatur circulus FfM occurrens rectis $d\ e$ & AB in f & M, (i) erit M locus ad quem deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam ſi Fg deſignet velocitatis momentum quod corpus D deſcribendo ſpatium quam minimum Dd, ex reſiſtentiâ medii amittit; & ſumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & MN erit decrementum aſcensûs ex velocitatis illius amiſſione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis DF decrementum Fg à reſiſtentiâ DK genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum fm à vi CD genitum, ut vis generans DK (k) ad vim generantem CD. Sed & (l) ob ſimilia triangula Fmf, Fgh, FDC, eſt fm ad Fm ſeu Dd ut CD ad DF: & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF. Item Fh ad Fg ut DF ad CF; & ex æquo perturbatè Fh (m) ſeu MN ad Dd ut DK ad CF ſeu CM; ideò-

(i) * *Erit M locus ad quem &c.* Eamdem enim velocitatem haberet corpus in D, ac ſi ſeclusâ omni reſiſtentiâ percurriſſet ſpatium C F — C D, & ideo (per modo demonſtrata) in loco d haberet velocitatem d f, & in loco M nullam.

(k) * *Ad vim generantem C D.* Sunt enim velocitatum elementa dato temporis momento genita, ut vires generantes (13. lib. 1.)

(l) * *Ob ſimilia triangula &c.* Sunt enim anguli ad m, h, & D recti, angulus C F D duobus triangulis F D C, F h g communis, & angulus f F m æqualis angulo C F D, quia ſi ex angulis rectis m F D, f F C ſubducatur communis angulus m F C, remanebunt anguli æquales f F m, C F D. Tria igitur triangula F m f, F h g & F D C æquales angulos habent, ſuntque proinde ſimilia. 179.

(m) * *F h ſeu M N.* Cùm ſit C M æqualis C F, & C N æqualis C g ſeu C h, angulo h C g evaneſcente, eſt $MN = CM - CN = CF - Ch = Fh$.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXX. Theor. XXIV.

(n) ideoque summa omnium $MN \times CM$ æqualis erit summæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ (o) æquabitur summæ omnium $MN \times CM$, ideoque summæ omnium $Dd \times DK$, id est, areæ $BKVTd$. *Q. E. D.*

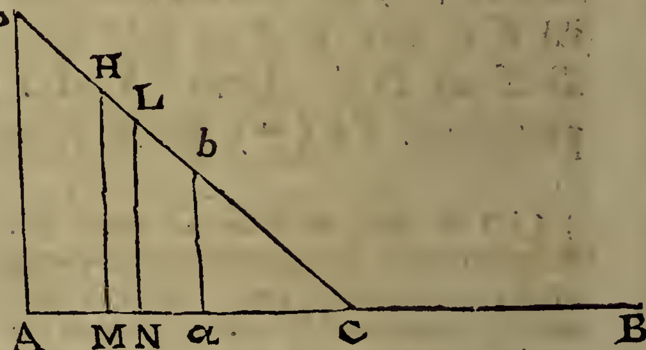
Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam si uniformis sit resistentia DK, figura $BKTa$ rectangulum erit sub Ba & DK; & inde rectangulum sub $\frac{1}{2} Ba$ & Aa erit æquale rectangulo sub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2} Aa$. Quare cùm DK sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2} Aa$ ad longitudinem penduli; omninò ut in prop. XXVIII. demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, figura $BKTa$ ellipsis erit quàm proximè. Nam si corpus, in medio non resistente, oscillatione in-

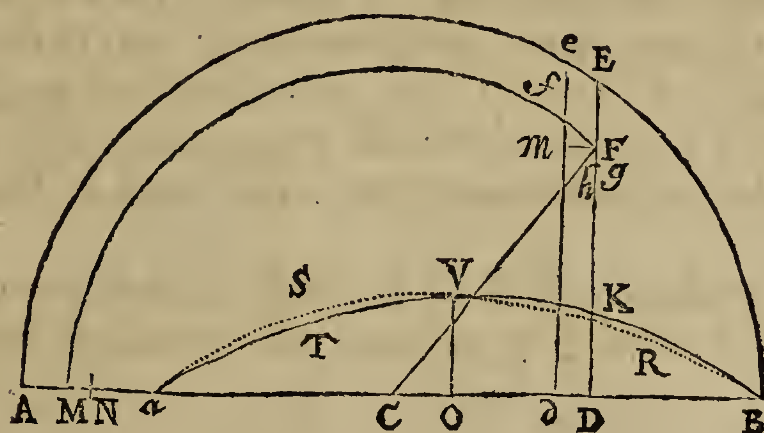
(n) * *Ideoque summa omnium* $MN \times CM$ *&c.* Quoniam (per modo demonstrata) $MN \times CM = Dd \times DK$, erit summa omnium $MN \times CM$ æqualis summæ omnium $Dd \times DK$, modò simul incipiant simulque desinant. Incipit autem summa omnium $Dd \times DK$ in B & desinit in a, & summa omnium $MN \times CM$ incipit in A, & ideo si desinat in a, erunt summæ illæ æquales.

(o) * *Æquabitur summæ &c.* Erigatur ad punctum A perpendiculum $AP = AC$, jungatur PC, & ductis per M & N ac a perpendiculis MH, NL, ab; erit semper $MN \times CM = MN \times HM$; ideoque si ordinata variabilis HM ducatur in totam longitudinem Aa, erit trapezium APba æquale summæ omnium $MN \times CM$ ab



A ad a; sed trapezium illud est $CAP - Cab = \frac{1}{2}CA^2 - \frac{1}{2}Ca^2 = \frac{1}{2}(CA + Ca) \times (CA - Ca) = \frac{1}{2}aB \times Aa$, ob $CB = CA$. Ergo &c.

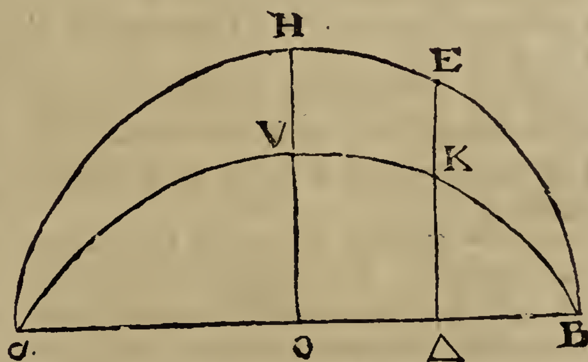
integrâ deſcriberet longitudinem *B A*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *A B* deſcripti ordinatim applicata *D E*. Proinde cùm *B a* in medio reſiſtente, & *B A* in medio non reſiſtente, (p) æqualibus circiter temporibus deſcri-



bantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius *B a* punctis, ſint quam proximè ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis *B A*, ut eſt *B a* ad *B A*; erit velocitas in puncto *D* in medio reſiſtente ut circuli vel ellipſeos ſuper diametro

B a

(p) * 180. *Æqualibus circiter temporibus deſcribantur.* Quia reſiſtentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in deſcenſu à B ad C, illudque contrahit in aſcenſu à C ad a, longitudines B A in medio non reſiſtente & B a in medio reſiſtente, earumque longitudinum partes proportionales, æqualibus circiter temporibus deſcribuntur. Sunt autem velocitates ut ſpatia eodem temporis momento deſcripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum B A, B a correſpondentibus ſunt quam proximè ut longitudines B A, B a, id eſt, in ratione datâ. Centro O & diametro A B deſcribatur circulus B E H a, ſitque B Δ in hac figurâ ad B D in figurâ textûs, ut B a ad B A, hoc eſt, ut velocitas in loco Δ in medio reſiſtente ad velocitatem in loco D in medio non reſiſtente; & ductâ



ordinatâ Δ E; erit etiam, ob figurarum ſimilitudinem Δ E ad D E ut B a ab B A, ideoque ut velocitas in medio reſiſtente ad velocitatem in medio non reſiſtente. Velocitas igitur in medio reſiſtente erit ſemper ut ordinata variabilis Δ E. 180.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXX. Theor. XXIV.

B a deſcripti ordinatim applicata; (q) ideoque figura *BKVTa* ellipſis erit quàm proximè. Cùm reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit *OV* exponens reſiſtentiæ in puncto medio *O*; & ellipſis *BRVSa*, centro *O*, ſemiaxibus *OB*, *OV* deſcripta, figuram *BKVTa*, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproximè. Eſt igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut (r) area ſemi-ellipſeos hujus ad $OV \times BO$: id eſt, *Aa* ad *OV* ut (ſ) area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in *O* ad ejuſdem gravitatem.

Quod ſi reſiſtentia *DK* ſit in duplicatâ ratione velocitatis; figura *BKVTa* ferè (t) parabola erit verticem habens *V* & axem

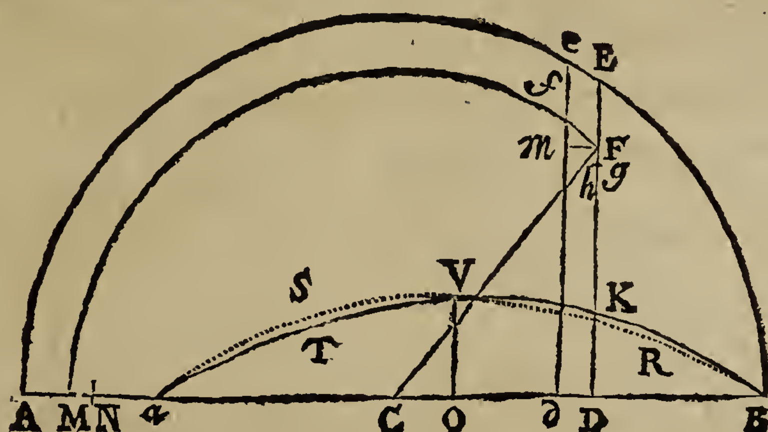
(q) * *Ideoque figura BKVTa ellipſis erit quàm proximè.* Cùm enim (ex modò demonſtratis) velocitas in loco quovis Δ ſit ſemper ut ordinata Δ E ad circulum, & (*per hyp.*) reſiſtentia Δ K in hac figurâ, vel D K in figura textus, ſit ſemper ut velocitas Δ E, erit Δ K ut Δ E; & quia $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$) ex naturâ circuli), erit etiam ΔK^2 ut $a\Delta \times \Delta B$, & ideo figura B K V T a ellipſis, cujus centrum O, ſemiaxes a O, & O V, ſi O V exponat reſiſtentiam in puncto medio O axis a B.

(r) * *Ut area ſemi-ellipſeos hujus ad OV × BO.* Eſt enim area illa $= Aa \times \frac{1}{2} aB$ (*per prop. hanc*), & $\frac{1}{2}aB = BO$ (per conſtr.).

(ſ) * *Ut area ſemicirculi ad quadratum radii &c.* Area ellipſeos cujuſcumque eſt ad rectangulum ſub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione areæ circuli ad quadratum diametri (250. *lib.* 1. (; circulus enim eſt ellipſis cujus ſunt axes æquales; unde area ſemi-ellipſeos B K V T a eſt ad quartam partem rectanguli ſub axibus, ſeu ad rectangulum ſub ſemiaxibus $OV \times BO$, ut area ſemicirculi ad quadratum radii. Sed ſi circuli radius ſit 7, erit ſemiperipheria 22 circiter, & area ſemicirculi 7×11, ideoque area ſemicirculi ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Eſt igitur A a ad O V ut 11 ad 7, & proinde $OV = \frac{7}{11}Aa$. Et propterea (*per prop. hanc*) $\frac{7}{11}$ A a eſt ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem pondus.

(t) * *Ferè parabola erit.* Ordinata Δ E ad ſemicirculum B E H a (*vide fig. not.* 180.) eſt ſemper ut velocitas in loco Δ in medio reſiſtente, & (ex naturâ circuli) $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$, & (*ex hyp.*) reſiſtentia Δ K eſt ut velocitatis quadratum, ſeu ut ΔE^2, adeoque Δ K eſt ut rectangulum $a\Delta \times \Delta B$ ſive ut $\overline{OB+O\Delta} \times \overline{OB-O\Delta}$ hoc eſt ut $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$. * Sed in Parabolâ cujus vertex foret V & axis V O differentia abſciſſarum foret ſemper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriuſque abſciſſæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò ſi ex K ducatur in axem perpendicularis K P, eſt K Δ = P O & P O eſt differentia abſciſſarum V P & V O, eſt O Δ = P K ordinatæ in P, ideoque eſt $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P & O, cum ergo K D & $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ ſint in datâ

axem OV, (u) ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ Ba & OV quam proximè. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}$ Ba & Aa æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ Ba & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4}$ Aa: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ Aa ad longitudinem penduli.



Atque has concluſiones in rebus practicis abundè ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cùm ellipſis vel parabola $BRVSa$ congruat cum figura $BKVTa$ in (x) puncto medio V, hæc ſi ad partem alterutram BRV vel VSa excedit figuram illam, (y) deficiet ab eâdem ad partem alteram, & ſic eidem æqua-

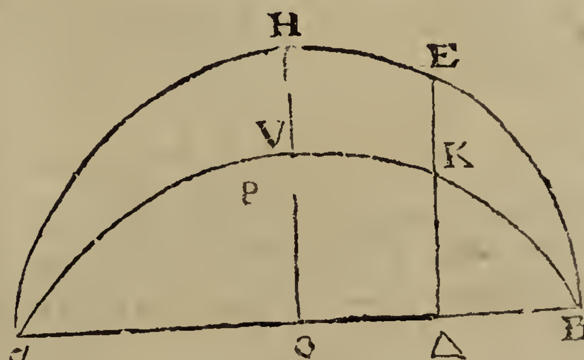
180.

datâ ratione figura B K V T a parabola erit verticem habens V & axem O V (per theor. 1. de parab.)

(u) * *Ideoque æqualis erit rectangulo ſub* $\frac{2}{3}$ *B a & O V quam proximè.* Nam area parabolica B K V O eſt $\frac{2}{3}$ B O × V O (*Theor.* 4. *de parab.*) & ipſius duplum, ſeu area tota B K V a eſt $\frac{2}{3}$ a B × O V.

(x) * *In puncto medio V.* Supponitur enim quòd O V accuratè exhibeat reſiſtentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipſis per punctum V deſcripta ſit.

(y) * *Deficiet ab eâdem ad partem alteram.* Quia duæ ellipſeos vel parabolæ



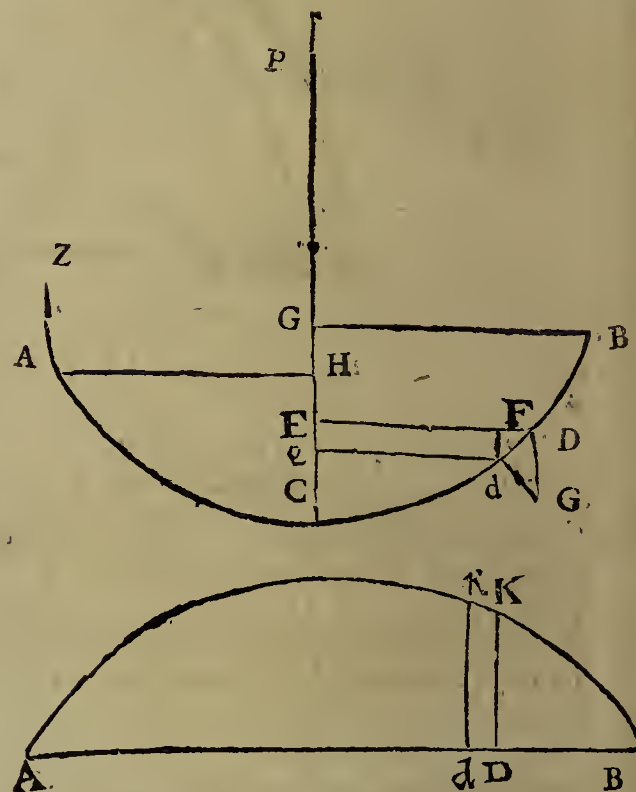
partes B R V & a S V ſimiles ſunt & æquales, ſi reſiſtentiæ in deſcenſu à B ad O majores ſint quàm pro ratione ordinatarum D R ad ellipſim vel parabolam, ad

quabitur quàm proximè (z).

PRO-

ad alteram partem minores erunt; & contra.

181. Sit resistentia in ratione sesquiplicatâ velocitatis, id est, (*vide fig. not.* 180.) $\triangle K$ ut $\triangle E^{\frac{3}{2}}$; & quoniam (ex naturâ circuli) $\triangle E = (BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{1}{2}}$, & proinde $\triangle E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit $\triangle K$ ut $(BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{3}{4}}$, & (*in fig. textûs*) DK ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur $BO = a$, $VO = b$, $DO = x$, $DK = y$, & erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $y = \frac{b(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; & hinc areæ OVKD momentum $ydx = bdx\frac{(aa-xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$. Quantitas $(aa-xx)^{\frac{3}{4}}$ in seriem infinitam resolvatur (551. *lib.* I.), & invenietur $dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}dx - \frac{3x^2dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4dx}{4\times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times 5x^6dx}{4\times 8\times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times 5\times 9x^8dx}{4\times 8\times 12\times 16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. Et sumptis fluentibus $S.dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5\times 4\times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\times 5x^7}{7\times 4\times 8\times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3\times 5\times 9x^9}{9\times 4\times 8\times 12\times 16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. $= \frac{50841a^{\frac{5}{2}}}{71680}$, factâ $x = a$, & neglectis, ob parvitatem, cæteris seriei terminis. Quare cùm sit area $OVKD = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times S.dx(aa-xx)^{\frac{3}{4}}$, si ponatur $x = a$ erit area $OVKB = \frac{50841}{71680}ba$, & 2OVKB seu area tota $BKVTa = \frac{50841}{35840}ba = \frac{10}{7}ba$, circiter. Est itaque $\frac{10}{7}VO \times BO = Aa \times BO$, & hinc $VO = \frac{7}{10}Aa$; ac propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{7}{10}Aa$ ad longitudinem penduli.



(z) * 182. *Quam proximè.* Propositionem 72. lib. 2. Phor. quæ 30[æ]. hujus libri fere similis est, sed generalis, & demonstratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujusvis BCZ arcus totus AB, quem grave descensu per BC & subsequente ascensu per CA in medio resistente describit, extendatur in lineam rectam BA, & ad singula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula DK proportionalia medii resistentiis quas mobile in homologis curvæ BCA punctis D subit, sitque BKA curva quam punctum K perpetuo tan-

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oſcillantis reſiſtentia in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum ſubſequente aſcenſu deſcriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa (a) ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii, ideoque eſt ut retardatio tota eique proportionalis reſiſtentia retardans. In ſuperiore propoſitione rectangulum ſub rectâ $\frac{1}{2}\,aB$ & arcuum illorum CB, Ca differentia Aa æqualis

tangit: area curvilinea B K A B æquabitur rectangulo $PC \times GH$ ex recta P C, quæ gravitatem conſtantem exponit, in differentiam G H abſciſſarum G C, H C arcuum B C, C A deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum.

Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad P C perpendicula D E, d e, & ex puncto d ad E D perpendiculum d F; & vis gravitatis P C erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut D d ad F d.

* Nam ductâ D G parallela P C & G d in curvam perpendiculari, exprimat D G gravitatis actionem, exprimet D d vim Tangentialem, ſed ob ſimilitudinem Triangulorum D d G, D d F eſt $DG : Dd = Dd : FD$, erit ergo D d ad F d ut vis gravitatis ad vim Tangentialem, quâpropter cum D d ſumatur ubique æqualis ut eſt actio gravitatis, ubique F d exprimet vim Tangentialem; eſt $Fd = Ee$, ſi itaque P C repræſentet vim gravitatis erit $Dd : Ee = PC$ ad vim Tangentialem, 182.

† ideoque vis illa tangentialis $= \frac{PC \times Ee}{Dd}$.

Sed corporis deſcendentis vis acceleratrix æqualis eſt exceſſui vis tangentialis ſupra reſiſtentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco $D = \frac{PC \times Ee}{Dd} - DK$. Ducatur hæc vis in elementum ſpatii D d, & fiet $PC \times Ee - DK \times Dd = v\,dv$, ſi velocitas in loco D ſit v (18, 19); & hinc, ſumptis fluentibus, habetur $PC \times GE - BKD = \frac{1}{2}\,vv$. Fiat $BD = BA$, & ideo $v = 0$, atque $GE = GC - CH = GH$, & erit $PC \times GH - BKAB = 0$, ac proinde $PC \times GH = BKAB$. Q. E. D.

(a) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per reſiſtentiam medii.*

 * Di-

erat areæ *BKTa*. Et area illa, ſi maneat longitudo *aB*, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum *DK*; hoc eſt, in ratione reſiſtentiæ, (b) ideoque eſt ut longitudo *aB* & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub *Aa* & $\frac{1}{2}$ *aB* eſt ut *aB* & reſiſtentia conjunctim, & propterea *Aa* ut reſiſtentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia ar-

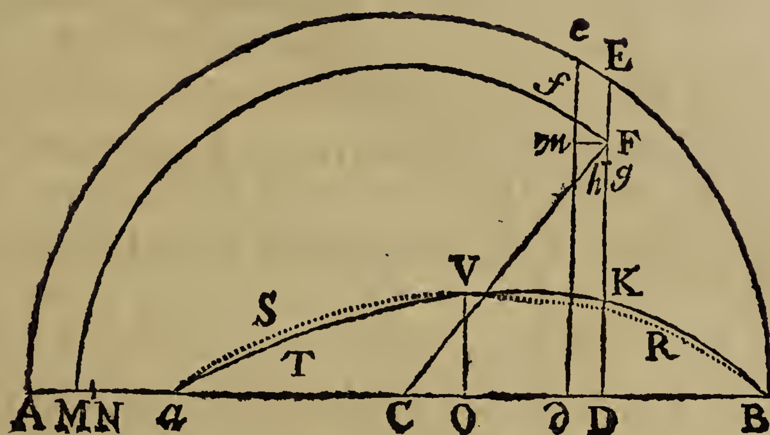
* Dividantur arcus à duobus pendulis deſcripti in partes proportionales infinitè parvas, & totum illud quod deeſt ſingulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora paſſa ſunt ſingularum illarum particularum initio, ſpatium verò quod propter ſingulam retardationem deficit, eſt ut illa retardatio & tempus per quod corpus motum fuit poſt illam retardationem receptam uſque ad finem oſcillationis; ſed quoniam in oſcillationibus utut inæqualibus tempora quibus ſimiles arcuum partes deſcribuntur ſunt æqualia, in medio non reſiſtente, & in medio reſiſtente ſaltem quam proximè, (180) ſpatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, ſunt ut illæ retardationes.

* *Ideo differentia arcuum eſt ut retardatio tota, eique proportionalis reſiſtentia retardans*, ſi quantitates materiæ corporum pendulorum ſint æquales, retardatio in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus eſt ut reſiſtentia in iiſdem locis, ſed ut reſiſtentiæ ſunt in datâ quâdam Lege velocitatem ex Hypotheſi & velocitates in arcuum partibus proportionalibus ſunt in Ratione datâ, ideo reſiſtentiæ in ſingulis arcuum partibus proportionalibus ſunt in ratione datâ, ac per conſequens omnes retardationes, ſunt in eâdem ratione, ſummæ ergo retardationum erunt in eâdem ratione datâ, Ergo tota ſpatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eâdem ratione, *Differentiæ ergo inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum* in variis arcubus ab eodem corpore deſcriptis, *ſunt in Datâ Lege Reſiſtentiæ.*

183. * *Cor.* 1. Differentiæ arcuum, reſpectu arcuum deſcenſu deſcriptorum eamdem ſequuntur Legem quam reſiſtentiæ ſequuntur reſpectu velocitatum. Nam cùm tempora quibus correſpondentes & proportionales arcuum partes deſcribuntur ſint æqualia, velocitates erunt ſemper ut illæ arcuum partes, ſive ut arcus toti, (180.) quam proximè, ergo reſiſtentiæ, retardationes & differentiæ arcuum eamdem Legem ſequuntur reſpectu arcuum ac reſpectu velocitatum.

Cor. 2. * *Si Corpora pendula differant quantitate materiæ, Differentiæ arcuum ſunt directè in Lege datâ arcuum & inverſè ut quantitates materiæ*: Nam eo in caſu retardationes in ſingulis arcuum partibus ſunt directè ut reſiſtentiæ & inverſè ut quantitates materiæ; nam reſiſtentia motus jacturam producit, quæ motus jactura eſt factum ex retardatione & maſsâ retardatâ, (per Def. 2. lib. I.).

(b) * *Ideoque eſt ut longitudo a B & reſiſtentia conjunctim.* Area illa ſi maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione reſiſtentiæ D K; ſi verò conſtans maneat reſiſtentia ſeu ordinata D K, ſed augeatur a B omneſque ejus partes d D in ratione totius a B augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis a B; unde ſi longitudo a B variabilis ſit & reſiſtentia ſeu ordinata D K in ſingulis longitudinum a B locis correſpondentibus augeatur vel diminuatur in datâ ratione, area B K T a augebitur vel diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione longitudinis a B & ratione reſiſtentiæ auctæ vel diminutæ, proindeque rectangulum ſub A a & $\frac{1}{2}$ a B erit ut a B & reſiſtentia conjunctim, & propterea A a ut reſiſtentia.



arcuum in eodem medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcûs totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcûs totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcûs totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcûs.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successivè describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcûs descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propositionibus, per oscillationes pendulorum in mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam mediorum. Aeris

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

verò reſiſtentiam inveſtigavi per experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & (c) centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro ſuſpenſionis diſtans; & è regione puncti illius collocavi regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum à pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur à perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totâque oſcillatione primâ, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſitâ, arcum digitorum fere quatuor: (d) idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motûs ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motûs partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motûs partem oſcil-

(c) * *Et centrum oſcillationis globi.* Quid ſi centrum oſcillationis & quomodo inveniri poſſit, indicavimus in ſcholio poſt notam 478. lib. I. Et ex his quæ ibi dicta ſunt, ſatis liquet in longioribus pendulis graviori globo inſtructis & filo tenui, centrum oſcillationis cum centro globi coincidere quàm proximè.

(d) * *Idem oſcillationibus 164. amiſit octavam motûs ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti* $1\frac{3}{4}$.

* Liquet (ex notâ *a* præcedente) quod differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum ſit toti retardationi quam corpus paſſum eſt proportionalis, ideòque motui deſtructo per reſiſtentiæ actionem; aſcendat itaque corpus in fine primæ oſcillationis ad altitudinem qualemcunque, ſumaturque differentia arcûs aſcenſu deſcripti ab arcu deſcenſu primo percurſi: Secundâ oſcillatione corpus aſcendere deberet in vacuo ad eam altitudinem ad quam in fine primæ oſcillationis aſſurrexerat, & ſumatur quod deeſt in ſecundo aſcenſu ab illâ altitudine, duæ illæ differentiæ ſunt ut motus in ſingulâ oſcillatione amiſſi, earum ſumma eſt ergo ut ſumma motûs amiſſi in utraque oſcillatione, ſed duæ illæ differentiæ ſunt differentia inter altitudinem è quâ corpus primò deſcendit, & altitudinem ad quam ultimò aſſurrexit; Ergo ratiocinio ad 164. oſcillationes continuato differentia inter altitudinem è quâ corpus primò deſcendit, & altitudinem ad quam ultimò aſſurrexit, eſt ut ſumma motûs quem reſiſtentia durantibus illis 164. oſcillationibus deſtruere valuit.

oscillationibus 69, 35½, 18½, 9⅔, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum ¼, ½, 1, 2, 4, 8 respective. (e) Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum 3¾, 7½, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respectivè. (f) Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; & propterea (*per corol.* 2. *prop.* XXXI. *libri hujus*) resisten-

(e) * *Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum &c.* Exempli causâ, si in primo casu dividatur differentia ¼ per numerum oscillationum 164, habebitur $\frac{1}{656}$ differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum in una mediocri oscillatione; quia differentia ¼ ex omnibus differentiis quæ per oscillationes 164 producuntur, composita est; & quia arcus totus unâ mediocri oscillatione descriptus medius est arithmeticè inter arcum maximum fere digitorum 4. primâ oscillatione descriptum, & arcum minimum digitorum 2½ ultimâ oscillatione descriptum, ideo arcus ille mediocris invenitur capiendo dimidium summæ arcuum 4 + 2½, quod est 3¾, aut etiam capiendo summam arcuum dimidiorum, videlicet 2 + 1¾. Atque eodem modo de cæteris ratiocinandum est.

(f) * *Hæ autem in majoribus oscillationibus &c.* * Dividantur omnes arcuum differentiæ in oscillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2. 7107.; 9. 5072.; 36. 9577.; 141. 8378.; 542. 8965.

Quadrata verò arcuum sunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024. unde ex eorum numerorum inspectione liquet differentias quæ in minoribus oscillationibus observatæ sunt esse ad eas quæ in majoribus arcubus observantur in majore ratione quàm duplicatâ arcuum; In majoribus verò oscillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcus in Progressione duplâ fuere sumpti, ratio duplicata arcuum proximorum est ratio 1 ad 4. jam verò 9. 5072. est non multo major 4â. parte numeri 36. 9577., iste autem ad 4. partem numeri 141. 8378., magis accedit, propius adhuc iste accedit ad quartam partem numeri 542. 8965. Unde inter arcus magnos, motus amissos in duplicatâ fere ratione arcuum sive velocitatum sumi posse deducitur. 183.

Idem manifestius patebit si dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimunt per ipsorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1. 3553; 2. 3788; 4. 6197; 8. 8648; 16. 9655, qui si resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus ½, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores verò ferè iisdem. Si verò supponeretur resistentiam non tantùm esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam partem aliquam aliun-

ſtentia globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulò major quàm in eâ ratione.

(g) Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. (h) Cùm velocitates maximæ ſint in cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcrip-

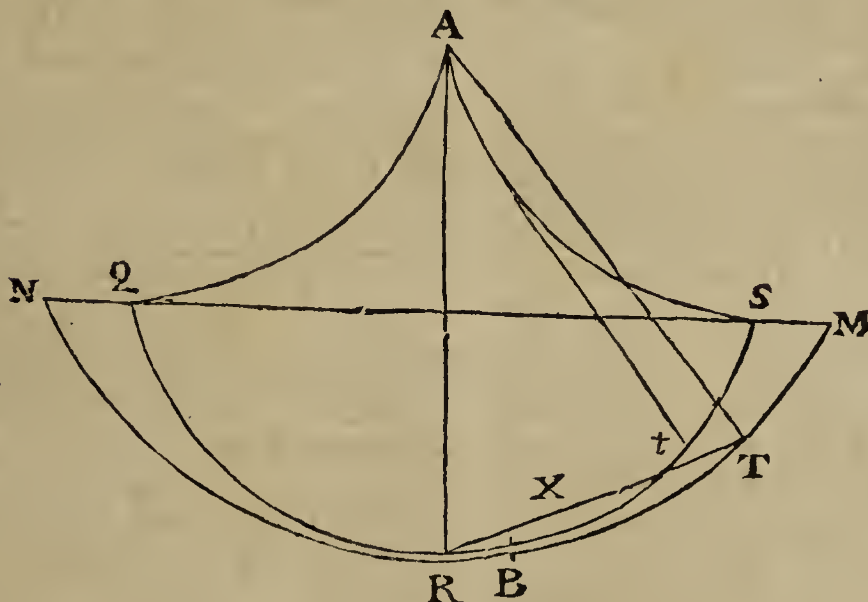
aliunde quàm ex merâ inertiâ materiæ oriundam, eſſe ut velocitas, ideoque cùm hæ quantitates mox inventæ ſint quotientes differentiarum arcuum per velocitates diviſarum, hæ quantitates conſtarent parte conſtante & aliâ parte velocitati ſive arcui proportionatâ.

Sumatur itaque prima quantitas 1, & ordine conferatur cum 2â, tum cùm tertiâ, cum quartâ &c. ſupponaturque illas conſtare duabus partibus altera velocitati proportionata altera conſtanti, v. gr. ſit prima quantitas $1 = a + x$ ſecunda $1.3553 = 2a + x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a & x, quantitas conſtans x, in ſingulo calculo eadem non invenietur, ſed varii iſti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decreſcunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non eſſe partim in ratione duplicatâ ipſorum arcuum, & partim in eorum arcuum ratione ſimplici, ſed his adjungi debere rationem aliquam intermediam quàm ſeſquiplicatam arcuum aſſumit *Newtonus*, quod cum experimentis propiùs conſentit.

(g) * *Deſignet jam V velocitatem maximam*, ſive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, *in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates* conſtantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; & fingamus quòd reſiſtentia, ſeu differentia arcuum ipſi proportionalis (*prop.* XXXI.), ſit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, & partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, & proinde *ſupponamus quod arcuum differentia ſit* $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$ *&c.*

(h) * *Cùm velocitates maximæ &c.* Corpus pendulum in medio non reſiſtente oſcilletur in cycloide SBRQ, ſitque A punctum ſuſpenſionis, & R punctum infimum ac medium arcûs totius SRQ. Centro A & radio AR deſcribatur arcus circuli MTRN, in quo corpus idem, vel aliud ſimile & æquale oſcilletur in eodem medio non reſiſtente. Sit TR arcus circularis æqualis arcui cycloidis tR, & RB arcus quàm minimus cycloidi & circulo communis (465. *lib.* I.). Jam ſi corpus è locis T & B ſucceſſivè cadat in circulo, erit ipſius velocitas maxima in R deſcenſu per arcum TR acquiſita, ad velocitatem deſcenſu per arcum BR acquiſitam, ut chorda TXR ad chordam arcûs RB (88. lib. I.), aut, quod idem eſt (*per lemma VII. lib.* I.), ut chorda TXR ad arcum cycloidis BR; & velocitas deſcenſu per arcum BR acquiſita in R eſt ad velocitatem maximam deſcenſu per arcum cycloidis tBR acquiſitam, ut arcus BR ad arcum tBR ſeu arcum circuli æqualem TBR (*per demonſtr. prop. LI. lib.* I.). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R deſcenſu per arcum circularem TBR acquiſita eſt ad velocitatem maximam in R deſcenſu per cycloidis arcum tBR acquiſitam, ut chorda RT ad arcum tBR vel TBR. Sunt autem velocitates maximæ in medio reſiſtente velocitatibus maximis in medio non reſiſtente proportionales quàm proximè, & in puncto medio arcuum qui oſcillatione integrâ deſcribuntur, ferè contingunt (180). Paribus igitur arcubus, velocitates maximæ in cycloide ſunt ad velocitates maximas in circulo, ut ſemiſſes

criptorum, in circulo verò ut ſemiſſium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores ſint in cycloide quam in circulo, in ratione ſemiſſium arcuum ad eorundem chordas; (i) tempora autem in circulo ſint majora quàm in cycloide



miſſe arcuum oſcillando deſcriptorum ad eorumdem arcuum circularium chordas, quam proximè; & ideo, paribus arcubus majores ſunt in cycloide quàm in circulo in ratione ſemiſſium arcuum ad eorumdem chordas in circulo ductas.

(i) * *Tempora autem in circulo ſunt majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciprocâ.* * Id eſt, tempora in circulo ſunt ad tempus in arcu quovis Cycloidis, ut ſemiſſis arcus circuli oſcillando deſcripti ad ejuſdem ſemiſſis chordam, ſive invertendo & temporum dimidia ſumendo, tempus ſemioſcillationis in Cycloide eſt ad tempus ſemioſcillationis in circulo (pendulis exiſtentibus ejuſdem longitudinis) ut chorda arcus deſcripti ad ipſum arcum, quæ quidem proportio proximè tantùm obtinet.

* Eſt enim tempus oſcillationis integræ cujuſvis in Cycloide ad tempus deſcensûs per dimidiam penduli longitudinem ut ſemiperipheria ad radium (*vide not.* 470. *ad Prop. LII. lib.* I.) ideoque etiam tempus ſemioſcillationis in cycloide ad tempus illud deſcensûs per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli, ad radium, ſed tempus deſcenſûs per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, ſive tempus deſcensûs per Diametrum circuli cujus pendulum eſt radius, eſt duplum temporis deſcenſûs per dimidiam penduli longitudinem, ideoque tempus ſemioſcillationis in Cycloide eſt ad tempus deſcensûs per Diametrum circuli cujus longitudo penduli eſt radius, ut circuli quadrans ad Diametrum. Sed, ratio temporis lapsûs per Diametrum circuli ad tempus ſemioſcillationis in arcu ejuſdem circuli eſt (ut mox liquebit) compoſita ex ratione Diametri ad quadrantem circuli & chordæ ad arcum, quàm proximè, unde ex æquo erit tempus in Cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum oſcillando deſcriptum. Rationem autem temporis deſcenſûs per Diametrum circuli ad tempus ſemioſcillationis in arcu ejus circuli eſſe compoſitam ex ratione Diametri ad qua- 183.

de in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ quadrantem circuli & ex ratione chordæ ad arcum oscillando descriptum, saltem quam proximè, sequenti calculo constabit.

Descendat itaque corpus per arcum L B centro C descriptum & Diametro A B, sit t tempus quæsitum quo corpus descendit per eum arcum L B, sitque b tempus datum quo corpus labitur per Diametrum A B, & quo velocitate per eum lapsum in B acquisitâ posset describere uniformiter duplum A B sive 2 A B, sumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus descendens uniformiter describere censeatur tempore infinitè parvò dt, ducanturque ex punctis L & M lineæ L H, M E in diametrum perpendiculares; Cùm tempora quibus spatia data uniformiter describuntur sint ut illa spatia directè & velocitates quibus percurruntur inversè, sitque velocitas quæ in B acquisita est per lapsum ex A B ad velocitatem per lapsum ex L in M, sive ex H in E acquisitam, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{HE}$, erit $b : dt = \frac{2\,AB}{\sqrt{AB}} : \frac{Mm}{\sqrt{HE}}$; Dicatur ergo $AB = 1$; $HB = h$, $BE = x$, $EM = y$; $HE = h - x$ erit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, est autem $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & ex naturâ circuli (cùm sit $yy = x - xx$, & $2y\,dy = dx - 2x\,dx$, sive $dy = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-xx}}\,dx$) invenietur $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$, & quoniam dum crescit B E decrescit L M est $Mm = \frac{-dx}{2\sqrt{x-xx}}$, resolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$ in seriem per formulam *Newtonianam* invenietur $\frac{1}{\sqrt{x-xx}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2\times 4}$ &c. ideoque M m sive $\frac{-dx}{2\sqrt{x-xn}} = \frac{1}{2} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}$ &c. Pariter resolvatur $\frac{1}{\sqrt{h-x}}$ in seriem per eamdem formulam erit $\frac{1}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2\,h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2\times 4h^{\frac{5}{2}}}$ &c. $= \frac{1}{h^{\frac{1}{1}}} \times 1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2\times 4h^2}$ &c. Ductis ergo per se mutuo his seriebus

$$\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4} \text{ \&c}$$

$$- \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4\times 2h} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 2\times 4h2} - \frac{3\times 3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 2\times 4h^2} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

ideoque integralis

$$S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} - \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3h^1} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2\times 2\times 5h} - \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 2\times 7h} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5h^2} \; \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 2\times 4\times 7h^2} \; \frac{2\times 3\times 3x^{\frac{9}{2}}}{2\times 4\times 2\times 4\times 9h^2} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Cùm ergo sit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, sed quando t fit o, tunc est $h = x$ ideoque Integralis quæsita in hanc mutatur, (posito ubique h pro x)

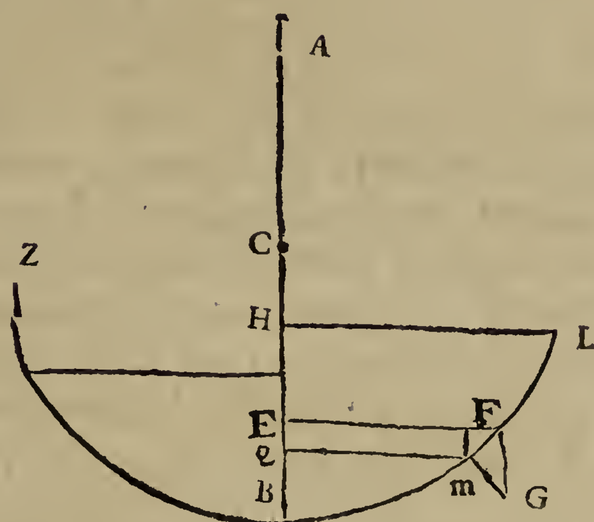
$$S.\frac{Mm}{h-x} = -1 - \frac{h}{2\times 3} - \frac{3h2}{2\times 4\times 5} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{1}{2\times 3} - \frac{h}{2\times 2\times 5} - \frac{3h^2}{2\times 4\times 2\times 7} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{3}{2\times 4\times 5} - \frac{3h}{2\times 2\times 4\times 7} - \frac{2\times 3\times 3h^2}{2\times 4\times 2\times 4\times 9} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Ideoque hæc est quantitas illa constans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportione $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ pro $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ adhibetur, quæcumque assumatur valor in-



indeterminatæ x; ſed ubi totus arcus L B eſt deſcriptus, tunc x fit o, & evaneſcit prior ſeries $\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}}$ &c. ergo in eo caſu integralis $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ eſt æqualis ſoli quantitati illi conſtanti adſumptæ cum ſignis mutatis, ideoque eſt,

$$b:t=2:\ 1+\frac{h}{2\times3}+\frac{3h^2}{2\times4\times5}\ \&c.$$
$$+\frac{1}{2\times3}+\frac{h}{2\times2\times5}\ \&c.$$
$$+\frac{3}{2\times4\times5}\ \&c.$$
&c.

Jam autem cùm M m, ſit æqualis ſeriei $\frac{1}{2}\times\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2}+\frac{dx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4}$ &c. ejus integralis eſt $\frac{1}{2}\times2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times3}+\frac{2\times3x^{\frac{5}{2}}}{2\times4\times5}$ &c. $=\sqrt{x}\times1+\frac{1}{2\times3}+\frac{3x^2}{2\times4\times5}$ &c. in quâ ſi fiat $x=1$ habebitur ſemiperipheria circuli, & ſi fiat $x=h$ habebitur arcus L B, tumque illæ duæ ſeries in has abibunt

$$1+\frac{1}{2\times3}+\frac{3}{2\times4\times5}\ \&c.$$
$$\&\ \sqrt{h}\times1+\frac{h}{2\times3}+\frac{3h^2}{2\times4\times5}\ \&c.$$

Quæ ſi per ſe mutuo ducantur; earum factum erit 183.

$$\sqrt{h}\times1+\frac{h}{2\times3}+\frac{3h^2}{2\times4\times5}\ \&c.$$
$$\frac{1}{2\times3}+\frac{h}{2\times3\times2\times3}\ \&c.$$
$$\frac{3}{2\times4\times5}\ \&c.$$
&c.

Sed termini hujus ſeriei ſaltem primi; iidem ſunt cum terminis ſeriei ſuperius inventæ pro valore $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$, ſit ergo arcus L B $=a$, Peripheria circuli cujus Diameter eſt 1 ſit p, erit $\sqrt{h}\times S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}=\frac{ap}{2}$, ſive $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}=\frac{ap}{2\sqrt{h}}$; ſed $\sqrt{h}$ eſt æqualis chordæ L B, ex naturâ circuli, quæ ſi dicatur c, erit $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}=\frac{ap}{2c}$. Unde tandem eſt $b:t=2:\frac{ap}{2c}=1:\frac{ap}{4c}=1\times c:a\times\frac{p}{4}$ ſive eſt b tempus deſcenſus per Diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus deſcenſus per arcum in ratione compoſitâ ex ratione Diametri 1 ad $\frac{p}{4}$ ſive quadrantem peripheriæ, & ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. E. D.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXXI. Theor. XXV.

(quæ (k) ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproximè, in utrâque curvâ: (†) deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, unà cum reſiſtentia, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ ſimplici auctam; & diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo obſervatæ, velocitates verò maximæ ponendæ ſunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto, numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, (l) per debitam collationem & reductionem analyticam, fit A = 0,0000916, B = 0,0010847, & C = 0,0029558. Eſt igitur differentia arcuum ut $0,0000916\,V + 0,0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0029558\,V^{2}$: & propterea cum (per corollarium propoſitionis xxx. applicatum ad hunc caſum) reſiſtentia globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, (m) ſit ad ipſius pondus A

$\frac{7}{11}$ A

(k) * *Quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (per cor. 3. lem. X). Reſiſtentia enim conſiderari poteſt ut vis quæ retardationem producit, & differentia arcuum ut ſpatium quod corpus vi illâ mediocri ac conſtante ſollicitatum deſcriberet. Hinc arcuum differentiæ erunt quam proxime ut *reſiſtentia directè & quadratum temporis conjunctim.*

(†) * *Deberent differentiæ in Cycloide augeri unà cum reſiſtentia in duplicatâ circiter ratione, arcus ad chordam ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam*, quia ſcilicet pars maxima reſiſtentiæ eſt ut quadrata velocitatum.

(l) * *Per debitam collationem.* Prima æquatio eſt $\frac{\frac{1}{2}}{121} = \frac{1}{2 \times 121} = A + B + C$. 2ª. diviſa per 4. eſt $\frac{1}{71} = A + 2B + 4C$, & tertia diviſa per 16. eſt $\frac{3}{58} = A + 4B + 16C$. Ex his autem æquationibus facile eruuntur valores litterarum A, B, C, ſi fractiones $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{71}$, & $\frac{3}{58}$ ad decimales reducantur.

(m) * *Sit ad ipſius pondus.* A V eſt pars differentiæ arcuum genita per reſiſtentiæ partem illam quæ eſt ut velocitas

: B V

$\frac{7}{11}$ A V + $\frac{7}{10}$ B $V^{\frac{3}{2}}$ + $\frac{3}{4}$ C V^2 ad longitudinem penduli; si pro A, B & B scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut 0,0000583 V + 0,0007593 $V^{\frac{3}{2}}$ + 0,0022169 V^2 ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cùm V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0,0030345 ad 121, in quarto ut 0,041748 ad 121, in sexto ut 0,61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cùm radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit (n) erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, (o) sed in medio ferè loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si glo-

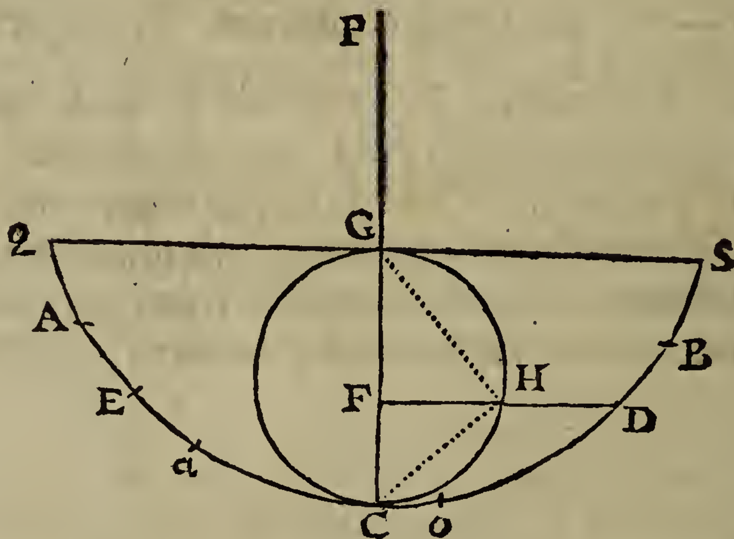
$B V^{\frac{3}{2}}$, pars differentiæ arcuum genita per resistentiæ partem quæ est in sesquiplicatâ ratione velocitatis; & $C V^2$ pars differentiæ arcuum producta per resistentiæ totius partem quadrato velocitatis proportionalem (*per cor.* 4. *prop.* 31). Sed (*per cor. prop.* 30.) si resistentia sit ut velocitas, est $\frac{7}{11}$ $A V$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in puncto medio arcûs descripti ad ejusdem pondus; si resistentia sit ut velocitatis quadratum, resistentia illa in puncto medio arcûs descripti est ad corporis pondus ut $\frac{3}{4} C V^2$ ad longitudinem penduli, & (181) si resistentia sit in ratione sesquiplicatâ velocitatis, est illa ad corporis pondus ut $\frac{7}{10}$ $B V^{\frac{3}{2}}$ ad longitudinem penduli. Quarè cum hic supponatur resistentia partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione sesquiplicatâ & partim in duplicatâ, resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, erit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}$ $A V$ + $\frac{7}{10}$ $B V^{\frac{3}{2}}$ + $\frac{3}{4}$ $C V^2$, ad longitudinem penduli. 183.

(n) * *Erat* $124\frac{3}{31}$ *digit.* Sunt enim radii ut similes circulorum arcus, & ideò radius 121, est ad suum arcum $119\frac{5}{29}$ ut radius 126, ad arcum correspondentem $124\frac{3}{31}$ quamproximè.

(o) * *Sed in medio ferè loco.* Patet per not. 180.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

globus descensu suo toto in medio non resistente (p) describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis



(p) * *Describeret arcûs illius partem dimidiam.* Corpus oscillando describat arcum B a in medio resistente & arcum B A in medio non resistente; sit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcûs B a, & arcûs CD sit æqualis arcui BO, velocitas maxima descensu corporis per arcum B O acquisita in medio resistente est ad velocitatem maximam per arcum B C acquisitam in medio resistente ut arcus B O, ad arcum B C (180). Sed si corpus è loco D in medio non resistente cadendo describat arcum D C, erit etiam velocitas ipsius in C descensu per arcum D C acquisita ad velocitatem acquisitam ibidem descensu per arcum B C ut arcus C D, vel æqualis B O ad arcum B C, (*prop.* 51. *lib.* 1). Ergò velocitas in medio resistente per arcum B O acquisita in O æqualis est velocitati quam corpus in medio non resistente cadendo per arcum D C = B O haberet in C; & propterea (85. *lib.* 1. velocitas illa æqualis est velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non resistente, & casu suo describendo altitudinem F C æqualem sinui verso arcûs CD, acquirere posset. Sit jam P punctum suspensionis, P C longitudo penduli S D C semicyclois, S G & D F ad P C normales, & C H G C circulus diametro G C descriptus secans D F in H. Jungatur chorda C H, & erit arcus cycloidis S D = 2 G C—2 C H, & arcus S E = 2 G C (462. *lib.* 1.) ideóque arcus D C = 2 C H. Est autem (ex naturâ circuli) C F ad C H ut C H ad C G, & hinc C F ad 2 C H seu D C, ut 2 C H ad 4 C G, sivè ut D C ad 2 P C; Hoc est, sinus versus C F, ad arcum C D, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

lis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0, 61705 ad 121, vel (si (q) resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0, 56752 ad 121.

(r) Experimento autem hydrostatico inveni quod pondus globi hujus lignei esset ad pondus globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit resistentia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis (s) ad ipsius pondus ut 0, 56752 ad 213, 4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cùm pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuatâ (t) describat longitudinem digitorum 30, 556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset; (u) manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$.

Et

(q) * *Si resistentiæ pars illa sola &c.* Si enim in quantitate, 0, 0022169 V^2 quæ est ad longitudinem penduli ut resistentiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V scribatur 16, & loco V^2 scribatur 256, fiet 0, 0022169 V^2 = 0, 56752, quamproximè.

(r) * *Experimento autem hydrostatico.* Experimentum facile est. Cùm enim corpus fluido immersum, eâdem vi sursum urgeatur quâ par fluidi volumen sustinetur, id est, vi quæ æqualis est ponderi fluidi ejusdem magnitudinis (*cor.* 5. & 6. *prop.* 20. *lib. hujus*) corpus fluido specificè leviori immersum ponderis sui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejusdem voluminis; & propterea si corpus illud fluido immersum ponderetur, cognoscetur pondus fluidi ejusdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo specificè gravius sit, corpori illi adjungi potest aliud corpus majoris gravitatis specificæ ut eorum summa fluido specificè gravior fiat.

(s) *Ad ipsius pondus.* Resistentia globi solidi æqualis est resistentiæ globi aquei ejusdem magnitudinis & cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, sed resistentia globi solidi est ad ejusdem pondus ut 0, 56752 ad 121, & pondus globi solidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213.4, seu ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ quamproximè.

(t) * *Describat longitudinem digit.* 30, 556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15. 278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset (29. lib. 1.).

(u) * *Manifestum est.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. *lib.* 1.).

Et propterea quo tempore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem femidiametri fuæ, feu digitorum $3\frac{7}{16}$, defcribere poffet, (x) eodem amitteret motûs fui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam ofcillationes quibus pendulum quartam motûs fui partem amifit. In fequente tabulâ numeri fupremi denotant longitudinem arcûs defcenfu primo defcripti, in digitis & partibus digiti expreffam: numeri medii fignificant longitudinem arcûs afcenfu ultimo defcripti; & loco infimo ftant numeri ofcillationum. Experimentum defcripfi tanquam magis accuratum quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. (y) Calculum tentet qui volet.

Def-

(x) * *Eodem amitteret motûs fui partem.* Nam velocitates eâdem vi conftante vel extinctæ funt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (13. *lib.* 1.), fed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30, 556, & digit. $3\frac{7}{16}$, funt ut hæ longitudines (5 *lib.* 1.). Quarè velocitates amiffæ funt ut eædem longitudines, & ideò 30, 556 ad $3\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ ad velocitatem amiffam eo tempore quo globus longitudinem femidiametri fuæ feu digit. $3\frac{7}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amiffa $= \frac{1}{3342}$, quamproximè.

(y) * *Calculum tentet.* Quoniam experimentum magis accuratum eft, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiæ arcuum primo defcenfu & ultimo afcenfu defcriptorum.

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16.

Arcus in unâ mediocri ofcillatione decripti, funt

$3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Differentiæ arcuum defcenfu & fubfequente afcenfu in unâ mediocri ofcillatione defcriptorum, funt

$$\frac{\frac{1}{2}}{374},\ \frac{1}{272},\ \frac{2}{162\frac{1}{2}},\ \frac{4}{83\frac{1}{3}},\ \frac{8}{41\frac{2}{3}},\ \frac{16}{22\frac{2}{3}}$$

five ut 1. 2. 7500; 9. 2061; 35. 5040; 143. 7760; 528. 5882

Hæ autem differentiæ in majoribus ofcillationibus funt in duplicatâ ratione arcuum defcriptorum fatis proximè; Nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{3}} = 34 : 125$, & $34 : 126 = 1 : 4$; hoc eft, in duplicatâ ratione arcuum defcriptorum. Et fimiliter $\frac{4}{83\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò ofcillationibus, differentiæ illæ funt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum defcriptorum. Eft enim $\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ & hæc ratio major eft ratione 1 ad 4. Defignet jam V, ut fupra, velocitatem maximam in ofcillatione quâvis, & $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$, differentiam arcuum; & quoniam velocitates ponendæ funt arcubus defcriptis fcil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, analogæ, fcribamus in caf. 2°. 4°. & 6°. numeros 1, 4, 16, pro V, & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{272} = A + B + C$ in caf. 2°. $\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4A + 8B + 16C$ in

caf.

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motûs totius cessavit: secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Des-

cas. 4°. & $\frac{16}{22\frac{1}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in cas. 6°. Ex his æquationibus habetur $A = 0{,}0005096$, $B = 0{,}0005884$, & $C = 0{,}0025784$. Est igitur differentia arcuum ut $0{,}0005096\,V + 0{,}0005884\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0025784\,V^2$, & propterea cùm resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, fiet resistentia globi ad ejus pondus ut $0{,}0003243\,V + 0{,}0004119\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0019338\,V^2$, ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digit. Unde cùm V in cas. 2°. designet 1; in 4°. 4, in 6°. 16; erit resistentia ad pondus globi in cas. 2°. ut 0,0267 ad 121; in 4°. ut 0,0355332 ad 121; in 6°, ut 0,5266032 ad 121.

Ponatur resistentia in tardioribus motibus partim uniformis & partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportionalis, ideòque arcuum differentia sit $A + BV + CV^2$, & scribamus in cas. 1°. 2°. & 3°. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2B + 4C = \frac{1}{272}$, & $A + 4B + 16C = \frac{4}{323}$, ex quibus eruitur $A = 0{,}00034$; $B = 0{,}0003255$, & $C = 0{,}0006714$; & propterea cùm (*per cor. prop.* 30.) resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{1}{2}A + \frac{7}{11}BV + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B, & C, scribantur numeri inventi, sint resistentia globi ad ejus pondus ut $0{,}00017 + 0{,}0002071\,V + 0{,}0005035\,V^2$ ad 121, id est, in 1°. cas. ut 0,0008806 ad 121; in 2°. cas. ut 0,0025982 ad 121; in 3°. cas. ut 0,0090544, ad 121; resistentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0,00017 ad 121, seu ut 1, ad 735294 183.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabulâ priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respectivè, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4\,A + 8\,B + 16\,C$, in septimâ $\frac{8}{30} = 16\,A + 64\,B + 256\,C$. Hæ verò æquationes reductæ dant A = 0,001414, B = 0,000297, C = 0,000879. Et inde prodit resistentia globi cum velocitate V moti in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\,V + 0{,}000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217\,V^2$ ad 121: (z) & inde fit resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in

(z) *Et indè fit resistentia.* Est enim (*ex dem.*) resistentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0{,}002217}{121}$; & resistentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0{,}000659}{121}$, ideóque resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4} \times 0{,}000659$ id est, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

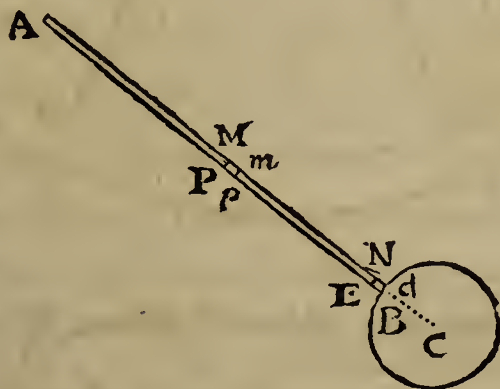
in o, 000659, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo resistentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. (a) At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè permagna erat, ac de pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem tertiam resistentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod resistentiæ

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

(a) 184. *At nondum consideravimus* &c. 184.

PROBLEMA.

Fili tensi oscillantis resistentiam invenire in medio cujus resistentia est ut velocitatis & diametri globi quadrata conjunctim.



Filum cylindricum homogeneum A B, circà punctum A, oscilletur, sitque ejus longitudo A B $= a$, diameter E N $= 2b$, globi C, diameter $= 2r$, longitudo variabilis A P $= x$, P p $= dx$; & cylindruli evanescentis P M, velocitas erit ut distantia A P, ejusque proindè resistentia ut $xxdx$, sive ut altitudo cylindruli P p & quadratum velocitatis conjunctim; & hinc, sumptâ fluente, resistentia fili A P, fit ut $\frac{1}{3}x^3$, & totius fili A B resistentia ut $\frac{1}{3}a^3$. Capiatur in B, cylindrulus B N, cujus altitudo B E sit æqualis diametro fili E N, seu $2b$, & resistentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3}(a-2b)^3$, ideoque cylindri B N resistentia ut $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(a-2b)^3$. Est igitur resistentia fili totius A B, ad resistentiam cylindri B N, ut a^3 ad $a^3 - (a-2b)^3$; sed ut infra prop. 34. demonstrabitur, cylindri B N resistentia est ad resistentiam globuli huic cylindro inscripti ut 2 ad 1, & resistentia globuli hujus est ad resistentiam globi C, in ratione quamproxime compositâ ex ratione quadrati diametri E N, ad quadratum diametri 2 B C, & ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globi C hoc est, ut $bb(a-b)^2$ ad $rr(a+r)^2$. Quarè (per compositionem rationum & ex æquo) resistentia fili A B, est ad resistentiam globi C, ut $2a^3bb(a-b)^2$, ad $a^3rr(a+r)^2 - rr(a+r)^2 \times (a-2b)^3$, seu ponendo $a+r=c$, ut $a^3b(a-b)^2$ ad $3a^2rrcc - 6abrrcc + 4bbrrcc$, & hinc resistentia fili ad resistentiam totius penduli ut $a^3b(a-b)^2$, ad $a^3b(a-b)^2 + rrcc(3aa-6ab+4bb)$ Q. E. I.

185. *Coroll.* Si fili semidiameter b, sit admodum exigua respectu longitudinis ejusdem a, erit ferè $3aa-6ab+4bb = 3aa-6ab+3bb = 3(a-b)^2$. Quare fili resistentia erit ad resistentiam globi ut a^3b ad $3rrcc$, & ad resistentiam totius penduli ut a^3b ad $a^3b+3rrcc$. Exempli causâ. Sit $c = 126$. digit. $r = 1$ digit. $a = 125$ digit. $b = \frac{1}{100}$ digit. & resistentia fili erit ad resistentiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, seu ut 1 ad 2,438 quamproximè.

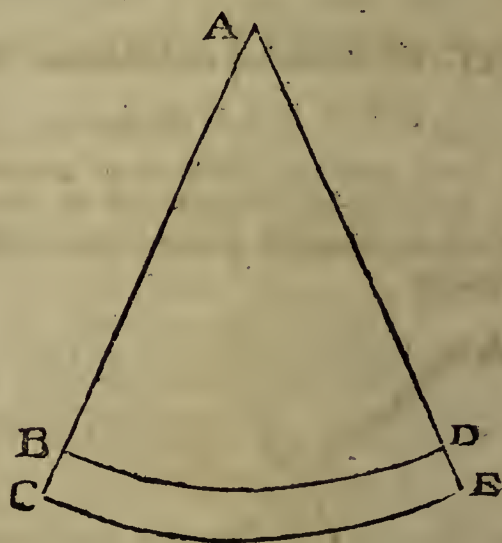
186. In-

tiæ globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quam proxime in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$ ad $1-\frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abest à diametrorum ratione duplicata $11\frac{11}{16}$ ad 1.

Cùm resistentia fili in globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum suspen-

186. Inveniri etiam potest pars illa resistentiæ fili quæ uniformis est, quæque in tardioribus motibus observatur; posito quod uniformis illa resistentia fili sit ad uniformem resistentiam globi, ut spatium solidum quod filum oscillando describit ad spatium solidum quod describit globus. Filum cylindricum A B oscillatione unâ describat spatium solidum seu prisma cujus basis est sector circularis A B D, & altitudo diameter fili, interea dum globi centrum C, describit arcum C E, diameter fili dicatur $2\ R$, & spatium à filo descriptum erit $R \times AB \times BD$; spatium verò a globo descriptum est factum ex area circuli cujus radius B C, in arcuum C E quem centrum C describit; seu est $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$. Quarè uniformis resistentia fili est ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB \times BD$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$, hoc est, ob rectas A B, A C arcubus B D, C E proportionales, ut $R \times {}^2 AB^2$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$, totaque uniformis resistentia penduli ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB^2 + \frac{22}{7} BC^2 \times AC$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$.

Exempli causâ. Sit $R = \frac{1}{100}$ digit. A C $= 126$ digit. B C $= 3\frac{7}{16}$, A B $= 122\frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac secundo,



& invenietur uniformis resistentia fili ad uniformem resistentiam globi ut 1 ad 31 circiter, & ideo resistentia fili est resistentiæ totius penduli pars $\frac{1}{32}$. Cùm igitur supra inventa sit resistentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 735294, subductâ resistentiâ fili, erit uniformis resistentia globi lignei ad ejusdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{22}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc resistentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento. Mediocres arcuum differentiæ in primâ tabulâ sumptæ sunt in cas. 1°. 2°. & 3°. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$, & $\frac{1}{386}$, respectivè. Loco V, in quantitate $A + BV + CV^2$, scribantur successivè numeri 1, 2, & 4, & produ-

penſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu à nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri à nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri à centro globi deſcriptum; & ita dif-

dibunt æquationes $A+B+C=\frac{1}{1808}$; $A+2B+4C=\frac{1}{912}$, & $1A+4B+16C=\frac{1}{386}$, ex quibus habetur $A=0{,}0001455$ $B=0{,}0004076$, & $C=0{,}0000679$. Unde reſiſtentia uniformis eſt ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut $\frac{1}{2}A$ ſeu $0{,}0000728$ ad 121, id eſt, ut 1 ad 1662088. Jam verò cùm in hoc experimento ſit $AC=126$ digit. $BC=1$, $AB=125$, ſi ponatur $R=\frac{1}{100}$ digit. invenitur uniformis reſiſtentia fili ad reſiſtentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, ſivè ferè ut 2 ad 5; & ideo fili reſiſtentia totius reſiſtentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{7}$. Quarè uniformis reſiſtentia globi plumbei eſt ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut 1 ad 2326923 circiter; & hinc uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus diameter eſt digit. 2, eſt ad ad reſiſtentiam globi lignei uniformem cujus diameter eſt digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{4}\times 760000$ ad $57\frac{7}{22}\times 2326923$, hoc eſt, ut 19950000 ad 133374995 ſivè ut 1 ad 6,685.

Verùm ſi ponatur reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, reſiſtentia globi lignei invenitur eſſe ad ejuſdem pondus $57\frac{7}{22}$ unciar. Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, & reſiſtentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; & in ratione 1, ad 1021097 per tabulam ſecundam ultimi experimenti; undè ſumptâ mediocri ratione, reſiſtentia uniformis globi plumbei eſt ad pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideò, in hâc reſiſtentiæ Hypotheſi, uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus eſt diameter digit. 2, eſt ad reſiſtentiam uniformem globi lignei cujus diameter eſt digit. $6\frac{1}{8}$, ut $26\frac{1}{4}\times 450000$ ad $57\frac{7}{22}\times 966000$ ſeu ut 1, ad. 4,687, circiter. 186.

(b) * *Ejus pars decima.* Si oſcillatio ex itu & reditu penduli, ſeu ex bino deſcenſu binoque aſcenſu componatur, quinque oſcillationes ſic acceptæ æquivalent oſcillationibus decem quarum ſingulæ ex uno tantùm deſcenſu unoque aſcenſu conſtant. Priore ſignificatione NEWTONUS oſcillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepiſſe videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. Per N. 10 dividit ut differentiam inveniat inter arcus deſcenſu uno & ſubſequente aſcenſu deſcriptos in unâ mediocri oſcillatione ex deſcenſu uno unoque aſcenſu compoſitâ.

differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0, 4475. (c) Si longitudo penduli, manente longitudine arcûs descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augeretur, & velocitas penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ, maneret verò arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0, 4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0, 4475 (d) augeretur in duplicatâ illa ratione, ideoque evaderet 1, 5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum centro oscillationis, quod à puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptum (e) fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta

(c) * *Si longitudo penduli*, in medio non resistente *augeretur in ratione* 126 *ad* 122 $\frac{1}{2}$, *tempus oscillationis*, ob datam globi fune penduli massam & pondus, *augeretur in ratione illâ subduplicatâ* (*per cor.* 6. *prop.* 24.) quod etiam in medio resistente verum est quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli & manente longitudine arcûs descripti, velocitas penduli diminuetur in ratione subduplicatâ longitudinis penduli, (ideoque inversè ut tempus); Nam velocitates descensu per arcus quosvis acquisitæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum illis arcubus correspondentium; Chordæ verò pro quibus arcus sumere hic liceat, sunt mediæ proportionales inter abscissas suas & circulorum Diametros, si ergo sumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, abscissæ eorum arcuum erunt inversè ut Diametri circulorum sive inversè ut eorum Radii, hoc est inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum, erunt in ratione subduplicatâ inversâ longitudinum pendulorum; Cùm ergo arcuum differentiæ sint ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, resistentiaque sit ut quadratum velocitatis, sitque quadratum velocitatis inversè ut longitudo pendulorum; & quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compensatis rationibus manebunt eædem arcuum differentiæ, si mutatâ pendulorum longitudine arcus æquales describantur.

(d) * *Augeretur in duplicatâ illâ ratione.* (Per cor. 2. prop. 31.).

(e) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cùm enim in cas. 6°. experimenti primi penduli seu fili,

ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49,396. Duxi autem differentias hasce in pondera globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, (f) suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 & 49,396. Pars autem resistentiæ globi minoris, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id est, ut 45,453 ad 49,396; & pars resistentiæ globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; ideoque partes illæ sunt ut 318, 136 & 45,453 quamproximè, id est, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 & 1, id est, ut globorum resistentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quam quæ ex fili resistentiâ oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum, sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Optarim itaque, (g) cùm demonstratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accu-

fili ad nodum usquè longitudo esset 121 digit. arcus descriptus erat $119\frac{5}{29}$ digit. & arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit. Et mutatâ penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus descriptus & differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121} \times 119\frac{5}{29}$, seu $124\frac{3}{31}$ digit. & differentia $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

(f) * *Suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè.* Nam (*per cor. prop.* 30.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ sunt ad penduli longitudinem, ut resistentia ad gravitatem seu pondus globi penduli; data igitur penduli longitudine, differentiæ illæ sunt ut resistentiæ directe & pondera inversè.

(g) 187. * *Cùm demonstratio vacui &c.* Utrum resistentia quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, experimentis globorum in medio resistente oscillantium inveniri potest. Nam si, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum resistentiæ semper essent in 186.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

accuratis tentarentur. Si globi ſumantur in proportione geometricâ, putà quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam verò conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe, tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli à puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Ar-

in duplicatâ diametrorum ratione, inſenſibilis foret in partibus internis reſiſtentia; cum enim reſiſtentia illa interna à numero, magnitudine, figurâ & texturâ internarum partium penderet, non poſſet eadem conſtanter manere in globis æqualibus & heterogeneis, ligneis v. g. & plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum ſuperficierum, ſed potiùs ſolidorum rationem ſequeretur. Porrò ſuperioribus experimentis jam probatum eſt in velocioribus globorum motibus, reſiſtentias quadratis diametrorum proportionales eſſe quam proxime, concludendum igitur eſt nullam eſſe notabilem in partibus corporum internis reſiſtentiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonſtrabit NEWTONUS. Verum ſi medium quoddam æthereum vel longe ſubtiliſſimum omnes omnium corporum poros & meatus repleret, propter medii illius ætherei ſummam denſitatem atque inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam reſiſtentiam ſentirent. At qui *Carteſianum* mundi pleni ſyſtema emendarunt noviſque inventis ornarunt eruditiſſimi ſagaciſſimique Mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus *Carteſianorum* vulgus utitur, ex ſubtilitate ac mobilitate ætheris & pororum quibus corpora omnia pertuſa ſunt diſpoſitione petitis, hoc unum reſponſum proferunt, ætheream materiam corporum gravium motibus minime reſiſtere, quod ſit omni gravitate deſtituta. Duplicis itaque generis materiam in univerſo diſtinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos diviſæ non ſunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis cauſam, cujus partes ex tenuiſſimis variorum ordinum vorticulis elaſticis conſtant. Cùm autem vis motrix ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decreſcente corporis hujus gravitate, in eâdem ratione decreſcat, nullaque ſit ætheris gravitas, conſequens eſſe aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonniſi infiniteſimam motûs ſui partem ex reſiſtentia ætheris finito quovis tempore deperdat. Verùm præterquam quod totum hoc ſiſtema, ut ut elegans ac venuſtum, fictis fere ad arbitrium hypotheſibus, quas NEWTONUS è Phyſicâ experimentali vellet eliminari, nititur, plurimiſque & graviſſimis aliis ex Mechanica atque Aſtronomiâ difficultatibus premitur, adductum modò reſponſum his etiam laborat incommodis. Primum quidem evidens eſt, vim illam quæ ad corpus grave contrà gravitatis directionem ſuſtinen-

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere	$85\frac{1}{2}$	287	535						

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aquâ amissi sunt. Erant quidem oscilla-

nendum necessaria est, cum corporis pondere decrescere debere; sed non ità manifestum est vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decrescere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni opposita non est, sed illi perpendicularis aut cum illâ conspirans. Præterea materia omnis ætherea circa solem, stellas, atque planetas singulos pernicissimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ à centris magnorum vorticum, atque etiam à centris singulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ seu gravitate conferri potest, idem præstare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprimendi, quod in cæteris corporibus gravitas præstat. Nulla igitur esse ratio videtur cur corpus grave datâ celeritate motum nonnisi infinitesimam suæ celeritatis particulam ex ætheris non gravis resistentiâ amittat, siquidem illud vi centrifugâ pollet; Et, si materia ætherea suâ vi centrifugâ vel certè vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret & extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, si finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis centrifuga infinitesima sit, si cum vi quâ corpus spatium finitum tempore infinito describit, conferatur. 187.

* Et quidem resistentia ex gravitate materiæ occurrentis non pendet, sed ex ejus inertiâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum suscipiat quin tantumdem motus in eo destruat, idque Mechanici communiter statuunt tam ex consensu omnium quorumcumque Phænomenorum, ubi (semotâ gravitatis consideratione) nullus motus motum producendo non consumitur, quam ex Principiis Metaphysicis quâ liquet quod si res ita se non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque Universi moles ex Atomi progressione dimoveretur, quod absurdum. Unde si Æther non resisteret, hoc est vi inertiæ careret, fingendæ forent duæ materiæ species, quarum altera vi inertiæ prædita foret, altera vero non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; simul autem statuitur quod id æther corporum motum sistere potest aut mutare quomodocumque, nam si æther sit gravitatis causa oportet ut illa ipsa materia ætherea quæ corporis moti actione movetur, dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, possit illud idem corpus si sursum feratur sistere, in adversum ejus directionem mutare &c. Quæ Metaphysicè etiam inter se repugnare videntur, nec satis fuisse perpensa ab ingeniosissimis Cartesianismi restauratoribus.

oscillationes in aere paulo celeriores quàm in aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus (h) motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aquâ oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; (i) ideoque resistentia penduli in aquâ est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum à globo in aere cum velocitate maximâ V moto; & cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ (k) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro

(h) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amisso proportionalis, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim (*per cor.* 5. *Lem.* X); sed auctâ paululum velocitate, resistentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per hyp.) & simul quadratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus descriptus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem quam proximè manet. Quarè motus amissus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem manet, si oscillationes in aquâ accelerentur ut dictum est (vid. not. sup. c).

(i) * *Ideoque resistentia penduli.* Nam motus in aëre amissus unâ mediocri oscillatione, quâ arcus digit. 14 describitur, est pars $\frac{1}{535}$ motûs totius oscillationibus 535, amissi; Et similiter motus in aquâ amissus æquali oscillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate describeretur est quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ejusdem motûs totius amissi oscillationibus $1\frac{1}{5}$ in aquâ & oscillationibus 535 in aëre. Quarè cùm resistentiæ totæ unâ oscillatione mediocri sint ut partes illæ motûs amissæ, est resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam in aëre ut $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ad $\frac{1}{535}$, id est, ut 535 ad $1\frac{1}{5}$.

(k) * *Ut* $\frac{2}{535}$ *ad* $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$. Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum os-

8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A+C=85\frac{1}{2}$ & $8A+64C=4280$ seu $A+8C=535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C=449\frac{1}{2}$ & $C=64\frac{3}{14}$ & $A=21\frac{2}{7}$: atque ideo resistentia, ([l]) cùm sit ut $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V+48\frac{9}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11}+48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ([m]) ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aquâ oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oscillantis, ([n]) ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aquâ, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ. Ejus rei causam investigan-

oscillationum ut differentia in unâ mediocri oscillatione habeatur, quemadmodum suprà factum est.

(l) * *Cùm sit ut* $\frac{7}{11}AV+\frac{3}{4}CV^2$. (per cor. prop. 30.).

(m) * *Ut* $61\frac{12}{17}$ *ad* &c. Est enim, ex suprà dictis, resistentia in aquâ ad resistentiam totam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$ & resistentia tota in aere ad resistentiæ partem illam in aere quæ velocitatis quadrato proportionalis est ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$, & idcircò (ex æquo), & per compositionem rationum) *resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aere, &c.*

(n) * *Ut* 850. *ad* 1 circiter. Si enim resistentia fili ponatur ut suprà factum est, æqualis tertiæ parti resistentiæ totius in aere, erit fere resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam totam in aere ut $535 - \frac{6}{15}$ ad $1\frac{1}{5} - \frac{6}{15}$, seu ut 2673 ad 4, & $2673 \times 61\frac{12}{17}$ ad $4 \times 48\frac{9}{56}$, ut 859 ad 1 circiter.

187

gando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustiâ suâ nimis impediebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam construendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aquâ, superior & major proximè supra aquam filo affixus esset, & in aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut (o) in tabulâ sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum; & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argen-

(o) * *In tabulâ sequente.* Arcuum differentiæ dividantur per numerum oscillationum in casu unoquoque, & prodibunt differentiæ in oscillatione unâ mediocri 1. 1851; 0. 3076; .0827; .0235; .0073; .0023 .0010 quæ sunt quam proximè ut quadrata velocitatum, sive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ in majoribus oscillationibus. priores enim termini sunt proximè sequentium fere quadrupli, in minoribus verò oscillationibus præcedentes termini sunt in minore ratione ad sequentes.

argenti vivi in eâ ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quàm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aere, in aquâ seu dulci seu salsâ, in spiritibus vini, terebinthi & salium, in oleo à fæcibus per destillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & si qui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrimè in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

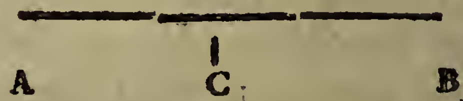
Denique cùm nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum & longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu suo superiore aciei annixus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam à perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

ne annulus, oſcillante pendulo, ſupra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum ſuſpenſionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demiſſo notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oſcillationis primæ, ſecundæ ac tertiæ. Hoc repetebam ſæpius, ut loca illa quam potui accuratiſſimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tenſum (p) dimidio ponderis ſui pendulum à perpendiculo digreſſum ſemper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quaſi pars ſeptuageſima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere ſuo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oſcillantis eadem eſſet longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimiſſo, numerabam oſcillationes quaſi ſeptuaginta & ſeptem, donec pyxis ad locum ſecundo notatum rediret, totidemque ſubinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rurſus totidem donec pyxis reditu ſuo attingeret locum quartum. Unde concludo quod reſiſtentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad reſiſten-

tiam

(p) * *Dimidio ponderis ſui.* Fili tenſi A B homogenei & æqualis ubique craſſitiei centrum gravitatis eſt in loco medio C, (59. *lib.* 1.) ideóque vis quâ filum pondere ſuo toto *P*, ad rotandum circà A, urgetur, eſt ut $AC \times P$, ſeu ut $\frac{1}{2} P \times AB$.) 63. *lib.* 1.) jam ſi inveniendum ſit pondus *Q* in B locandum ut momentum $Q \times AB$ æquivaleat momento ſeu vi fili totius; erit $Q \times AB = \frac{1}{2} P \times AB$, ideóque $Q = \frac{1}{2} P$. Quarè filum tenſum dimidio ponderis ſui P pendulum à perpendiculo digreſſum ſemper urget.



tiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insitâ pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideo completis semper oscillationibus 78 (q) ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externâ, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut ma-

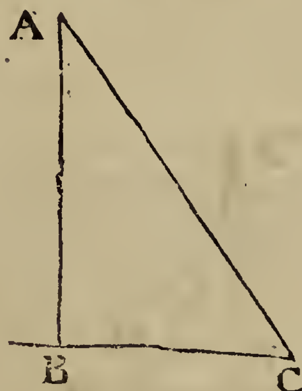
(q) * *Ad loca illa notata redire.* Si resistentiæ in singulis oscillationibus essent æquales, motus amissi, ut pote resistentiis proportionales, essent quoque æquales; sed motus amissi, paribus oscillationum temporibus, sunt ut massæ seu pondera corporum & spatia motibus amissis describenda conjunctim; ideoque spatia illa essent ut pondera inversè; hoc est, spatium motu pixidis vacuæ amisso in unâ oscillatione describendum, esset ad spatium motu pixidis plenæ oscillatione unâ amisso percurrendum ut 78 ad 1, & propterea spatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oscillatione, & pixidis plenæ oscillationibus 78 absolutis, forent æqualia quamproximè, atquè ideò pixis plena, completis semper oscillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cùm in hâc Sectione 6â. NEWTONUS de solo corporum in cycloide oscillantium motu egerit, multa verò à recentioribus authoribus inventa sint, quibus generalis motuum in curvis quibuslibet theoria longe promota est, principia quibus usi sunt sequenti problemate breviter exponemus.

PROBLEMA.

188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet ascendentis vel descendentis in medio uniformi cujus resistentia est ut velocitatis functio quælibet.

De corporum ascensu ac descensu in lineis rectis ad horizontem quomodocum-

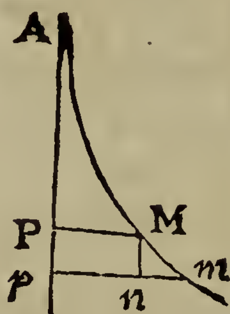


que inclinatis agere hic necessum non est; si enim corpus in lineâ rectâ A C ad horizontem B C utcumque inclinatâ ascendat vel descendat, resistentia & celeritas in quibuscumque locis & spatium descriptum ac tempus quo descriptum est, definiuntur per Prop. 3. Sect. 1; 8am. & 9am. Sect. 2; 13am. & 14am. Sect. 3. ac per notas iisdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis secundum directionem A B urgentis sit ad ipsius partem quæ agit juxtà directionem A C, in datâ ratione lineæ A C ad A B, seu in datâ ratione sinûs totius ad sinum anguli inclinationis A C B; si loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis & constructionibus pars illius data quæ secundum directionem A C agit, constructiones calculique in citatis locis non mutantur. Superest igitur ut corporis in curvâ lineâ ascendentis aut descendentis motum definiamus. 188.

Desi-

materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78 B resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ resistentia tota A + B erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, & divisim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externâ superficie, & amplius. Sic verò disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, sed ab actione solâ fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc



Descendat primùm corpus è loco dato A per curvam A M, ducatur verticalis A P, ad quam ex punctis M, & m, infinitè propinquis demittantur perpendicula M P, m p, & ex M ad p m perpendiculum M n. Gravitas constans secundùm directionem verticali A P parallelam semper agens sit $= g$, resistentia in loco M $= r$, velocitas corporis ibidem $= v$; tempus quo describitur A M $= t$, A P $= x$, A M $= s$, P p $=$ M n $= dx$, & M m $= ds$. Jam verò M m, est ad M n, seu ds ad dx, ut vis gravitatis g ad ipsius partem in directione M m agentem quæ ideo erit $= \frac{g\,dx}{ds}$; subducatur vis resistentiæ r, & vis residua quâ corpus in loco M, juxtà directionem, M m urgetur erit $= \frac{g\,dx}{ds} - r$. Undè (18) fit $g\,dx - r\,ds = v\,dv$. Hujus autem æquationis fluens ità sumi debet ut evanescentibus x & s evanescat quoque v si velocitas corporis in loco A nulla sit, & fiat $v = c$, si velocitas corporis in A, sit $= c$. Simili modo si corpus è loco dato A per arcum A M ascendat, & omnia ut modò supposuimus maneant, erit (18) $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, cujus æquationis fluentem ità sumi oportet ut positis x & $s = 0$, fiat v, æqualis velocitati in loco A datæ.

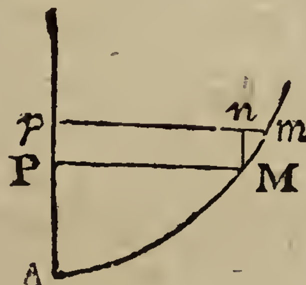
Si abscissa x in verticali B C per curvæ A C D punctum infimum C ducta capiatur, sitque B P $= x$, & cætera maneant ut supra, erit adhuc pro corporis descensu $g\,dx - r\,ds = v\,dv$; at pro ascensu per arcum C μ si data sint puncta A & B, dicaturque C μ vel A C $\mu = s$, erit $-g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, seu adhuc $g\,dx - r\,dt = v\,dv$, quia crescente s decrescit x & contrà. Si vero dicatur C P $= x$ & C M $= s$, quia hæ quantitates respectu aliarum B P, & A M negativæ sunt, fiet pro descensu $-g\,dx + r\,ds = v\,dv$, seu $g\,dx - r\,ds = -v\,dv$, & pro ascensu si dicatur C $\mu = s$ erit $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$ quarum æquationum altera in alteram abit, mutato signo quantitati r, præfixo. Ex datâ igitur lege resistentiæ, loco r scribatur ipsius valor per v & datas quantitates, & ex datâ æquatione ad curvam A M, loco dx scribatur valor ejus per ds, s & datas quantitates in superioribus formulis seu æquationibus; & deinde per curvarum quadraturas vel per series, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebitur

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulſus ſum.

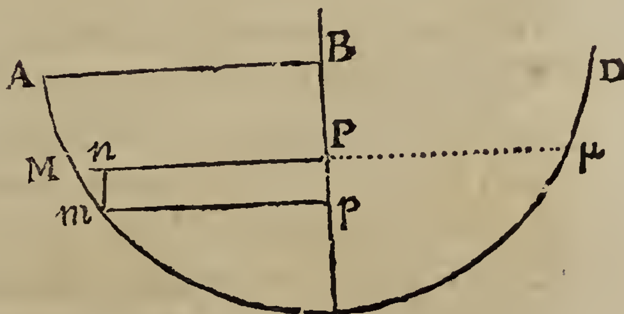
Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus.

SEC-

tur v per s & contrà, atque etiam r per s, & quia tempus t, quo arcus s deſcribitur eſt $S. \frac{ds}{v}$, dabitur quoque tempus. Q. E. I.



Exempli causâ. Sit reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quæ eſt Hypotheſis naturæ, ſeu ſit $r = \frac{aa + vv}{b}$, dicanturque $BP = x$, $AM = s$ & æquatio $g\,dx - r\,ds = v\,dv$ in hanc migrabit $g\,dx - \frac{aa\,ds}{b} = v\,dv + \frac{vv\,ds}{b}$; ut hoc ſecundum æquationis membrum debitam formam acquirat, ponatur $ds = \frac{\frac{1}{2}b\,dz}{z}$, ſeu $s = \frac{1}{2}b\,L.z$, æquatio evadet $gz\,dx - \frac{1}{2}aa\,dz = zv\,dv + \frac{1}{2}vv\,dz$, ſumptis fluentibus, fit $gS.z\,dx - \frac{1}{2}aaz = \frac{1}{2}zvv$. Undè invenietur $vv = \frac{2gS.z\,dx}{z} - aa$. Eſt autem $S.z\,dx$, area curvæ cujus abſciſſa x & ordinata z; & z datur per s, ope logarithmicæ, & x per s ope æquationis ad curvam A M. Sit h numerus cujus logarithmus eſt unitas, ſeu $L.h = 1$, erit $s\,L.h = \frac{1}{2}b\,L.z$; & $\frac{2s}{b}L.h = L.h^{\frac{2s}{b}} = L.z$, atquè $h^{\frac{2s}{b}} = z$, undè habetur $vv = \frac{2gS.h^{\frac{2s}{b}}\,dx}{h^{\frac{2s}{b}}} - aa$.



Si in his æquationibus ponatur $a = 0$, definietur motus corporis in lineâ qualibet curvâ deſcendentis & aſcendentis in medio uniformi, cujus reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis eſt. Cæterum totam hanc materiam copioſiſſimè & accuratiſſimè tractavit Clariſſ. *Eulerus* Tom. 2. Mechan. 188.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXII. Theor. XXVI.

SECTIO VII.

De motu fluidorum & resistentiâ projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri. (r).

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: putà si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes à particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occur-

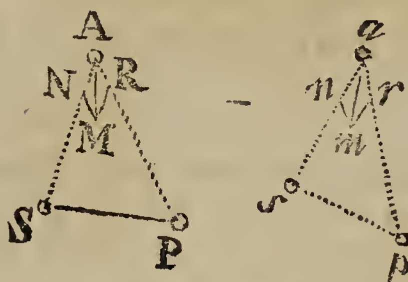
(r) * *Similiter moveri.* Sunto A & a, P & p, S & s, &c. particulæ in duobus systematibus sibi mutuò correspondentes. Particula A in suo systemate tempore T, describat spatium quam minimum A B, & particula correspondens a, in altero systemate tempore t, describat spatium a b, priori A B, simile similiterque situm, ità ut sit A B, ad a b, ut diameter particulæ A, ad diametrum particulæ a, sivè ut A S ad a s, vel P S ad p s, & angulus A S B æqualis angulo a s b, atque S A B æqualis s a b. Et aliæ sibi mutuò correspondentes particulæ quiescant vel simili modo moveantur. His positis, demonstrandum est, quod si sumantur tempora alia quæ sint ut T & t, particulæ correspondentes erunt utrinque similiter positæ.

currant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (s) in lineis rectis per motûs leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, (t) vires totæ quibus particulæ correspondentes

(s) * *In lineis rectis per mot. leg.* 1. Ideóque ob velocitates uniformes & similes motuum directiones pergent similiter moveri temporibus proportionalibus, usque ad occursus suos primos.

(t) * *Vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur similes habebunt determinationes, & erunt ad invicem ut correspondentium particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.*

* Particula *A* inter duas *S* & *P*, & particula *a* inter duas *s* & *p* sint similiter sitæ, & quâcumque celeritate in directione similiter positâ particulæ illæ *A* & *a* ferantur, trahanturque vel fugentur illæ particulæ *A* & *a* à particulis *S* & *P*, *s* & *p* per vires quæ sint ut Diametri particularum correspondentium inversè sive ut lineæ homologæ inversè, & quadrata velocitatum directè, dico 1°. quod directio vis compositæ trahentis particulas *A* & *a* similiter posita erit in utroque systemate, nam anguli S A P & s a p, quos faciunt vires agentes, ex hypothesi æquales sunt, vis autem composita sequetur Diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriusque vis componentis quorum sinus sint reciprocè ut vires agentes, per nat. virium compositarum, sit ea Diagonalis hic A M, illic a m, erit ergo sinus anguli S A M, ad sinum anguli P A M, inversè ut vis particulæ S ad vim particulæ *P* sive directè ut lineæ homologæ S A & P A (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter sinus anguli s a m est ad sinum Anguli p a m ut s a ad p a; sed est S A ad P A sicut s a ad p a ex hypothesi, ergo anguli æquales S A P & s a p in eadem ratione secantur per lineas A M, a m, ideoque anguli S A M & s a m, M A P & m a p sunt æquales, ergo directio vis compositæ trahentis particulas *A* & *a*



in singulo systemate similiter est posita. Q. erat 1um. 188.

2°. Vires illæ compositæ erunt ut particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.

Secetur utcumque in directione AS lineola AN quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque N M, parallela AP, & ex M ducatur M R parallela A S, fiet parallelogrammum A N M R, in quo M R = A N, & angulus A M R = ang. M A N, ideoque A N ad A R ut sinus anguli M A R ad sinum ang. M A N, sive ut P A ad S A, hoc est ut vires particularum *S* & *P*, ideoque A R exprimet vim particulæ *P*, & A M exprimet vim compositam ex viribus *S* & *P*. Sumatur in a s lineola a n, quæ sit ad A N, ut a s ad A S inversè, & ut quadratum velocitatis in *a* ad quadratum velocitatis in *A* directè, ductisque n m & m r parallelis lineis a p, a s erunt a n & a r ut vires particularum s & p, & a m exprimet vim ex iis compositam.

Sed ob similitudinem triangulorum ANM, a n m est AN ad AM sicut a n ad a m, sive vis particulæ *A*, ad vim compositam ex particulis *S* & *P*, ut vis particulæ *a* ad vim compositam ex particulis *s* & *p*, ideoque vicissim, vis particulæ *A* ad vim particulæ *a* ut, vis composita ex vi particularum *S* & *P*, ad vim compositam ex viribus particularum *s* & *p*; Sed vis particulæ *A* est ad vim particulæ *a*, inversè ut

 par-

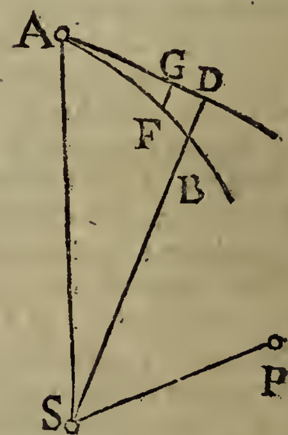
tes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per legum corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. (u). Hæc ita ſe habebunt (*per corol.* 1. *&* 8. *prop.* IV. *lib.* 1.) ſi modò centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam

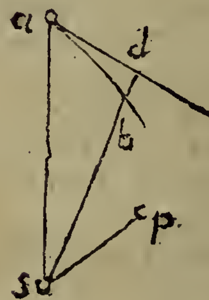
particularum Diametri, & directè ut velocitatum Quadrata ex hypotheſi, ergo vires compoſitæ ſunt in eâdem ratione. Q. E. D.

Idem ratiocinium ad vires compoſitas ex pluribus particulis extendetur. Unde *vires totæ &c.*

(u) * *Hæc itâ ſe habebunt.* (*Per cor.* 1. *&* 8. *prop.* 4. *lib.* 1.) Aut quod idem eſt per hoc Lemma.

189. *Lemma.* Si corpora duo A, a, circà centra immota S, s, projiciantur ſecundùm directiones AD, ad, quæ cum diſtantiis AS & as æquales angulos DAS, das conſtituunt, & urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s reſpicientibus, quæ ſemper ſint inter ſe ut quadrata velocitatum corporum directè & diſtantiæ à centris inversè, corpora illa figuras ſimiles circà centra S & s deſcribent, ſimileſque & proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.





In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ AD, ad diſtantiis AS, as proportionales. Jungantur SD, sd & corpora A, a temporibus quibuſvis T, t deſcribant arcus AB, ab qui lineas SD, sd attingunt. Sumantur arcus AF, ab qui eodem tempuſculo deſcripti ſint, & ductâ FG parallelâ SD, erit (4. *lib.* 1.) FG ad bd ut vis centralis quâ corpus A urgetur ad vim centralem quâ urgetur corpus a; & quia vires illæ (*per hyp.*) ſunt ut quadratum velocitatum directè & diſtantiæ AS, as, inversè, velocitates autem ſunt ut ſpatia quæ ſimul deſcripta fuiſſent in Tangente AG, ad, erit FG ad bd, ut $AG^2 \times as$ ad $ad^2 \times AS$. Sed (*per cor.* 1. *Lem. XI.*) $BD : FG = AD^2 : AG^2$; quarè (per compoſitionem rationum & ex æquo) $Bd : bd = AD^2 \times as : ad^2 \times AS$. Cùm igitur ob triangulorum ASD, asd, ſimilitudinem (*ex hyp.*) ſit $AD : ad = AS : as$ & ideò $AD^2 \times as : ad^2 \times AS = AS : as$, erit $BD : bd = AS : as$, & ob ſimilitudinem

niam (x) ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque (y) ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et similes & similiter positæ systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideo spatia diametris suis proportionalia describere.

PRO-

nem figurarum, ut A D ad a d, ideoque ob æquales angulos D & d, triangula A D B, a d b erunt similia, & propterea arcus A B, a b, similes & similiter siti. Simili modo demonstrabitur quod corpora è locis B & b progressa similes arcus a c similiter positos describant, atque ità deinceps. Describent ergò figuras similes circà centra S & s. His verò demonstratis patet (196. *lib.* 1.) quod describent similes & proportionales figurarum similium partes temporibus proportionalibus, seu quæ semper fiat ut tempora T & t.

(x) * *Ob translationum similitudinem.* Oriuntur enim centrorum illorum translationes ex causis proportionalibus & similiter agentibus, videlicet ex similibus particularum similium & correspondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motûs centra similiter moveri cœperunt, similiter quoque deinceps moveri pergant. 189.

(y) * *Usque ad occursus suos primos &c.* Nam cùm particularum correspondentium distantiæ, post quævis tempora proportionalia, sint semper in datâ diametrorum ratione in duobus systematibus (*ex dem.*), necesse est ut distantiæ temporibus proportionalibus evanescant, & proindè ut particularum occursus primi con-

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur, (z) id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (*per hypothesin*) ut quadrata velocitatum directè & distantiæ particularum correspondentium inversè & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideoque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, (a) & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. *Q. E. D.* (b) Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires

contingant, ubi particulæ illæ figurarum similium partes similes descripserunt. Ex quo sequitur particularum illarum occursus primos similes fore, tum ratione directionum, quod jam demonstratnm est, tum etiam ratione velocitatum & quantitatum motûs. Siquidem spatia percursa temporibus proportionalibus sunt semper in datâ ratione, ideoque velocitates in locis similibus sunt semper in datâ ratione, & indè ob particularum correspondentium similitudinem & datam densitatum rationem, quantitates motûs quæ sunt ut velocitates & densitates & volumina conjunctim, in locis similibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejusmodi motibus atque occursibus similibus nascuntur, similes erunt.

(z) * *Id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ* (per def. 8. lib. 1.)

(a) * *Et quantitates materiæ sint &c.* Quantitates materiæ sunt ut densitates & volumina partium conjunctim (2. *lib.* 1.), & ob partium similitudinem, volumina sunt ut cubi laterum homologorum, seu diametrorum, ideóque quantitates materiæ sunt ut densitates partium & cubi diametrorum.

(b) * *Posterioris generis resistentiæ &c.* Si enim vires reflexionum supponantur æqua-

vires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, & ſpatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi ſyſtemata illa ſint fluida duo elaſtica ad modum aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas, utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis (c) proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox reſiſtentiam patitur, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant,

quales, reſiſtentiæ ſunt ut numeri reflexionum ſeu occurſuum; & ſi numeri reflexionum æquentur, reſiſtentiæ ſunt ut vires reflexionum correſpondentium; undè, cunjunctis his rationibus, reſiſtentiæ quæ ex particularum & partium majorum occurſibus & reflexionibus oriuntur, ſunt ſemper ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, &, cæteris paribus, ſunt inversè ut ſpatia inter particularum & partium correſpondentium occurſus ſeu reflexiones intercepta, id eſt, inversè ut partium correſpondentium diametri, ideóque *numeri reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè* & earumdem diametri inversè. *Et vires reflexionum ſunt ut* motûs quantitates in occurſibus *id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium correſpondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus &c.*

(c) * *Proportionalia deſcribent.* Probatur enim ut in dem. prop. 32. lemmate (189) ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus à corporibus illis ſemper deſcribi. Undè corollarium hoc patet (*per cor.* 1. & 2. *prop.* 32.). 189.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIII. THEOR. XXVII.

tant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, (d) resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; (e) ideoque in medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur media tria *A*, *B*, *C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *T* & *V*, illæ medii *C* ejusmodi viribus omninò destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G* in subduplicatâ ratione virium *T* ad vires *V*: resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G*, (f) in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii *B* in eâdem ratione duplicatâ, (g) accedet medium *B* ad formam & conditionem medii *C* pro lubitu,

(d) * *Resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam si idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido similiter projiciatur, eædem sunt resistentiæ, ac si corpora duo similia & æqualia similiter projicerentur in duobus fluidis priori omnino paribus; sed in hoc casu, ob æquales inter se partium correspondentium diametros & densitates, resistentiæ sunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (*per prop.* 33. *& ejus coroll.* 1.). Ergò &c.

(e) * *Ideòque in medio &c.* In medio cujus partes ab invicem distantes sese viribus quibuscumque in ratione velocitatis duplicatâ crescentibus agitant, resistentia (ex modò dem.) est semper in eâdem ratione duplicatâ; Quarè si vires illæ quibus particulæ sese agitant, supponantur quàm minimæ, manebit semper resistentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evanescant tandem illæ vires, manet resistentia in ratione velocitatis duplicata; sed idem melius patet per secundam partem demonstrationis propositionis hujus 32.

(f) * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonstratis initio coroll. hujus.)

(g) * *Accedet medium B &c.* Si enim velocitates corporum D & F, quam maximè augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A & velocitate corporis E quàm maximè decrescerent, quia est semper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

bitu, & idcirco reſiſtentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cùm reſiſtentiæ corporum *D* & *F* ſint ad invicem ut reſiſtentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ ſimiliter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velociſſimè moventur, reſiſtentiæ ſunt æquales quam proximè: & propterea cùm reſiſtentia corporis *F* ſit in duplicatâ ratione velocitatis, erit reſiſtentia corporis *D* in eâdem ratione quàm proximè.

(h) *Corol.* 3. Corporis in fluido quovis elaſtico velociſſimè moti eadem ferè eſt reſiſtentia ac ſi partes fluidi viribus ſuis centrifugis deſtituerentur, ſeque mutuo non fugerent: ſi modo fluidi vis elaſtica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna ſit ut vires non habeant ſatis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm reſiſtentiæ ſimilium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes diſtantes ſe mutuo non fugiunt, (i) ſint ut quadrata diametrorum; ſunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum reſiſtentiæ in fluido elaſtico ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora ſimilia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejuſdem denſitatis, quorum particulæ ſe mutuo non fugiunt, ſive particulæ illæ ſint plures & minores, ſive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & viciſſim (per motûs legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc eſt, æqualiter reſiſtantur: manifeſ-

(h) * *Corollarium* 3. Patet per cor. 2. in quo vis T quâ particulæ medii A in quo corpus D movetur ſe fugiunt, qualiſcumque ſupponitur; corporum D & F ubi velociſſimè moventur, reſiſtentiis manentibus æqualibus quam proxime, licet medii C in quo corpus F movetur, particulæ viribus centrifugis prorſus deſtituantur. Patet etiam ex eo quod ſupponatur vires non habere ſatis temporis ad agendum, unde caſus redit ad eum in quo vires illæ nullæ ſunt. 189.

(i) * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2am. partem dem. prop. hujus, ob datas corporum velocitates & medii denſitatem datam.

nifestum est etiam quod in ejusdem densitatis fluidis elasticis, ubi velocissimè moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proximè; sive fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex medii subtilitate resistentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in superioribus corollariis.

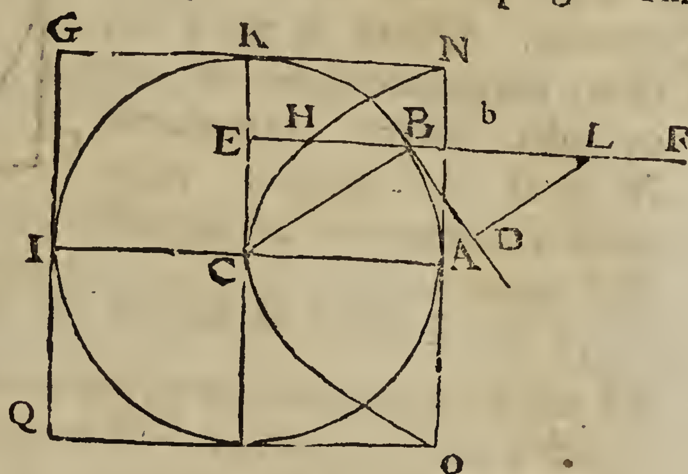
PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri.

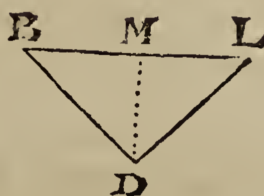
Nam quoniam actio medii in corpus eadem est (per legum corol. 5.) sive corpus in medio quiescente moveatur, sive medii particulæ eâdem cum velocitate ([k]) impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur à medio movente. Designet igitur *ABKI* corpus sphæricum centro *C* semidiametro *CA* descriptum, & incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud sphæricum, secundum rectas ipsi *AC* parallelas: sitque *FB* ejusmodi recta. In eâ capiatur *LB* semidiametro *CB* æqualis, & ducatur *BD* quæ sphæram tangat in *B*. In *KC* &

(k) * *Impingant in corpus quiescens.* Eadem enim est in utroque casu velocitas respectiva, eademque proindè vis percussionis (*per dem. in cor. 5. leg. mot.*) idem quoque manifestum est per motûs Leg. 3. quia fluidum & corpus ob reactionem actioni æqualem & contrariam, in utroque casu in se mutuò agunt.

& *B D* demittantur perpendiculares *B E*, *L D*, & vis quâ particula medii, secundùm rectam *FB* obliquè incidendo, globum ferit in *B*, erit ad vim quâ particula eadem cylindrum *ONGQ* axe *ACI* circa globum descriptum perpendiculariter feriret in *b*, (l) ut *LD* ad *LB* vel *BE* ad *BC*. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam *FB* vel *AC*, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundùm plagam determinationis suæ, id est, secundùm plagam rectæ *BC* quâ globum directè urget (m) ut *BE* ad *BC*. Et (n) conjunjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum secundum rectam *FB* obliquè incidentis, ad movendum eundem secundùm plagam incidentiæ suæ, est ad



(l) * *Ut LD ad LB vel BE ad BC.* Si enim recta data LB exponat vim quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, & vis illa (*per leg. cor.* 2.) resolvatur in vires BD, LD, vis BD juxtà directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum & recta LD vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius CB, tangenti perpendicularis est, & ideo (*per constr.*) DL parallela CB, triangula rectangula CEB, BDL, similia sunt, imo ob BL = CB (*per constr.*) æqualia; Est igitur LD ad LB ut BE ad BC.



(m) 190. * *Ut BE ad BC.* Vis LD ductâ ex puncto D ad LB perpendiculari DM, iterum resolvatur in vires LM & MD, & ob triangulorum LMD LDB, similitudinem, erit vis LM ad vim LD, ut LD ad LB, seu ut BE ad BC; nulla verò ratio habenda est vis MD, cujus directio perpendicularis est ad axem AI, quia simili constructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto sphæræ quod puncto B directè oppositum est, vis MD, vi æquali & directè oppositâ elidi- 190.
tur. Unde sola consideranda est vis LM, quæ secundùm directionem axi AI parallelam agit. Est autem vis LM ad vim LB quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut LD^2 ad LB^2, ob continuè proportionales LM, LD, LB.

(n) * *Conjunctis rationibus.* Et ex æquo.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare si in *bE*, quæ perpendicularis est ad cylindri basem circularem *NAO* & æqualis radio *AC*, sumatur *bH* æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit *bH* ad *bE* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. (°) Et propterea solidum quod à rectis omnibus *bH* occupatur erit ad solidum quod à rectis omnibus *bE* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. (p) Sed solidum prius est parabolois vertice *C*, axe *CA* & latere recto *CA* descriptum, & solidum posterius est cylindrus para-

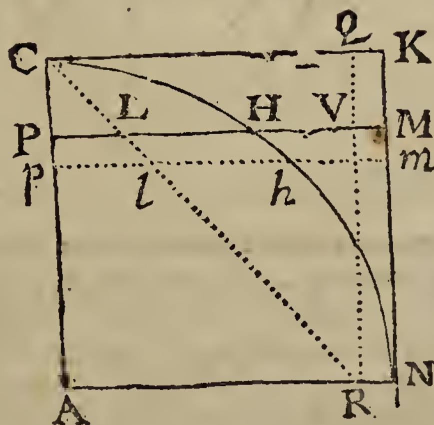
(o) * *Et propterea solidum.* Si in omnibus rectæ N A punctis erigantur perpendicula ut b H & b E, sitque N H C curva quam punctum H perpetuò tangit, & recta K C locus omnium punctorum E; solidum quod perpendiculis omnibus b H, per totam basim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi seu figuræ solidæ quæ ex rotatione figuræ planæ N H C A circà axem C A factâ generatur, & solidum quod à rectis omnibus b E occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli A K circà eundem axem C A factâ descriptus.

(p) * *Sed solidum prius.* Cùm (*per constr.*) sit b H $= \frac{BE^2}{CB}$ ideoque b H $\times$ C B $= \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$ & (ex naturâ circuli) B C = C A = K C, ideoque B E^2 = K C^2 − C E^2 & b H $\times$ C B, seu $\overline{KC - EH} \times KC$, seu K C^2 − K C $\times$ E H = K C^2 − C E^2, ideoque K C $\times$ E H = C E^2; sed si ex puncto H duceretur ad C A, ordinata perpendicularis, hæc esset æqualis C E, & abscinderet à C A, partem æqualem E H. Quarè rectangulum sub abscissâ & datâ lineâ K C sive C A, æquale est quadrato ordinatæ ad C A perpendicularis; unde curva C H N, (*per theor.* 1. *de Parab.*) est Parabola cujus vertex C, axis C A, & latus rectum C A.

paraboloidi circumscriptus, & notum est (†) quod parabolois sit semissis cylindri circumscripti. Ergo vis tota medii in globum est duplo minor quam ejusdem vis tota in cylindrum. Et propterea si particulæ medii quiescerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

(q) Eâdem methodo figuræ illæ inter se quoad resistentiam comparari possunt, eæque inveniri quæ ad motus suos in mediis resistentibus continuandos aptiores sunt. Ut si base circulari



(†)* *Et notum est quod &c.*

191. *Lemma.* Parabolois seu solidum ex rotatione Parabolæ C H N, circà axem C A genitum est semissis cylindri circumscripti, qui producitur ex rotatione rectanguli A K circà latus C A. Per punctum mobile P, erigatur ad axem C A normalis P M, parabolam secans in H, & rectam K N in M; & in rotatione figuræ totius circà axem C A, lineæ P H & P M circulos describent, qui erunt inter se ut radiorum P H, P M quadrata, seu (*ex naturâ Parabolæ*) & ob P M = A N, ut abscissæ C P, C A. Ducatur jam punctum P cum verticali P H M per totam altitudinem C A, & solidum ex rotatione figuræ C H N genitum erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K N A ortum, ut summa omnium circulorum quos recta mobilis P H rotando describit, ad summam omnium circulorum quos describit recta P M, hoc est, ut summa omnium C P, ad summam omnium C A. In lineâ A N; capiatur A R æqualis A C, jungatur C R secans P H in L, & erigatur ad A R, perpendicularis R Q, secans P M in V; cum sit semper P L = C P, & P V = C A, summa omnium C P, seu P L, per totam altitudinem C A, est triangulum isoscele C R A, & summa omnium C A, seu P V, per eandem altitudinem C A, est quadratum C A R Q; cum igitur triangulum C R A, sit semissis quadrati C A R Q, Parabolois est etiam semissis cylindri circumscripti. Q. E. D. 191.

(q) 192. *Eâdem methodo &c.* Solidum

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXIV. Theor. XXVIII.

lari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *OC* deſcribitur, & altitudine *OD*, conſtruendum ſit fruſtum coni *CBGF*, quod omnium eâdem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundùm plagam axis ſui verſus *D* progredientium fruſtorum minimè reſiſtatur:

dum ex rotatione curvæ cujuſvis K B A, circà rectam A I poſitione datam genitum in medio reſiſtente moveatur ſecundùm directionem rectæ I A, & oporteat reſiſtentiam quam patitur conferre cum reſiſtentiâ cylindri ſecundùm eandem directionem moti & cujus baſis eſt circulus radio K C ad A C normali deſcriptus. Diametro C I ad arbitrium aſſumptâ deſcribatur ſemicirculus C S I, agatur per punctum I chorda I S, parallela B D curvam tangenti in puncto quovis B; ducatur per B recta B V parallela A I, & per S recta S H parallela C K, ambæ concurrentes in H, ſitque Q H E curva quam punctum H perpetuò tangit; & completo rectangulo CKGI, reſiſtentia ſolidi rotundi per converſionem curvæ K B A circà C A geniti erit ad reſiſtentiam baſis ipſius, ſeu circuli centro C & radio C K deſcripti, ut ſolidum ex rotatione figuræ K Q H E circà C I genitum, ad cylindrum rotatione rectanguli C K G I circà eandem C I factâ deſcriptum. Producatur enim H B ad L, ut ſit B L = C I; ex puncto L demittatur ad B D perpendicularis L D, & ex D ad B L perpendicularis D M; & eodem modo quo ſuprà (190) patet efficaciam particulæ medii ad movendum ſolidum totum K B A ſecundùm plagam incidentiæ ſuæ L B eſſe ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in baſim circularem K C, perpendiculariter in P ad cylindrum qui rotatione rectanguli C K G I deſcribitur movendum in plagam eandem, ut eſt LD^2 ad LB^2, ſeu etiam ut eſt L M ad L B; ſed (per conſtr.) C I = L B, & ob angulum S I C = D B L & angulum I S C = B D I, eſt etiam C T ſeu P H = L M; Quarè ſolidum quod à rectis omnibus P H, occupatur,

patur, erit ad solidum quod à rectis omnibus P V = C I, occupatur, aut quod idem est, solidum ex rotatione figuræ C K Q H E circà C I, erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I genitum, ut resistentia solidi quod figura C K B A circà C A, rotata describit, ad resistentiam baseos circularis quam describit recta C K quæ eadem est cum resistentiâ cylindri cujuslibet ejusdem basis, quia superficies cylindri quam recta K G rotando circà A I describit, nullam resistentiam patitur, secundùm directionem motûs ipsi K G parallelam. Q. E. D.

193. Ex constructione liquet, si recta quæ curvam K B A tangit in A sit ad axem C A normalis, punctum E coincidere cum puncto I, & si recta tangens curvam K B A, in K perpendicularis sit ad K C, punctum Q in quo curva E H secat latus K G coincidere cum puncto K.

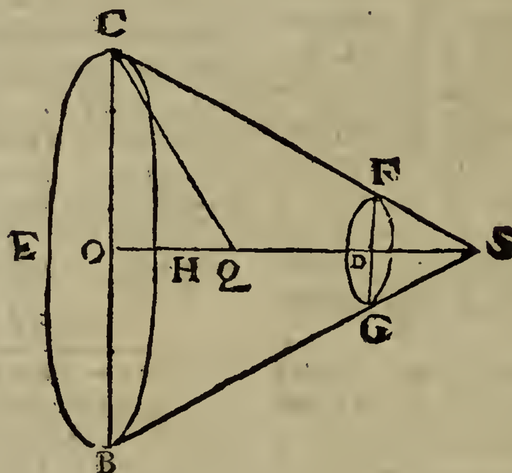
194. Ex puncto B demittatur ad C A perpendicularis B R, dicaturque C I $= a$, A R $= x$, B R $=$ H T $=$ C P $= y$, H P $=$ C T $= z$, B M $= dx$, N n perpendicularis ad B L curvæque occurrens in n $= dy$, ac proindè B n$^2 = dx^2 + dy^2$. Et quoniam triangula B n N, I C S, similia sunt (*per constr.*) erit B n^2 : N n^2 = C I^2 : C S^2 = C I : C T, hoc est, $dx^2 + dy^2 : dy^2 = a$ z. Et propterea $a dy^2 = z dx^2 + z dy^2$, formula per quam ex datâ æquatione ad curvam K B A, inveniri potest æquatio ad curvam alteram E H Q & contrà; nam quoniam C P $= y$, si loco dx eruatur ex æquatione curvæ K B A ejus valor in y & dy habebitur æquatio quæ continebit z, y & dy sive C P, P H & fluxionem P C, cum constantibus.

195. Ducta sit ordinata p h alteri P H infinitè propinqua, & si radius sit ad peripheriam circuli ut unitas ad numerum p, erit py peripheria circuli quem linea P C circà axem C I, rotando describit, ideòque annulus cylindricus quem arcus P H h p in eâdem convolutione describit, erit $pzy\,dy$, & inde solidum ex rotatione figuræ C P H E, genitum, erit S. $pzy\,dy$, fluente hâc ità sumptâ ut factâ $y = 0$ ea evanescat. Quare cùm cylindrus convolutione rectanguli C P V I, descriptus sit $\frac{1}{2} payy$, resistentia solidi ex revolutione figuræ A B R geniti, erit ad resistentiam baseos ipsius circuli radio B R descripti ut S. $pzy\,dy$ ad $\frac{1}{2}payy$, seu ut S. $zy\,dy$ ad $\frac{1}{2}ayy$.

196. Sit K B A ellipsis vel hyperbola cujus vertex A axis principalis A I. Sit semiaxis principalis $= b$, semilatus rectum $= c$, A R $= x$, R B $= y$, & erit $byy = 2bcx - cxx$ æquatio ad ellipsim; & $byy = 2bcx + cxx$, æquatio ad hyperbolam. Prioris æquationis fluxio $by\,dy = bc\,dx - cx\,dx$, ex quâ habetur $dx^2 = \frac{b^2y^2dy^2}{(bc-cx)^2}$
$= \frac{by^2dy^2}{b^2cc - 2bccx + ccxx} = \frac{by^2dy^2}{bcc - cyy}$. 196.
Hinc æquatio (194) $ady^2 = zdx^2 + zdy^2$, in hanc abit * $ady^2 = \frac{zby^2dy^2}{-cy^2 + bcc} + zdy^2$ sive dividendo per dy^2 & ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $-acy^2 + abcc = by^2z - cy^2z + bccz$ ergo est $z = \frac{-acy^2 + abcc}{\overline{b-c} \times y^2 + bcc}$ & factâ divisione $z = \frac{-ac}{b-c} + \frac{ab^2c^2}{(b-c) \times (\overline{b-c} \times y^2 + bcc)}$ unde erit $zydy = \frac{-acydy}{b-c} + \frac{ab^2c^2ydy}{(b-c) \times (\overline{b-c} \times y^2 + bcc)}$ sumptisque fluentibus est S. $zydy =$
$\frac{-acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c2}{2(b-c)^2} L. \overline{b-c \times y^2 + bcc} + Q\,const.$ (ut patebit si hujus quantitatis fluxio sumatur): Facta autem $y = 0$ erit $0 = \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2} L.\ bcc + Q\,const.$ ideoque $Q.\ const. = -\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2} L.bcc$, unde tandem habetur $S.\ zydy = -\frac{acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ $(L.\overline{b-c \times y^2 + bcc} - L.\ bcc)$ sive S. $zydy$ $= -\frac{acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2} L. \frac{\overline{b-c} \times y^2 + bcc}{bcc}$,
Est ergo resistentia conoidis Elliptici A B R ad resistentiam suæ baseos, seu circuli radio B R descripti ut $-\frac{cy^2}{2(b-c)} + \frac{b^2c^2}{2(b-c)z}$ L. $\frac{b - c \times y^2 + bcc}{bcc}$ ad yy. Pro conoide

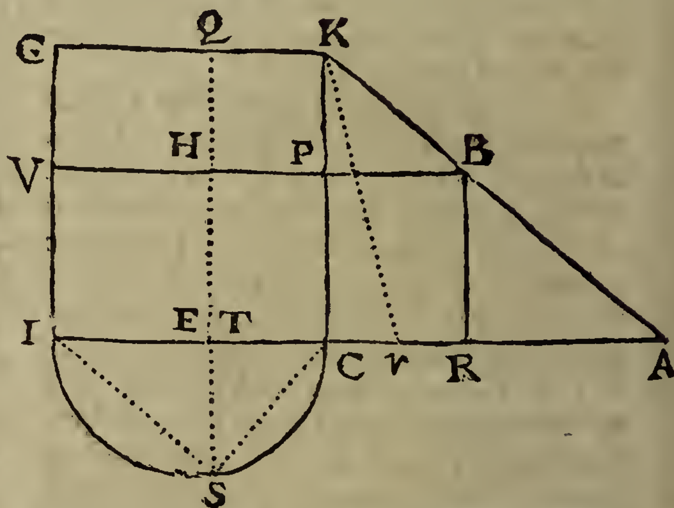
Hy-

(r) biseca altitudinem *O D* in *Q* & produc *O Q* ad S ut sit *Q S* æqualis *Q C*, & erit S vertex coni cujus frustum quæritur.



Hyperbolico, invenietur $a\,dy^2 = \frac{zby^2dy^2}{cy^2+bcc} + z\,dy^2$ unde eodem iterato calculo prodibit ratio ejus resistentiæ ad resistentiam baseos ut $+\frac{cy^2}{2(b+c)} + \frac{b^2c^2}{2(b+c)^2} \times L.\frac{\overline{b+c}\times y^2+bcc}{bcc}\, ad\,y^2$. Pro conoide Parabolico, fiat in formulâ resistentiæ Conoidis Elliptici axis *b* Infinitus, cæterisque terminis in quibus *b* non occurrit deletis, erit Conoidis Parabolici resistentia ad resistentiam suæ Baseos ut $\frac{b^2c^2}{2b^2} \times L.\frac{by^2+bcc}{bcc}\, ad\,y^2$, sive ut $c^2 L.\frac{y^2+cc}{cc}$.

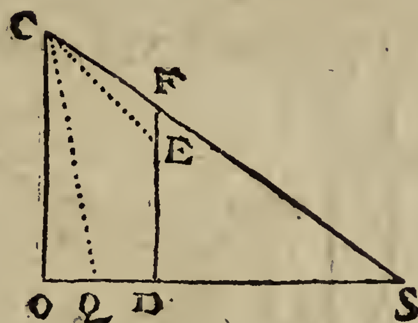
197. Sit K B A linea recta, & quia chorda I S parallela est rectæ K A, (192) punctum H est semper in lineâ rectâ T H Q, ideóque resistentia coni revolutione trianguli K A C circà A C geniti erit ad resistentiam circuli radio C K descripti, ut cylindrus ex rotatione rectanguli C K Q L ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI circà C I, id est, ob communem utriusque cylindri basim, ut altitudo C T ad altitudinem C I; & est C T ad C I, in ratione duplicatâ C S ad C I vel K C ad K A, seu in ratione duplicatâ sinûs anguli K A C ad sinum totum. Simili modo resistentia coni quem recta B A rotata describit est ad resistentiam circuli radio B R descripti in eâdem ratione duplica-



tâ K C ad K A; & (dividendo) resistentia annuli conici quem recta K B, circà C A rotata, describit est ad resistentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione describit recta K P in eâdem duplicatâ ratione K C ad K A. Resistentia verò coni truncati convolutione figuræ K B R circà C R, geniti, est ad resistentiam baseos ipsius sive circuli radio C K, descripti ut solidum quod figura CKQHVI, circà C I rotando describit, ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I ortum. Est autem solidum prius summa duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum C K Q T & T H V I circa C I productorum, hoc est, (ob areas circulorum radiorum quadratis proportionales) ut summa $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$.

(r) 198.* *Biseca altitudinem &c.* Datis C K & C R invenienda sit positio rectæ K B ut

(f) Unde obiter, cùm angulus CSB semper sit acutus, con-



ut resistentia frusti conici quod per revolutionem figuræ KBR circà CA producitur sit omnium minima. Resistentia illa est ut $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$; sed $KA^2 : CK^2 = CI : CT = \frac{CK \times CI}{KA^2}$; & similiter $KA^2 : CA^2 = CI : TI = \frac{CA^2 \times CI}{KA^2}$. Quarè ob datam CI, resistentia coni truncati erit ut $\frac{CK^4 + CP^2 \times CA^2}{KA^2}$. Dicantur $KC = b$, $CR = 2c$, $CA = x$, ideóque $KA^2 = bb + xx$, & quia $CA(x) : KC(b) = RA(x - 2c) : BR$, seu CP, erit $CP = \frac{bx - 2cb}{x}$, & indè resistentia coni truncati erit ut $\frac{b^4 + (bx - 2cb)^2}{bb + xx} = \frac{b^4 + b^2x^2 - 4b^2cx + 4c^2b^2}{bb + xx} = bb + \frac{4bbcc - 4bbcx}{bb + xx}$. Capiatur hujus quantitatis fluxio & (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $-\frac{4bbcdx}{bb+xx} - 2xdx\frac{(4bbcc - 4bbcx)}{(bb+xx)^2} = 0$, sive $\frac{1}{bb+xx} - \frac{2cx - 2xx}{(bb+xx)^2} = 0$, ideóque $-bb - xx - 2cx + 2xx = 0$, undè habetur $xx - 2cx = bb$, & indè eruitur $x = c + \sqrt{bb + cc}$. Biseca igitur altitudinem CR in r, ut sit $Cr = c$, & juncta $Kr = \sqrt{bb + cc}$, erit x, seu $CA = Cr + Kr$, sicut NEWTONUS in constructione posuit.

(f) 199. * *Undè obiter.* Angulus externus (*vid. fig. textûs*) æqualis est summæ angulorum æqualium QCS & QSC, id est, angulo CSB; & quia COQ rectus est, angulus CQO ideoque & æqualis CSB, est semper acutus. Altitudo OD quamminima evadat tandemque evanescat; & quoniam (*in hâc hypoth.*) rectæ OC, OS, QS, CQ æquales fiunt, angulus CSO, & æqualis DFS fit semirectus, ejusque complementum ad duos rectos DFC grad. 135. Ducatur ad FD recta quælibet CE & evanescente OD resistentia coni truncati quem figura CFD circà OS rotata describit, erit in suo genere minima (198), ideóque minor quam resistentia coni truncati ex revolutione figuræ CED circà OS geniti; subducatur utrinquè resistentia circuli quem recta DE rotando describit; & resistentia superficiei ex rotatione figuræ CFE circà OS, minor erit quam resistentia annuli conici quem in eâdem revolutione describit recta CE. 198

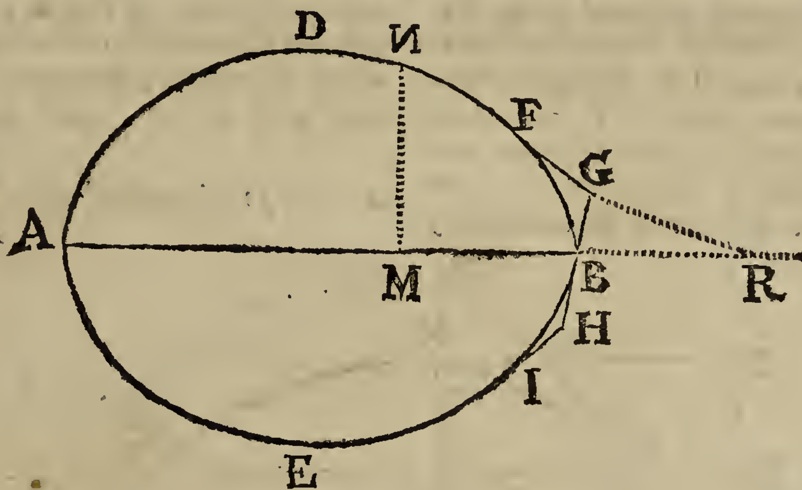
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect: VII. Prop. XXXIV. Theor. XXVIII.

(t) consequens est, quod si solidum $ADBE$, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis $ADBE$ circa axem AB factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus FG, GH, HI in punctis F, B & I, eâ lege ut GH sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B, & FG, HI cum eâdem GH contineant angulos FGB, BHI graduum 135, solidum, quod convolutione

F
H
G
N
A
E
p P
B
S

(t) 200. *Consequens est.* Ut hæc consequentia pateat, demonstrandum est resistentiam superficiei quæ per rotationem figuræ F G B circà axem A B gignitur, minorem esse resistentiâ superficiei quam in eâdem revolutione arcus F B, describit. Ductis itaquè ad curvam ordinatis verticalibus & infinitè propinquis P N, p n, & ex puncto n ad P N productam rectâ n m, parallelâ F G, atquè ex m & N in p n perpendicularibus m q, N r; dicantur F E ad axem A B normalis $= b$, G B $= c$, B P $= x$, P N $= y$, & quia productâ F G ut axi occurrat in s, est ob angulos E F S, B G S semirectos (*per hyp.*) E S $=$ F E $= b$, & B S $=$ G B $=$ c, erit E B $= b - c$. Est quoquè P p $=$ m q $=$ q n $= dx$, r n $= dy$, & hinc q r $= dy - dx$, ac proindè P m $= y + dy - dx$, & p n $= y + dy$. Vis particulæ fluidi in G B perpendiculariter incidentis sit $= a$, & radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his positis, resistentia circuli radio P N descripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2}payy$; resistentia circuli radio P m descripti per $\frac{1}{2}pa(y + dy - dx)^2 = \frac{1}{2}payy + paydy - paydx$, neglectis scilicet terminis qui respectu $paydy$ & $paydx$, evanescunt. Hinc resistentia annuli circularis quem recta N m, rotando describit, exponetur per differentiam $paydy - paydx$. Resistentia circuli radio p n descripti erit ut $\frac{1}{2}pa(y + dy)^2 = \frac{1}{2}payy + paydy$, ex quâ si auferatur resistentia circuli radio P m descripti, remanebit resistentia annuli circularis ex rotatione rectæ q n geniti $= paydx$ & cum sit (197), n m^2 ad n q^2, seu F S^2 ad F E^2, sive 2 ad 1, ut illius annuli resistentia ad resistentiam superficiei ex revolutione rectæ n m genitæ, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{2}paydx$. Quare resistentia superficiei quam figura n m N circà E B rotata describit, exponatur per quantitatem $paydy - \frac{1}{2}paydx$, &, sumptis fluentibus, harum resistentiarum summa per totum arcum B N exponetur per $\frac{1}{2}payy - \frac{1}{2}pa \times$ B N P aream, cui nihil addendum est nec subducendum; cum factâ $y = 0$, hæc fluens evanescat, ut oportet. Si verò loco y scribatur b, seu F E, resistentia om-

tione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus refiſtitur quam ſolidum prius, ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur, & utriuſque termi-



nus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

omnium ſuperficierum quæ ex rotatione figurarum n m N, per totum arcum F B, deſcriptarum generarentur, erit ut $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pa \times$ BNFE aream.

Porrò reſiſtentia circuli radio G B deſcripti exponenda eſt per $\frac{1}{2}pacc$, & reſiſtentia circuli radio F E deſcripti per $\frac{1}{2}pabb$; ideóque ductâ G H ad F E normali, reſiſtentia annuli circularis ex rotatione rectæ F H, per $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pacc$; undè cum ſit FS^2 ad FE^2, ſeu 2 ad 1 ut annuli illius reſiſtentia ad reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione rectæ F G, hæc reſiſtentia erit ut $\frac{1}{4}pabb - \frac{1}{4}pacc$, totaque proindè reſiſtentia coni truncati ex rotatione figuræ F G B geniti exponetur per $\frac{1}{4}pabb + \frac{1}{4}pacc$. Quarè reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F diſtributæ rotando deſcribunt, eſt ad reſiſtentiam fruſti conici ex revolutione figuræ F G B orti ut $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pa \times$ BNFE, ad $\frac{1}{4}pabb + \frac{1}{4}pacc$; ſive dividendo per $\frac{1}{4}pa$, ut $2bb - 2$ BNFE ad $bb + cc$. Si area BNFE æqualis eſſet trapezio BGFE, cùm hoc ſit $= \frac{1}{2}$ EB $\times \overline{FE + BG} = \frac{bb - cc}{2}$, foret $2bb - 2$ BNFE $= bb + cc$; 200.
ideóque prædictæ reſiſtentiæ duæ æquales eſſent; ſed trapezium B G F E majus eſt areâ B N F E, quæ (per hyp.) tota in trapezio continetur, & propterea quantitas $2bb - 2$ BNFE, major eſt quantitate $bb + cc$; reſiſtentia igitur omnium ſuperficierum ex rotatione figurarum n m M, ſuperat reſiſtentiam coni truncati ex revolutione figuræ F G B producti. Verùm (199) reſiſtentia ſuperficiei quam figura n m N circà E B rotando deſcribit, minor eſt reſiſtentiâ ſuperficiei quam in eadem rotatione deſcribit n N; ideòque reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F diſtributæ rotando deſcribunt, minor eſt reſiſtentiâ totius ſuperficiei ex rotatione arcûs B N F genitæ. Ergò reſiſtentia coni truncati per rotationem figuræ F G B deſcripti minor quoque eſt quam reſiſtentia ſuperficiei ex rotatione arcûs B N F productæ. Q. E. D.

201. Quæcumque igitur ſit figura (in textu) A N B, regularis vel irregularis, modò

modò arcus F B concavitatem axi A B obvertat, & totus intrà lineas F G, B G contineatur, per hanc NEWTONI propositionem inveniri semper potest alia figura majoris capacitatis & minoris resistentiæ;. Quod in construendis navibus usum habere potest. Resistentia adhuc minuitur si loco circuli radio G B descripti adjungatur conus quem recta G R, ad axem productum utcumque ducta rotando describit. In omnibus autem curvis, quæ æquatione inter abscissas x & ordinatas y definiuntur, facillimè invenitur punctum B per quod ducta tangens angulum semirectum cum ordinatâ perpendiculari constituit. Quia in illo puncto B, ordinatæ fluxio dy æqualis est fluxioni abscissæ dx ut si æquatio ad curvam sit $a^2 x = y^3$, & sumptis fluxionibus $a^2 dx = 3y^2 dy$, ponendo $dx = dy$, habetur $a^2 = 3y^2$, & hinc $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, undè per æquationem

$a^2 x = y^3$, invenitur $x = \frac{1}{3} a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

PROBLEMA.

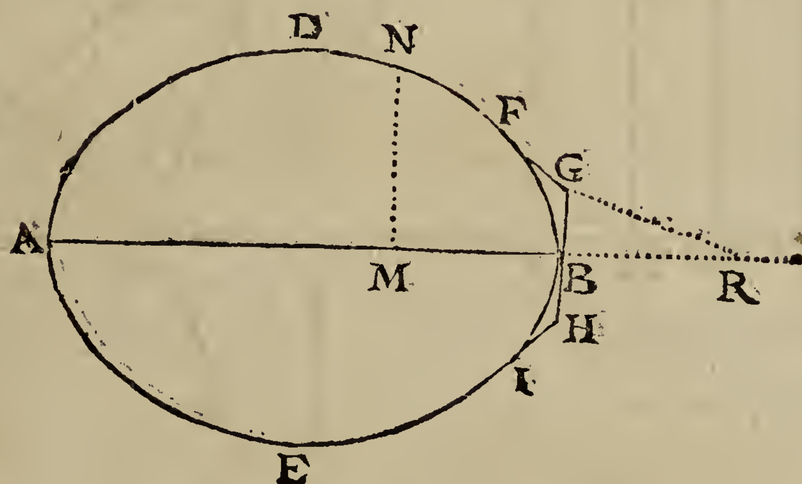
202. Datâ curvâ K B A quam recta Q A ad axem C A perpendicularis tangit in A, invenire punctum B per quod si ducatur tangens altera B Q priori Q A occurrens in Q, resistentia solidi per convolutionem figuræ K B Q A, circà axem C A descripti sit in suo genere minima.

Eâdem constructione quâ suprà (192) factâ; ex puncto Q ducatur ad H T perpendicularis Q N secans K C in M dicanturque $CI = a$, $AR = x$, BR seu $PC = y$, PH seu $TC = z$, $QA = v$, & peripheria circuli radio 1 descripti $= p$. His positis resistentia solidi ex revolutione arcûs B A circà axem C A geniti exponi potest per $S.pzydy$, (195); resistentia verò coni truncati ex rotatione figuræ B Q A circà C A, per $\frac{1}{2}pavv + \frac{1}{2}pyyz - \frac{1}{2}pvvz$ Sit R resistentia data solidi ex rotatione arcûs totius K B A geniti, & resistentia superficiei quam in eâdem rotatione describit arcus K B, erit $R - S.pzydy$, ideòque resistentia solidi per rotationem figuræ K B Q A, erit $R - S.pzydy + \frac{1}{2}pavv + \frac{1}{2}pyyz - \frac{1}{2}pvvz$. Hujus quantitatis fluxio nihilo æqualis fiat (40) & ob datam R, habebitur $-pzydy + pavdv + pzydy + \frac{1}{2}pyydz - pzvdv - \frac{1}{2}pvvdz = 0$; undè invenitur $(z-a)2vdv = (yy-vv)dz$. Cùm igitur sit etiam (194) $ady^2 = zdx^2 + zdy$, ex his æquationibus & ex æquatione ad curvam K B A, invenientur valores litterarum x, y, v; seu R A, R B, & A Q. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit K B A parabola, cujus vertex A, axis A C, latus rectum $= 4c$, & ideò $4cx = yy$, erit $AQ = v = \frac{1}{2}y$, ex naturâ Tangentis Parabolæ, $\frac{1}{4}yy = cx = vv$, $cdx = 2vdv$, $yy - vv = 3cx$. $ydy = 2cdx$, $dy^2 = \frac{cdx^2}{x}$. Undè æquatio

(u) Quòd si figura $DNFG$, ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4\, BR \times GBq.$; solidum

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.



quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ describitur, in medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eâdem longitudine & latitudine descriptum solidum circulare.

tio $a\,dy^2 = z\,dx^2 + z\,dy^2$, in hanc mutatur $\frac{ac\,dx^2}{x} = z\,dx^2 + \frac{cz\,dx^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{ac}{c+x}$, & $dz = \frac{-ac\,dx}{(c+x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatio $(z-a)\,2v\,dv = (yy - vv)\,dz$, in hanc migrat $-\frac{acx\,dx}{c+x} = -\frac{3\,accx\,dx}{(c+x)^2}$, sive $1 = \frac{3c}{c+x}$ ex quâ

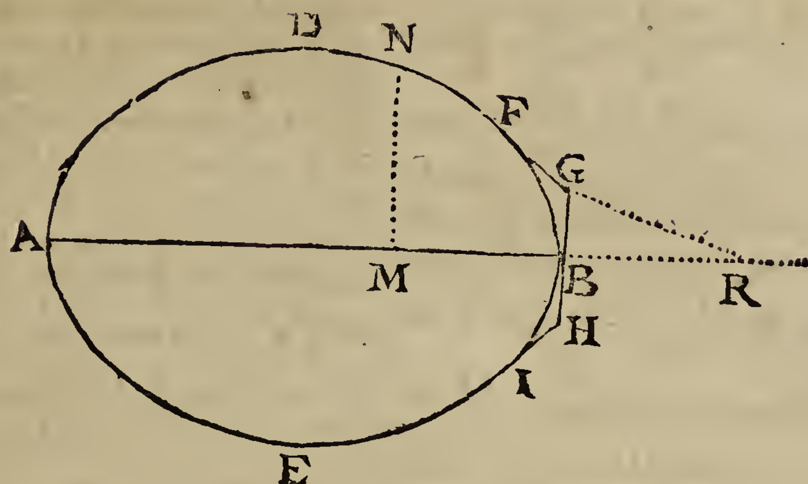
eruitur $x = 2c$; & hinc $y = 2c\sqrt{2}$; & $z = \frac{1}{3}a$. Quarè cùm sit a ad z, in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum anguli B Q M, erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut sinus totus ad sinum anguli B Q M, qui proindè est 35°. 16′, angulus Q B R, 54°. 44′ & angulus B Q A 125°. 46′. 202

(u) 203. *Quòd si figura &c.* Invenienda

 fit

ſit curva L D, quæ circà axem C B rotata deſcribat ſuperficiem ſolidi quod in fluido motum ſecundùm axis directionem à C verſus B, minorem patiatur reſiſtentiam quàm ſolidum quodvis aliud per puncta L & D pari ratione deſcriptum & ſimiliter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q & ad n m, Q P, perpendicula N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius eſt unitas, & data a vim exponat quâ ſingulæ fluidi particulæ in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His poſitis reſiſtentia annuli circularis quem recta n r, circà axem C B rotata deſcribit, exponi poteſt, ut ſuprà, per $\frac{1}{2}pa(nm^2 - NM)^2$ ſeu per $pa\ \overline{NM \times nr}$, ob $nm^2 - NM^2 = \overline{nm \times NM} \times \overline{nm - NM} = 2MN \times nr$. Et quia nN^2 eſt ad nr^2 ut reſiſtentia illa ad reſiſtentiam ſuperficiei quam linea n N circà C B rotata deſcribit (196) hæc reſiſtentia erit ut $\frac{pa \times MN \times nr^3}{nN^2}$; eodemque modo patet reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi poſſe per $\frac{pa \times mn \times QS^3}{Qn^2}$. Fingatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam & Q S, n r tanquam magnitudine datas aſſumi, variantibus N r, & n s, dicanturque conſtantes $MN = b$, $mn = c$, $nr = f$, $Qs = g$ & variabiles $Nn = v$, $nQ = z$, $Nr = m$, $ns = n$, & reſiſtentia ſuperficiei quam arculus Q n N circà C B rotando deſcribit, exponetur per $\frac{pabf^3}{vv} + \frac{pacg^3}{zz}$, ſi curva Q n N ſit ea quæ minimam reſiſtentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 & per hyp.) nihilo æquanda eſt, & indè habetur $-\frac{2pabf^3vdv}{v^4} - \frac{2pacg^3zdz}{z^4} = 0$. Productâ ergo lineâ s n, uſque ad novum punctum h, ad quod ducuntur lineæ N h, Q h, in has cadant perpendicula n e, n t, & evaneſcente n h, erit $th = dz$ & $eh = -dv$. Quia verò, evaneſcente n h triangula n e h, n r N, & n t h, Q s n, ſimilia ſunt; erit N n (v) : N r (m) = n h : e h ($-dv$),

&



& $sn(nv) : Qn(z) = th(dz) : nh$; ideòque ex æquo, $nv : mz = dz : -dv = \frac{mz\,dz}{nv}$. Loco $-dv$, ſcribatur hic ipſius valor in æquatione modò inventâ, & illa in hanc migrabit $\frac{2pabf^3mzvdz}{nv^5} = \frac{2pacg^3zdz}{z^4}$, & hinc fit $\frac{2pabf^3m}{v^4} = \frac{2pacg^3n}{z^4}$ ſeu $\frac{2pa \times MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{2pa \times mn \times Qs^3 \times ns}{Qn^4}$. Undè manifeſtum eſt quantitatem $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$ pro quolibet curvæ punčto N, datam ſeu conſtantem eſſe.

* Quæ quidem curva D N F G (*vide figuram textus*) talis eſſe debet, ut angulus quem facit in G cum lineâ B G ſit ſemirecti complementum per notam 200. illic ergo linea B G data, eſt ipſa ordinata M N & Triangulum nRN eſt Rectangulum æquicrurum, ideoque $Nr = nr$ & $Nn^2 = 2nr^2$ ergo quantitas conſtans $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$ in hanc abit $\frac{GB \times nr^4}{4nr^4} = \frac{GB}{4}$. Talis ergo eſt hujus curvæ natura ut quovis in punčto ducatur ordinata M N ſit ſemper $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{GB}{4}$, ſive ponendo pro MN, y; pro nr, dy; pro Nr, dx; pro Nn^2, $dx^2 + dy^2$, erit $\frac{ydy^3dx}{dx^2+dy^2} = \frac{GB}{4}$: ſive adhibendo conſtrnctionem 203. Newtoni, ſi ducatur G R Tangenti Parrallela, ob triangula G B R, nrN ubique ſimilia, erit $\frac{GB}{GR} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ & $\frac{BR}{GR} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ideoque $\frac{GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{dy^3dx}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{MN \times GB^3 \times BR}{GR4} = \frac{GB}{4}$ ſive $MN \times GB^2 \times 4BR = GR4$ unde eſt $MN : GR = GR^3 : GB^2 \times 4BR$. Q. E. D.

Dicatur $GB = a$, fiet $\frac{y^3dy^3dx}{(dx^2+dy)^2} = \frac{a}{4}$ ideoque « $4ydxdy^3 = a(dx^2+dy)^2$, ex quâ curvæ L N D per Logarithmicam conſtructio eruitur. Ponatur $dx = \frac{zdy}{a}$, & hoc valore loco dx in æquatione ad curvam ſubſtituto, habetur $\frac{4yzdy^4}{a} = \frac{a(zz+aa)^2dy^4}{a^4}$, undè invenitur $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z} = \frac{z^3}{4aa} + \frac{1}{2}z + \frac{aa}{4z}$, & (ſumptis fluxionibus) $dy = \frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz}$; loco dy ſcribatur hic ipſius valor in æquatione aſſumptâ $dx = \frac{zdy}{a}$, &

fit

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

fit $dx = \frac{3z^3dz}{4a^3} + \frac{zdz}{2a} - \frac{adz}{4z}$, sumptisque fluentibus $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{1}{4}aL.z + Q$ *const.* Porrò si assumatur abscissæ initium in loco B, ubi ordinata B L est omnium minima, id est (40) ubi $dy = 0$ quo supposito, fit $\frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = 0$, ideoque $3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2}$ & $z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 = \frac{1}{3}a^4$ undè habetur $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ (& $y = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$), substituto hoc valore loco z, in æquatione quæ dat abscissæ x valorem, habebitur ex Hypothesi initium axeos eritque $x = 0 = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}} + Q.$*const.* & ideo $Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

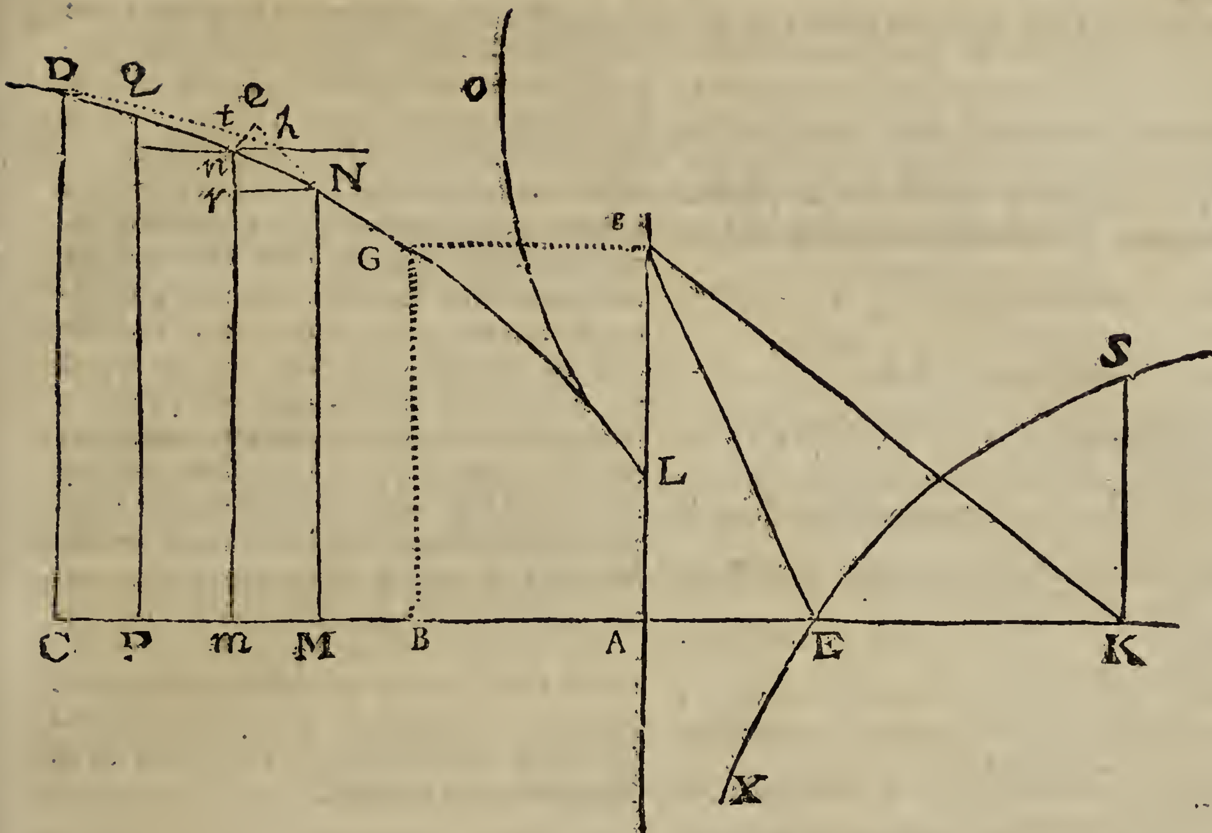
* Erit igitur abscissa $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ & ut habeatur origo abscissarum, notandum quod ordinata in B sive G B æqualis sit a, ex suprà demonstratis; cùm itaque sit ubique $y = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz + aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione si eruatur valor z invenietur $z = a$, ac per consequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.\frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}aL.\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\sqrt{3}$. Describatur ergo Logarithmica X V, Asymptoto Y Z & subtangente æquali $\frac{1}{4}$ G B, sive $\frac{1}{4}a$, in quâ sumatur ubivis ordinata p m, quæ producatur in r donec p r $= 3$ p m, ducatur ad Logarithmicam r t quæ sit Asymptoto parallela, erit $\frac{1}{2}$ r t æqualis Logarithmo $\sqrt{3}$ in Logarithmica cujus subtangens $\frac{1}{4}a$, itaque $\frac{GB}{3} - \frac{1}{2}$ r t $= x$, quo valore translato ex B ad A in axe producto habetur A origo abscissarum: In eo puncto A ductâ perpendiculari A L g, describatur Logarithmica S X cujus ea linea A L g sit Asymptotus, & $\frac{1}{4}$ G B sive $\frac{1}{4}a$ subtangens, & quæ producto axe in E ut sit A E $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$ transeat per punctum E " & sumptâ A R magnitudinis arbitrariæ pro z, ductâque R S parallelâ B L logarithmicæ occurrente in S capiatur abscissa A M, seu $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} \mp$ R S nimirum $-$ R S, cum est A R $>$ A E, & $+$ R S ubi A R $<$ A E; ac denique capiatur ordinata M N, seu $y = \frac{(zz + aa)^2}{4aaz}$; punctum N erit in curvâ quæsitâ L D. Quod ut pateat, demonstrandum superest, esse $\mp$ R S $= -\frac{1}{4}aL.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}$. Hoc autem manifestum est; nam RS, est differentia logarithmorum correspondentium quantitatibus A R & A E, sive z & $a\sqrt{\frac{1}{3}}$) sumptorum in Logisticâ cujus subtangens est $\frac{1}{4}a$, & hæc differentia positiva est, ubi A R (z) $>$ A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$) negativa ubi A R (z) $<$ A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$), & nulla, cùm fit A R $=$ A E, seu $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ut oportet. Quarè cùm A R superat A E, est $-$ R S $= -\frac{1}{4}a \times L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}$, & ubi A E superat A R, fit $+$ R S $= -\frac{1}{4}a$ $\overline{L.z - La\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Est igitur semper $\mp$ R S $= -\frac{1}{4}a\overline{Lz - La\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

204. Datâ minimâ ordinatâ A L, curva L N D, describi potest. Nam cùm sit (*ex dem.*) A L $= \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$ A E, & G B sive A g $= a$, datâ A L dantur A g, A E, & subtangens Logarithmicæ quæ proindè poterit describi.

205. Datis duabus ordinatis M N & C D magnitudine, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz + aa)^2}{4aaz}$ loco y scribantur seorsim datæ M N, & C D dabuntur z & a undè dabitur minima ordinata A L $= \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

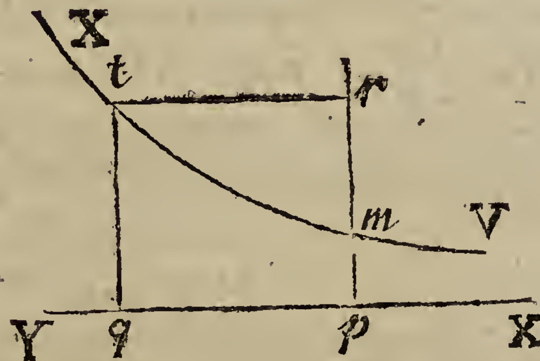
206. Datâ ordinatâ qualibet C D cum abscissa correspondente C A, curva describi potest. Si enim in æquatione $y =$

(zz



$\frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, loco y ſcribatur data CD, habebitur z per a & datas quantitates; deindè ſi in æquatione alterâ $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\,L.z - L\,a\sqrt{\frac{1}{3}}$, loco x ſubſtituatur data CA & loco z, ejus valor per a & datas inventus, dabitur æquatio inter a & datas quantitates, & ex hâc æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima AL.

207. Recta gR, parallela eſt tangenti per punctum N ductæ. Eſt enim (per conſtr.) $dx = \frac{z\,dy}{a}$, ideoque nr (dy): rN (dx) = gA (a) : AR (z) ex quâ proportione & propter angulum rectum in r, & in A, patet triangula nrN, gAR, ſimilia eſſe, & propterea gR parallelam nN, ſeu tangenti per N ductæ. Hinc cum AE ſit æqualis $a\sqrt{\frac{1}{3}} = z$ ubi $z = 0$ (103) erit gE tangenti per L ductæ parallela, ſitque Ag $= a$ eſt $gE^2 = \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3}$ atquè adeo gE $= 2a\sqrt{\frac{1}{3}} = 2$ AE erit gE ad AE ut 2, ad 1, & ità ſinus totus ad ſinum anguli AgE, ſivè ad ſinum anguli quem curva conſtituit cum minimâ ordinatâ AL, qui proindè eſt 30°.

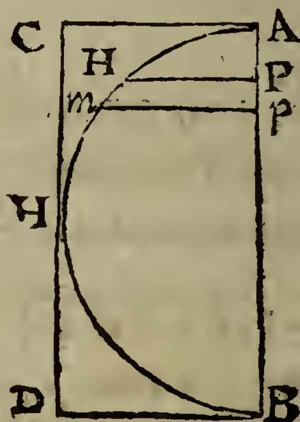


208. Quoniam AR, in infinitum creſcere ac decreſcere poteſt ſi capiatur ſemper AR > BE, deſcribetur curvæ ramus LND, qui concavitatem axi BC obvertit, & ab utroque axe AC, Ag, in infinitum recedit; at ſi ſemper ſumatur BR < BE, deſcribetur alter curvæ ramus LO, qui

qui priori L D convexitatem offert, & ab utroque axe B C, B G, in infinitum abscedit; curva igitur D L O punctum regressûs habet in L, & solidum minimæ resistentiæ ex ejus circà axem A C revolutione genitum, convexum vel concavum, & partim convexum, partim concavum esse potest.

209. Quoniam $d\,x = \frac{z\,d\,y}{a}$, erit areæ curvæ elementum $y\,d\,x = \frac{z\,y\,d\,y}{a}$, elementum arcus curvæ $\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2} = \frac{d\,y\sqrt{a\,a + z\,z}}{a}$, elementum superficiei à curvâ circà axem A C rotatâ genitæ $= \frac{2\,p\,y\,d\,y\sqrt{a\,a + z\,z}}{a}$ (si p sit semiperipheria circuli cujus radius est unitas); elementum solidi in eâdem revolutione descripti $= \frac{p\,z\,y^2\,d\,y}{a}$; & resistentia superficiei $\frac{2\,p\,y\,d\,y\sqrt{a\,a + z\,z}}{a}$, erit $\frac{a\,d\,y^2}{d\,x^2 + d\,y^2}\,y\,d\,y = \frac{a\,d\,y^2}{d\,y^2 \times a\,a + z\,z}\,y\,d\,y$ sive ut $\frac{y\,d\,y}{a\,a + z\,z}$. Porrò si in his fluxionibus loco y, & $d\,y$, substituantur ipsarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz + aa)^2}{4\,a\,a\,z}$, & $d\,y = \frac{3\,z^2\,d\,z}{4\,a\,a} + \frac{1}{2}\,d\,z - \frac{a\,a\,d\,z}{4\,z\,z}$ habentur, fluens $S.\,y\,d\,x$, seu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ pendent.

Schol. Quæ ad solidum minimæ resistentiæ spectant, ea ferè omnia mutuati sumus ex Illmo. Marchione *Hospitalio*, tum in Act. Lipsiens. an. 1699, tum in Monum. Paris. ejusdem anni. De eodem solido plurima etiam dederunt celeb. viri *Joh. Bernoull.* in Act. Lipsi. an. 1699. 1700. *Hermannus* in Phoronomiâ, & *Facio* ad calcem libri de murorum inclinatione &c. Sed qui totam hanc NEWTONI propositionem maximâ universalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum à Clariss. *Bouguero* editum, & ab Academiâ Regiâ Parisiensi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; *De la mâture des Vaisseaux*; nec non *Monum. Paris.* an. 1733. in quibus elegantissima & universalissima legitur ultimæ Scholii *Newtoniani* partis solutio. Rem à clariss. Autore demonstratam hic observatu dignissimam judicamus; videlicet, solidum rotundum cujus constructionem modò dedimus, in quâlibet hujus solidi directione & juxtà quamlibet fluidi impulsionem, minimam omnium pati resistentiam, exceptis quibusdam casibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum scilicet directio solidi majores angulos cum axe constituit; & quod mirum est, in his casibus, solidum illud quod erat minimæ resistentiæ & navigationi aptissimum, solidum maximæ resistentiæ & ad usum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad universalem solidorum in fluidis resistentiam pertinent, peti possunt ex aureo *Joh. Bernoullii* libello qui inscribitur: *Essai d'une Nouvelle Theorie de la manœuvre des Vaisseaux*, & ex *Hermanni* Phoronomiâ.



210. Lemma. *Sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria.* Sphæra generatur per revolutionem semicirculi A H B circà diametrum A B, & cylindrus sphæræ circumscriptus per revolutionem rectanguli A C B D, cujus latera A C, B D circuli radio sunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis P M, p m, dicantur A C $= r$, semiperipheria A H B $= p$, A P $= x$, P p $= d\,x$, & quia circulorum areæ sunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii C A, seu $r\,r$, ad aream circuli A H B, nempè $r\,p$, ut M P^2, seu $2\,r\,x - x\,x$ ad aream circuli radio P M descripti, quæ ideò erit $2\,p\,x - \frac{p\,x\,x}{r}$; & hinc

so-

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eâdem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eâdem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quòd particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ resiliant. Et cùm resistentia globi (per propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, & globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quàm maximè reflectendo, (x) duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, (y) qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformi-

solidum ex rotatione elementi P M m p, circà A B genitum, erit $2pxdx - \frac{pxxdx}{r}$, sumptisque fluentibus, solidum ex rotatione segmenti circularis A M P ortum, erit $pxx - \frac{px^3}{3r}$, & factâ A P = A B, seu $x = 2r$, sphæra tota habetur $= 4prr - \frac{8}{3}prr = \frac{4}{3}prr$. Sed cylindrus sphæræ circumscriptus est factum ex areâ circuli radio A C descripti in cylindri altitudinem A B, seu est $2prr$. Quarè sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{4}{3}prr$ ad $2prr$, id est, ut 4 ad 6, sivè ut 2 ad 3. Q. E. D.

(x) * *Duplam sui ipsius velocitatem* &c. Cùm singulæ particulæ, cylindri respectu, minimæ sint, si nulla esset particularum medii reflexio, eâdem cum cylindro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. lib. 1.). 210.

(y) * *Qui sit ad totum cylindri motum* &c. Quantitates motûs sunt ut velocitates & massæ conjunctim; massæ verò sunt ut volumina & densitates; ideòque quantitates motûs ut velocitates & volumina & densitates conjunctim. Cùm igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, sitque proindè factum ex volumine cylindri in ipsius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri.

miter progrediendo describit, (z) communicabit motum eundem particulis; (a) & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum globi motum ut densitas medii ad densitatem globi. Et propterea globus resistentiam patitur, quæ sit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Cas. 2. Ponamus quòd particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quàm in priore casu, & resistentia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

Cas. 3. Ponamus quòd particulæ medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, sed mediocri aliquâ resiliant à globo; & resistentia globi erit in eâdem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu & resistentiam in secundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si globus & particulæ sint infinitè dura, & vi omni elasticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis destituta: resistentia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Co-

(z) * *Communicabit motum eundem particulis*, ob resistentiam globi resistentiâ cylindri duplò minorem (prop. 34. lib. 2.)

(a) *Et quo tempore duas tertias partes &c.* * Huc redit compositio rationum à NEWTONO indicata: Totus Globi motus est ad Cylindri motum, ut 2 ad 3, hæc enim est utriusque massæ ratio; Totus Cylindri motus est ad motum à cylindro communicatum quo tempore dimidiam suam longitudinem describit ut densitas Cylindri (sive Globi) ad densitatem medii, motus ille à cylindro communicatus idem est cum motu à Globo communicato dum totam suam Diametrum percurrit; Denique motus ille a Globo communicatus dum totam suam Diametrum percurrit est ad motum ab eo Globo communicatum dum percurrit duas Diametri suæ tertias partes ut 3 ad 2, Ideoque totus Globi motus est ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas Diametri suæ partes conjunctim ut 2 ad 3, ut densitas Globi ad densitatem medii, & ut 3 ad 2, sive primâ ratione & hâc ultimâ sese compensantibus ut densitas Globi ad densitatem medii. Q. E. D.

Corol. 2. (b) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. (†) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Resistentia globi, cæteris paribus, est ut densitas medii.

Corol. 5. Resistentia globi est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione densitatis medii.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit *AB* tempus quo globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad

A B

(b) * *Resistentia globi cæteris paribus est in duplicata ratione velocitatis.* * Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuscujusque est ad motum ab ipso communicatum tempore quo duas tertias suæ Diametri percurrit, ut Densitates globorum ad densitates mediorum, ideoque ex hypothesi in eâdem ratione, ergo etiam velocitas unius est ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias suarum Diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, & quia Resistentia singulis momentis, ejusdem Globi respectu, uniformis censetur; Resistentiæ momentaneæ erunt directè ut motus amissi & inversè ut tempora quibus amittuntur, sed motus amissi sunt ut velocitates directè & tempora sunt inversè ut velocitates; quia æquales longitudines percurruntur motibus qui uniformes, saltem quam proximè, censentur, ergo resistentiæ momentaneæ sunt bis ut velocitates, hoc est in ratione duplicatâ velocitatis. 210.

(†) * *Resistentia globi cæteris paribus est in duplicatâ ratione Diametri.* * Sint globi æquiveloces, æque densi, in eodem medio moti, sed diversæ sint earum Diametri, fingantur duo Cylindri ejusdem cum iis Diametri, & etiam æquiveloces & æque densi, resistentiæ quas patientur Cylindri singulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium sunt ut Quadrata Diametrorum: Sed facile liquet resistentias Cylindrorum & globorum æquivelocium, ejusdem Diametri, in eodem medio esse in datâ ratione, ergo ut resistentia unius Cylindri ad resistentiam alterius, ita resistentia unius Globi ad resistentiam alterius, sunt ergo Globorum resistentiæ ut Quadrata Diametrorum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXV. PROBL. VII.

AB erigantur perpendicula *AD*, *BC*. Sitque *BC* motus ille totus, & per punctum *C* asymptotis *AD*, *AB* describatur hyperbola *CF*. Producatur *AB* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *EF* hyperbolæ occurrens in *F*. Compleatur parallelogrammum *CBEG*, & agatur *AF* ipsi *BC* occurrens in *H*. Et si globus tempore quovis *BE*, motu suo primo *BC* uniformiter continuato, in medio non resistente describat spatium *CBEG* per aream parallelogrammi expositum, idem in medio resistente describet spatium *CBEF* per aream hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam *EF*, amissâ motus ejus parte *FG*. (c) Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem *BH*, amissâ resistentiæ parte *CH*. Patent hæc omnia *per corol.* 1. & 3. *prop.* V. *lib. II.*

Corol. 7. Hinc si globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem globus tempore *t* in medio resistente per resistentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decrescentem, (d) amittet motus sui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore *t* descrip-

(c) *Et resistentia ejus in fine &c.* Resistentia sub initio ubi velocitas est BC, exponatur per eandem lineam BC, & quia resistentiæ sunt ut velocitatum quadrata, atque BC ad FE, ut velocitas sub initio ad velocitatem in fine temporis BE ad FE^2 ut BC ad lineam quæ resistentiam exponit in fine temporis BE, ideòque linea hæc $= \frac{FE^2}{BC}$. Sed (*per theor.* 4. *de hyp.*) & ob similitudinem triangulorum ABH, AEF, est BC : FE = AE : AB = FE : HB, & hinc HB $= \frac{FE^2}{BC}$. Quare recta HB exponet resistentiam in fine temporis BE, & proindè recta CH partem amissam resistentiæ illius quæ sub initio exponebatur per lineam BC.

(d) * *Amittet motûs sui partem &c.* Pars motûs M in fine temporis *t* residua dicatur *m*, & quia (ex dem.) T : t = AB : BE, & hinc T × t : T = AE : AB, & prætereà M : *m* = CB : FE = AE : AB; erit T × t : T = M : *m*, unde habetur $m = \frac{MT}{T+t}$, & inde motûs *M* pars amissa est $M - \frac{MT}{T+t} = \frac{tM}{T+t}$.

ſcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2, 302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica $BCFE$ eſt ad rectangulum $BCGE$ in hâc proportione.

Scholium.

In hâc propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem projectilium ſphæricorum in mediis non continuis, & oſtendi quod hæc reſiſtentia ſit ad vim quâ totus globi motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri ſuæ partes velocitate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas medii

(e) * *Propterea quod area hyperbolica.* Dicantur A B $= a$, B C $= b$, B E $= x$, A E $= a + x$; & quia (*theor.* 4. *de hyp.*) F E $= \frac{ab}{a+x}$, elementum areæ C F E B, erit $\frac{abdx}{a+x}$, & area ipſa C F E B $= ab\,S.\frac{dx}{a+x}$, quæ fluens ità ſumenda eſt ut evaneſcat ubi ſit $x = 0$, ſed fluens S. $\frac{dx}{a+x}$ ità ſumpta eſt logarithmus numeri $\frac{a+x}{a}$, deſumptus ex logiſticâ cujus ſubtangens eſt unitas, aut quod idem eſt, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis eſt (382. *lib.* 1. & 40, *lib.* 2.); Si enim ponatur $x = 0$, numerus $\frac{a+x}{a}$, evadit $= 1$, & ideò L. $\frac{a+x}{a} = 0$. Quarè area B C F E $= ab\,L.\frac{a+x}{a}$; rectangulum verò B C G E $= bx$. Eſt ergò area hyperbolica B C F E ad rectangulum B C G E, ut ab L. $\frac{a+x}{a}$ ad bx, hoc eſt, dividendo per ab, ut L. $\frac{a+x}{a}$ ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. & hyp.) $\frac{a+x}{a} = \frac{T+t}{T}$, & $\frac{x}{a} = \frac{t}{T}$; Quare area Hyperbolica B C F E, eſt ad rectangulum B C G E, ut L. $\frac{T+t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Supereſt igitur inveniendus logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$; per logarithmicam cujus ſubtangens eſt unitas. Porrò ejuſdem numeri logarithmi diverſæ ſpeciei ſunt inter ſe in datâ ratione (38) & numerus 2, 302585092994 eſt logarithmus numeri denarii ſumptus in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, & ejuſdem numeri denarii logarithmus in tabulis ſumptus eſt 1, 0000000 $= 1$; Quarè ut 1, ad 2, 302585092994, ità logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ in tabulis ſumptus ad logarithmum ejuſdem numeri ſumptum in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, vel in Hyperbolâ cujus dignitas eſt 1; habetur ergò logarithmus quæſitus, ſi logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis ſumptus multiplicetur per numerum 2, 302585092994. 210.

medii ad densitatem globi, si modo globus & particulæ medii sint summè elastica & vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi globus & particulæ medii sunt infinitè dura & vi reflectendi prorsus destituta. In mediis autem continuis qualia sunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas resistentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, resistentia est adhuc duplò minor. Globus utique in hujusmodi mediis fluidissimis resistentiam patitur quæ est ad vim quâ totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas medii ad densitatem globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

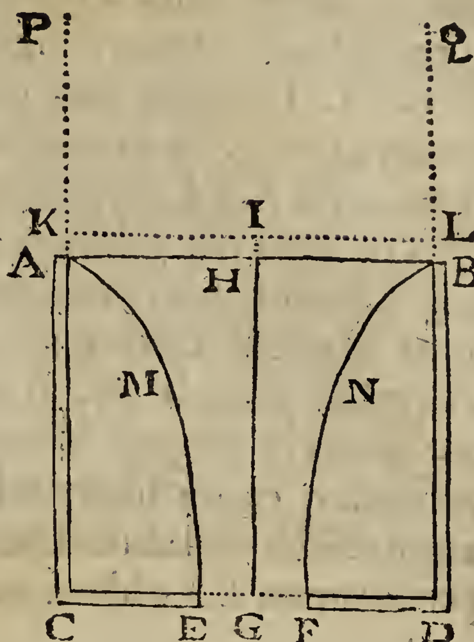
PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit *ACDB* vas cylindricum, *AB* ejus orificium superius; *CD* fundum horizonti parallelum, *EF* foramen circulare in medio fundi, *G* centrum foraminis, & *GH* axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei *APQB* ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, & axem eumdem habere, & uniformi cum motu perpetuo descendere, & partes ejus quam primum attingunt superficiem *AB* liquescere, & in aquam conversas gravitate suâ defluere in vas; & cataractam vel columnam aquæ *ABNFEM* cadendo formare, & per foramen *EF* transire, idemque adæquatè implere. Ea verò sit uniformis velocitas glaciei descendentis ut & aquæ contiguæ in circulo *AB*, quam aqua cadendo (f) & casu suo describendo altitudinem *IH* acqui-

(f) * *Et casu suo describendo altitudinem IH.* Hâc igitur Hypothesi idem præstatur ac si in loco A B nova superficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali qualem cadendo ex altitudine I H singula ejus superficiei particula acquirere potuisset, & deinde particulæ aquæ è loco A B vi propriæ gravitatis cadendo sese mutuò attrahe-

quirere poteſt; & jaceant *I H* & *H G* in directum, & per punctum *I* ducatur recta *K L* horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in *K* & *L*. Et velocitas aquæ effluentis per foramen *E F* (g) ea erit quam aqua cadendo ab *I* & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *I G* acquirere poteſt. (h) Ideoque per theoremata *Galilæi* erit *I G* ad *I H* in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo *A B*, hoc eſt, in duplicatâ ratione circuli *A B* ad circulum *E F*; (i) nam hi circuli ſunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipſos eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem versùs hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur; ſed motum horizon-



herent horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N F E M formandam.

(g) * *Ea erit quam aqua* (per hyp).

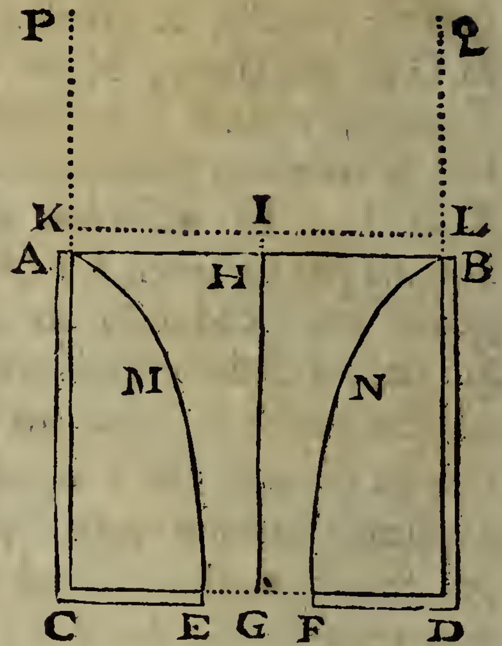
(h) * *Ideoque per theoremata Galilæi.* 28. lib. 1.

(i) 271. *Nam hi circuli* &c. Quoniam aqua per totam cataractam A B N F E M, eodem ſemper tenore fluere ſupponitur, neceſſe eſt ut eadem aquæ quantitas per ſingulas cataractæ ſectiones axi I G perpendiculares, ſeu per ſingulos circulos A B, M N, E F horizonti parallelos eodem tempore tranſeat. Nam ſi dato tempore major vel minor aquæ copia per circulum A B quàm per circulum M N tranſiret; aqua inter illos circulos vel intumeſceret vel decreſceret, & cataractæ figuram mutaret (contrà Hyp.). Quantitas aquæ per circulum quemlibet M N, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus baſis eſt circulus M N, & altitudo eſt æqualis longitudini quam ſuperficies aquæ M N, cum velocitate acquiſitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato deſcriberet; & longitudo illa eſt ut aquæ per circulum M N fluentis velocitas (5. *lib.* 1.) & ideo quantitas aquæ per 271

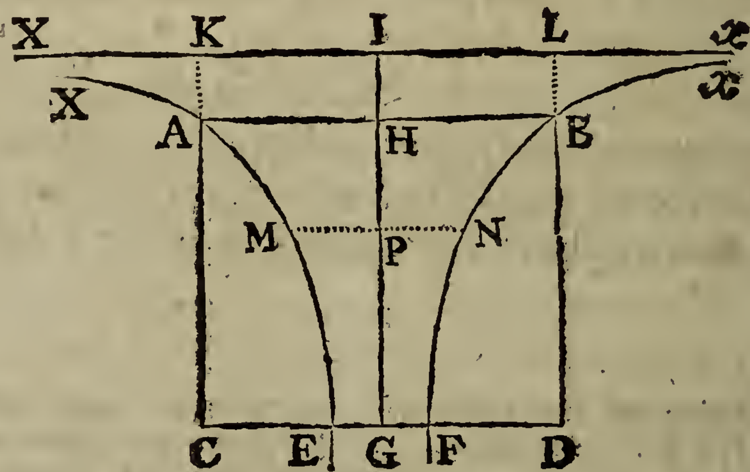
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT: VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

rizonti parallelum, à cohæsione illâ oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantùm non tangat, vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrimè & sine omni resistentiâ labatur; hæc defluet per foramen *EF* eâdem velocitate ac



per circulum M N dato tempore fluentis; est ut circulus M N & velocitas conjunctim. Quarè cùm data sit quantitas aquæ per singulos circulos dato tempore transeuntis; circulus M N est reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipsum transit. Q. E. D.



272. His ità constitutis; facile est cataractæ figuram geometricè definire. Secet M N axem I G in P; & quia altitudo I P est in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas est inversè ut circulus M N, & denique circulus M N est in ratione duplicatâ radii M P, & ideo I P seu abscissa in ratione quadruplicatâ inversâ radii seu ordinatæ M P, sive I P ut $\frac{1}{MP^4}$, & ideo $MP^4 \times IP$, quantitas data Est igitur curva E M A, Hyperbola quarti gradûs, asymptotos habens I G, I K, quibus convexitatem obvertit. Producantur arcus E M A, & asymptotus I K ad

ac prius, (k) & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. (l) Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quàm prius. Nam

ad partes X in infinitum, & figura EAXXIG circà asymptotum seu axem I G, rotata cataractam describet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò EMAHG, hanc cataractæ partem quæ intra vas ABDC, continetur, generabit.

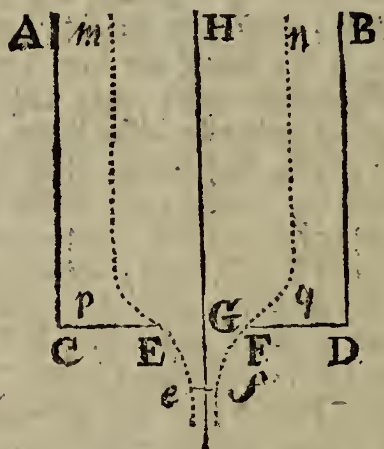
273. Tota cataracta E A X x B F, æquatur cylindro cujus basis est circulus E F, & altitudo 2 I G. Sint enim altitudo I G $= x$, ordinata E G $= y$, a linea data, & (272) $x = \frac{a^5}{y^4}$, ideoque $y^4 = a^5$ æquatio ad Hyperbolam E M A X. Et si semiperipheria circuli cujus radius est unitas, dicatur p, erit circuli E F area $= pyy$, & cylindrus $EG \times 2IG = 2pyyx = \frac{2pa^5}{yy}$. Cùm verò sit $x = \frac{a^5}{y^4}$, ac proindè $dx = -\frac{4a^5dy}{y^5}$, cataractæ elementum $pyydx = -\frac{4pa^5dy}{y^3} = -4pa^5y^{-3}dy$, & sumptis fluentibus, tota cataracta ad asymptotum usque X x producta, erit $= \frac{2pa^5}{yy} = 2EF \times IG$. Q. E. D.

(k) 274. *Et pondus totum &c.* Pondus quidem totum columnæ aquæ A B N F E M in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cùm motûs illius pars pendeat à motu superficiei A B, quæ (per hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem I H acquirere potest. Sed totum aquæ defluxum mathematicè considerare possumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ E A X x B F, usque ad asymptotum X x producta continetur, quæque æqualis est cylindro aqueo basi E F & altitudine 2 I G, descripto (273). 274.

(l) * *Non minor erit quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere*, atquè ità aquæ descensum accelerare; *non tamen major erit, quia glacies in aquam resoluta*, ob reactionem actioni æqualem & contrariam, *non potest descendere, nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem.* Idem igitur manet in aquâ totâ ad descendendum & per foramen E F effluendum conatus. At *eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

(m) Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed à lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quàm in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proximè, ſi modò diametros rectè dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis, cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis effixi ſic, ut vena illa egrederetur ſecundùm lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum eſſet, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine quàm accuratiſſimè menſurata, prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. (n) Erat igitur diameter foraminis hujus cir-



(m) * *Nam particulæ aquæ &c.* Clariſſ. *Daniel Bernoullius* paragr. 3. Sect. 4ª. *Hydrodynamicæ* obſervavit particulas ceræ hiſpanicæ aquis innatantes ità cum aquâ in vaſe moveri, ut quæ foraminis centro C imminent, per lineam verticalem H G, deſcendant, aliæ verò omnes utrinque poſitæ motu fere verticali deſcendant primùm per lineas m p, n q, fere ad fundum uſque C D, tumque curſum ſuum verſus foramen E F per lineas P E, q F ſenſim inflectant. Itaque vena aquæ exilientis E F f e duplici de causâ contrahitur uſque in e f paulo infra foramen E F. Prima contractionis illius cauſa eſt acceleratio motûs, quæ omnibus gravibus cadentibus communis eſt, & quâ fit ut major ſit volocitas aquæ in loco inferiori e f quàm in ſuperiore E F; quia enim aquam eſſe in ſtatu manente, eandemque proindè (271) illius quantitatem per ſectiones E F & e f, eodem tempore effluere ſupponimus, ſectio e f eſt ad ſectionem E F in ratione velocitatis aquæ in loco E F, ad ejus velocitatem in loco e f (271) & ideo ſectio e f, cæteris paribus, minor eſſe debet ſectione E F. Secunda contractionis venæ cauſa, quam ſolam hic conſiderat NEWTONUS, eſt obliquitas motûs particularum aquæ per lineas P E, q F, ad foramen E F tendentium; hinc enim fit, ut ſeclusâ etiam omni acceleratione motûs à gravitate ortâ, particulæ aquæ convergant, venamque contrahant, atque ideo motum ſuum accelerent.

(n) * *Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad*

circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quàmproximè. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, & postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti à foramine pervenerit*, & ad distantiam illam tenuior (o) & celerior fit quàm in ipso foramine in ratione 25 × 25 ad 21 × 21 seu 17 ad 12 quamproximè, id est in subduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. (p) Per experimenta verò constat quòd quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis

ad 21 quamproximè. Hæc ratio in experimentis constans ferè manet, si aqua è vase satis amplo per exiguum foramen laminæ tenuissimæ insculptum effluat, licet in vase mutetur aquæ foramini incumbentis altitudo. Experimenta illa iterarunt celeberrimi Mathematici, Marchio *Polenus* lib. de Castellis & *Daniel Bernoullius* sect. 4ª. Hydrodynamicæ. Hæc sunt Illustr. Marchionis verba pag. 38. 39. « Proclive autem erit intelligere, confirmari ex allatis experimentis rationem inter diametros foraminum & aquæ contractæ diametros à viro summo *Isaaco* NEWTONO, ut antè diximus, constitutam. Non tamen inficias iverim perexiguam aliquam differentiam interesse inter contractiones aquæ effluentis ex minoribus foraminibus, & aquæ contractiones ex majoribus effluentis. Anteà descripti foraminis in laminâ ferreâ diameter ad diametrum aquæ contractæ fuit in eâ ratione quam habet numerus 52 ad 41; cùm *Newtoniana* sit ratio numeri 50 ad 42. sic omninò eâdem lege, non semper contrahi aquæ venas ostendunt variæ contractiones in aquæ à variis frustis conicis effluxu observatæ; quin etiam huc debebunt referri illæ quas animadverti differentiæ inter diametros ad perpendiculum sumptas, & diametros secundum lineam horizonti parallelam mensas. At quanta sit differentia inter aquæ contractiones non ausim definire; neque verò illa *Newtoniana* ratio inter diametrum foraminis & contractæ aquæ diametrum sumi debet ceu præcisa, cùm ipse vir summus in citato opere hæc habeat; existente ejus (nempè aquæ contractæ) diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel 5 & $\frac{1}{2}$ ad 6 & $\frac{1}{4}$, quamproximè, si modò diametros rectè dimensus sum. » *Bernoullius* verò Sect. 4. parag. 7°. hæc habet; Interim assumptis laminâ tenui, vase amplissimo, foramine ad 4 vel 6 lineas in diametro assurgente, solet ratio inter foramen & Sectionem venæ contractæ non multum recedere ab illâ quam NEWTONUS statuit. » Verùm utriusque authoris experimenta demonstrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, si per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex simplici foramine in tenuissimâ laminâ insculpto è vase effluat aqua.

(o) * *Et celerior fit quàm in ipso foramine.* Nam velocitates sunt reciprocè ut circuli per quos aqua eodem tempore transit (171), circuli verò sunt in ratione duplicatâ diametrorum; & ideo velocitas aquæ per sectionem circularem venæ contractæ transeuntis est ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut 25 × 25 ad 21 × 21 hoc est, 625 ad 441; quod utrumque divisum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque divisum per 441, dat rationem 1.41 &c. ad 1, est verò Radix binarii numeri 1.41 &c., est ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radicis binarii numeri ad unitatem.

(p) *Per experimenta verò constat.* Datâ quantitate aquæ per datum foramen seu per datam venæ contractæ Sectionem dato tempore effluentis, sic illius velocitas 274.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

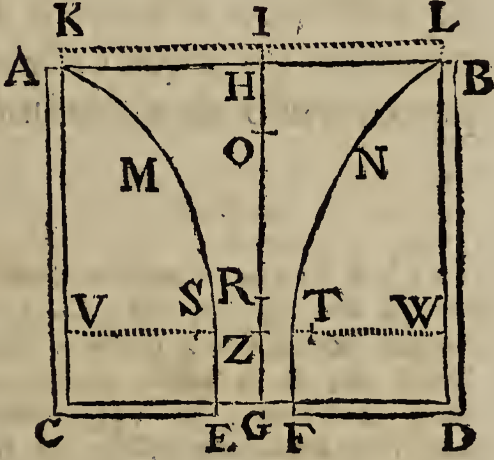
sis factum, dato tempore effluit, ea sit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, sed per foramen circulare, cujus diameter est ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet deorsum in ipso foramine quam grave cadendo & casu suo (q) describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirere potest quamproximè. Sed postquam exivit ex vase, acceleratur convergendo donec ad distantiam à forami-

tas inquiritur. Quoniam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel prismati cujus basis est foramen datum aut venæ contractæ sectio, & altitudo spatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ Sectione habet, uniformiter progrediendo describeret, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut Sectionis venæ aream, & quotiens erit spatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo describeret, atquè ità nota fit aquæ velocitas cujus dimidium est altitudo ex quâ cadere debuit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius secundi sine resistentiâ cadendo describit, v velocitas hoc casu acquisita, & ideò $2\,a$ spatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius secundi describi potest (30. *lib.* 1.) sit b altitudo aquæ in vase stagnantis, c celeritas quam grave per altitudinem b sine resistentiâ cadendo acquirit, & s spatium quod cum celeritate c uniformiter progrediendo tempore minuti unius secundi describeret, erit $a:b = vv:cc$ (28. lib. 1.) & $2\,a:s = v:c$ (5. lib. 1.) ideóque $a:b = 4\,aa:ss$; undè habetur $ss = 4\,ab$, & $s = \sqrt{4\,ab}$. Si igitur aqua è vase per venæ contractæ Sectionem effluat cum velocitate c quam grave cadendo & casu suo describendo altitudinem b aquæ in vase stagnantis acquirit, spatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius secundi è vase effluentis, ut suprà dictum est, habetur, debet esse æquale $\sqrt{4\,a\,b}$. Hinc si altitudo a, sit pedum Paris. 14, erit $ss = 56\,b$, quæ est ipsa regula quam D. *Pitot* in Monum. Acad. Paris. an. 1730. tradidit. At si altitudo a ponatur esse pedum Paris. $15\frac{1}{12}$ seu $\frac{181}{12}$ (471. lib. 1.) erit $ss = \frac{181}{3}\,b$. Verùm ut aquæ in vase stagnantis altitudo & velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad sensum maneant, ut oportet, usurpari potest vas satis amplum exiguo pertusum foramine, vel si vas paulò angustius adhibeatur, tantum aquæ affundi supernè debet quantum per inferius lumen effluit, & cavendum est ne affusa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vase stagnantis superficiem attingat. Quibus autem artibus id possit effici fusè exponunt locis suprà citatis Marchio *Polenus* & *Daniel Bernoullius* quos lector consulere potest. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ Sectionem effluentis paulò minor per experimenta quàm per theoriam invenitur, quod variis resistentiis tribuendum esse videtur, & certè Illustr. Marchio *Polenus*, cùm in libro de Castellis pag. 64. opinatus fuisset velocitatem illam in experimentis valde esse minorem quàm in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem sententiam mutavit in Epistolâ ad *Marinonium*.

(q) *Describendo dimidiam altitudinem.* Velocitas quam corpus quodlibet grave, sine resistentiâ cadendo & casu suo describendo dimidiam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, est ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ cadendo acquisitam ut 1 ad $\sqrt{2}$ (28. lib. 1.)

ramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quàmproximè.

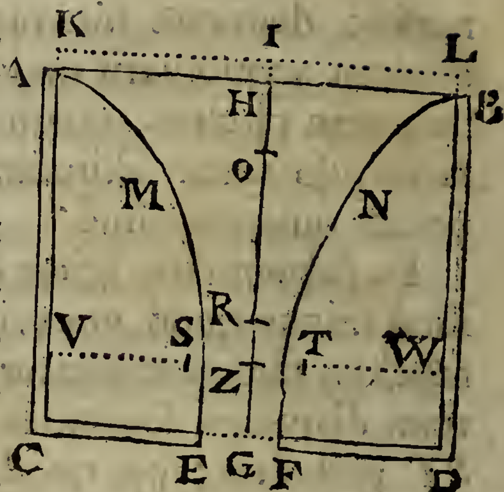
In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus *E F*. Et plano foraminis *E F* parallelum duci intelligatur planum aliud superius VW ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius *E F*, atque ideo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio problematis postulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio problematis simplicior sit & magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vase per foramen *E F* in plano inferiore factum egrediebatur, motum suum per-



petuo

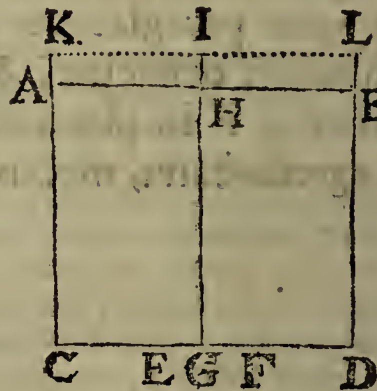
(f.) Sed; ex suprà ostensis; velocitas aquæ per vasis foramen transeuntis est ad velocitatem per venæ contractæ Sectionem fluentis, id est, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, ad $\sqrt{2}$; Quarè velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ stagnantis cadendo acquirit, æqualis est velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per simplex foramen in tenuissimâ laminâ factum, ut suprà expositum est, effluat è vase. 274

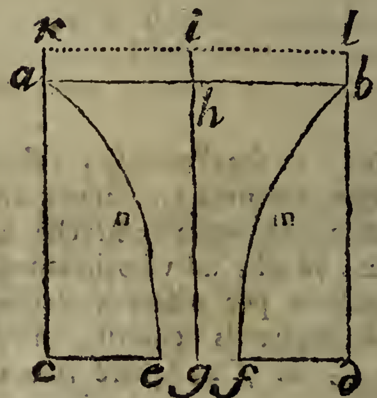
DE MOTU CORPORUM: LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.



petuo servet, & (r) glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit ST diameter foraminis circularis centro Z descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit EF diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius ST, sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum. Et sit diameter foraminis superioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ è vase per foramen ST exeuntis ea erit in ipso foramine deorsum quam corpus cadendo à dimidio altitudinis IZ acquirere potest: velocitas autem cataractæ utriusque cadentis ea erit in foramine EF, quam corpus cadendo ab altitudine tota IG (s) acquiret.

Cas.





(r) * *Et glacies quietem suam.* Sunto vasa duo æqualia A B D C, a b d c, in quorum primo glacies omnis in aquam resoluta sit, & in altero glacies quietem suam conservet, ut aqua cataractam a b n f e m formando effluat per foramen e f Sectioni venæ contractæ è foramine E F exilientis æquale; & loco vasis ABDC, in problematis solutione substitui poterit vas alterum a b d c, in quo aquæ per lumen e f effluentis eadem est velocitas quam aqua è vase A B D C exiliens habet in Sectione venæ contractæ, eademque proindè aquæ quantitas in defluxum impenditur, & proptereà idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vase. Quoniam enim cataractæ a b n f e m figura & lex secundùm quam aqua cataractâ illâ movetur notæ sunt, problematis solutio & facilior & magis mathematica fiet, si loco vasis A B D C mente substituatur vas a b d c.

(s) * *Acquiret.* Hæc ex suprà demonstratis patent.

Caſ. 2. Si foramen *E F* non ſit in medio fundi vaſis, ſed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac priùs, ſi modò eadem ſit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore deſcendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quàm per lineam perpendicularem, ſed deſcendendo eandem velocitatem acquirit in utroque caſu, (u) ut *Galilæus* demonſtravit.

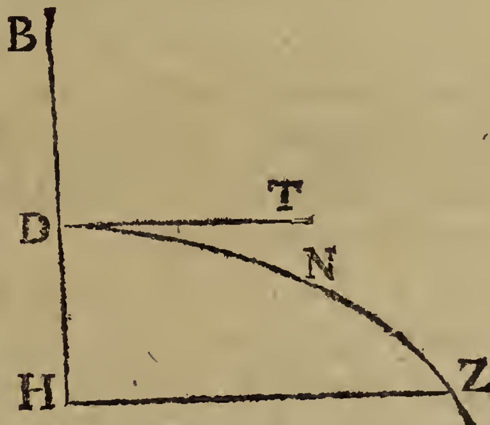
Caſ. 3. Eadem eſt aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vaſis. Nam ſi foramen parvum ſit, (x) ut intervallum inter ſuperficies *A B* & *K L* quoad ſenſum evaneſcat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex (y) latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea ſit quam corpus ab aquæ in vaſe ſtagnantis altitudine *H G* vel *I G* cadendo acquirere potuiſſet. Facto

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc ſecundo caſu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas deſcendit.

(u) * *Ut Galilæus demonſtravit.* (81. & 85. lib. 1.).

(x) 275.* *Ut intervallum inter ſuperficies A B & K L.* I H eſt ad I G in ratione quadruplicatâ diametri E F ad diametrum A B (272), aut quod idem eſt, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideòque ſi ratio E F ad A B parva ſit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, & H G, I G erunt ad ſenſum æquales.

(y) * *Ex latere recto hujus Parabolæ.* Aquæ gutta è loco D, ſecundùm directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere poteſt, & ſublatâ medii reſiſtentiâ, deſcribat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, & diameter D H ſeu verticalis B D producta (40. lib. 1.); capiatur abſciſſa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; & quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H deſcribit uniformi illâ velocitate quam caſu per B D acquiſivit, deſcribit longitudinem H Z ipſius B D vel D H duplam, (30. *lib.* 1.). Latus rectum



Parabolæ D N Z, pertinens ad diametrum D H eſt $\frac{HZ^2}{DH}$ (*theor.* 1. *de parab.*) ideòque cùm ſit H Z = 2 D H = 2 B D, latus rectum eſt 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo deſcribere debet ut velocitatem acquirat cum quâ è loco D exilit, eſt quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis. 275.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVI. Probl. VIII.

cto utique experimento inveni quod, ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam ſine reſiſtentiâ, vena (z) incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quin etiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Aſcéndit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vaſe ſtagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, niſi quâtenus aſcenſus ejus ab aeris reſiſtentiâ aliquantulum impediatur; (a) ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (*per prop.* XIX. *lib.* 2.) & preſſioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit. eam eſſe, quam in hâc propoſitione aſſignavimus, non ſolùm ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt.

Caſ. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas, ſive figura foraminis ſit circularis, ſive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, ſed oritur ab ejus altitudine infra planum K L.

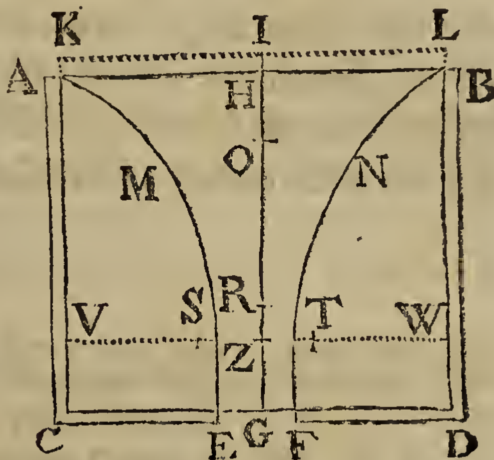
Caſ. 6. Si vaſis *AB DC* pars inferior in aquam ſtagnantem im-

(z) * *Incidere debuiſſet in planum illud.* Sit enim (*in fig. notæ ſuperioris*) altitudo B D = D H digit. 20, & quia B D eſt pars quarta lateris recti parabolæ D N Z, quam aqua ſine reſiſtentiâ deſcriberet, latus illud rectum eſt digit. 80, & ordinata H Z æqualis 2 D H eſt digit. 40. differentia 3. digit. inter diſtantias 40. & 37. digit. reſiſtentiis tribuenda eſt.

(a) * *Ac proinè eâ effluit cum velocitate.* (25. 26. lib. 1.)

immergatur & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit *G* R: velocitas quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen *E F* in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IR* acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſubſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, (b) menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

(c) *Corol.* 1. Hinc ſi aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicatâ ratione areæ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli *AB*: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *K C* acquirere poteſt.



(d) *Corol.* 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen *E F*, & altitudo 2 *GI* vel 2 *CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine *G I* cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.

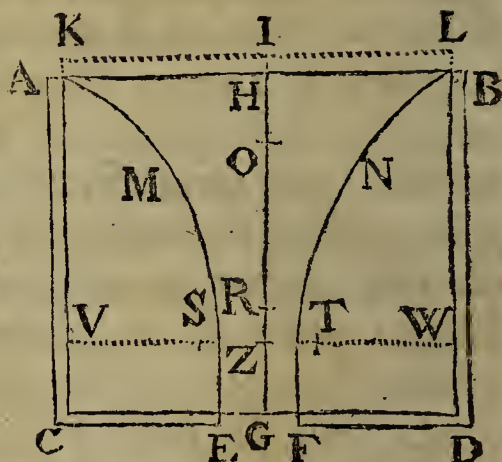
Co-

(b) * *Menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit*, & quantitates aquæ iiſdem temporibus effluentis.

(c) * *Cor.* 1. Patet per not. 275. & caſ. 2um. ac 5um.

(d) * *Cor.* 2. De hujus corollarii veritate diù multumque diſputatum eſt inter Comitem *Riccatum*, Danielem *Bernoullium*, Petrum Antonium *Michelottum*, Jacobum *Jurinum*, aliosque eruditiſſimos viros. Cùm enim in primâ principiorum editione, NEWTONUS, nondum obſervatâ contractione venæ, ſtatuiſſet, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt; æqualem eſſe ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen E F, & altitudo G I, & in ſecundâ editione, habitâ ratione venæ contractæ, vim illam duplam feciſſet, priorem vis illius menſuram adverſus Comitem *Riccatum* & *Jurinum* tuebatur cum *Michelotto* Daniel *Bernoullius*, quorum Diſſertationes videre eſt in Exercitationibus Mathematicis quæ an. 1724. *Venetiis* editæ ſunt. Verùm *Daniel Bernoullius* paragr. 9. ſect. 13æ. *Hydrodynamicæ* poſteriori ſententiæ NEWTONI ita ſuffragatur: « iſta ſententia a me olim « & ab aliis fuit impugnata, ab aliis rur- «ſus 275.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVI. Probl. VIII.



Corol. 3. Pondus aquæ totius in vase *ABDC* est ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* describere posset altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus basis est circulus *EF* & altitudo est 2 *IG*, id est, cylindro cujus basis est circulus *AB* & altitudo est 2 *IO*, (e) nam circulus *EF* est ad circulum *AB* in subduplicatâ ratione altitudinis *IH* ad alti-

«sus confirmata. Nunc autem postquam «hanc aquarum motarum theoriam medi- «tatus sum, lis ità dirimenda mihi vide- «tur ut cum aquæ ad motum uniformem «pervenerint, quæ quidem Hypothesis est «NEWTONI, tunc rectè altitudine 2 GI, vis «illa definiatur, sed ab initio fluxûs, ubi «velocitas adhuc nulla est, vis simplici al- «titudini GI respondeat, moxque cres- «cente velocitate, simul vis aquam ad ef- «fluxum animans crescat, & tandem ad «eam magnitudinem exsurgat quam NEW- «TONUS assignavit..... Rectè etiam Ill. «*Riccatus*, cum quo mihi de hoc argumen- «to res erat, interrogatus, undè vis illa «duplæ aquarum altitudini conveniens ori- «ri possit, cum obturato orificio, gutta «eidem imminens vi simplicis altitudinis «urgeri manifestè appareat, respondit dis- «tinguendum esse statum quietis à statu mo- «tûs. » Jam verò hujus cor. 2. demon- strationem dedimus (274.); aliam, quam NEWTONUS indicat, exposuerunt Comes *Riccatus* in citatis Exercitationibus, & *Eustachius Manfredius* in adnotationibus ad cap. 1. tractatûs *Guilelmini* de natura flu- minum (quod præclarum opus post fata summi viri, Clariss. Fratres *Gabriel* & *Heraclitus Manfredi*. an. 1739. Bononiæ edi curarunt.) Demonstratio sic potest exponi. Quo tempore cylindrus aquæ, cujus basis æqualis est foramini EF, & altitudo GI vi ponderis sui cadendo describeret alti- tudinem IG, & velocitatem aquæ exilien- tis acquireret; eodem tempore è forami- ne EF efflueret aquæ quantitas æqualis al- teri cylindro aqueo, cujus basis est fora- men EF, & longitudo 2 GI (30. *lib.* 1.), id est, cylindro prioris duplo; & ideò ob velocitatem quam cylindrus per altitudinem IG, cadendo acquirit, æqualem velocitati aquæ exilientis, quantitas motûs in illo cy- lindro vi ponderis ejusdem cylindri genita, est ad quantitatem motûs eodem tempore in aquâ exiliente productam ut 1 ad 2. Sed vires uniformes quibus cylindri cadentis & aquæ exilientis motus generantur, sunt ut motûs quantitates eodem tempore à viri- bus illis genitæ (15. *lib.* 1). Quare pon- dus cylindri aquæ, cujus basis est foramen EF, & altitudo GI, est ad vim quâ to- tus aquæ exilientis motus generari potest ut 1 ad 2, & proinde hæc vis æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ cujus basis & foramen EF & altitudo 2 GI. Q. E. D.

(e) * *Nam circulus EF est ad circulum AB, in subduplicatâ ratione altitudinis IH, ad altitudinem IG* (per cor. 1.) *id est, in simplici ratione mediæ proportionalis IO, ad altitudinem IG*, ideoque factum ex circulo AB in altitudinem 2 IO æquale est facto

titudinem IG, hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I describere potest altitudinem IH, aqua egrediens ([f]) æqualis erit cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo est $2\,IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G describit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, ([g]) id est, aqua tota in solido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ cylindrorum, id est, cylindro cujus basis est AB & altitudo $2\,HO$. Et propterea aqua tota in vase $ABDC$ est ad aquam totam cadentem in solido $ABNFEM$ ut ([h]) HG ad $2\,HO$, id est, ut $HO+OG$ ad HO, seu $IH+IO$ ad $2\,IH$. Sed pondus aquæ totius in solido $ABNFEM$ in aquæ defluxum ([i]) impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2\,IH$, ([k]) atque ideo ut summa circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

([l]) *Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase $ABDC$ est

facto ex circulo EF in altitudinem 2 IG, aut, quod idem est, cylindrus cujus basis est circulus EF & altitudo 2 IG, æquatur cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo 2 IO.

(f) * *Æqualis erit cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo* 2 IH. Eadem enim aquæ quantitas eodem tempore transit per circulos AB, & EF (271) & quantitas aquæ per circulum AB, transeuntis eo tempore quo gutta cadendo describere potest altitudinem IH, æqualis erit cylindro aqueo cujus basis est circulus AB & altitudo 2 IH. (30. lib. 1.).

(g) * *Id est aqua tota.* Nam ex iis quæ ante cas. 1. dicta sunt, manifestum est aquam totam prædicto solido contentam, per foramen EF eodem tempore effluere, quo aquæ gutta vi gravitatis suæ è loco I per H ad G cadendo describit altitudinem HG.

(h) * *Ut HG ad 2 HO &c.* Volumen aquæ in vase ABDC contentæ æquatur capacitati vasis seu cylindro cujus basis est circulus AB, & altitudo HG; & propterea aqua tota in vase ABDC, est ad aquam totam cadentem in solido ABNFEM, ut HG ad 2 HO (ex dem.), id est, ut HO + OG ad 2 HO, & quia (per hyp.) $IH:IO = IO:IG = IO - IH : IG - IO = HO:OG$, erit $HO+OG : 2\,HO = IH+IO : 2\,IH$. 275.

(i) *Impenditur*, ut probatum est initio cas. 1.

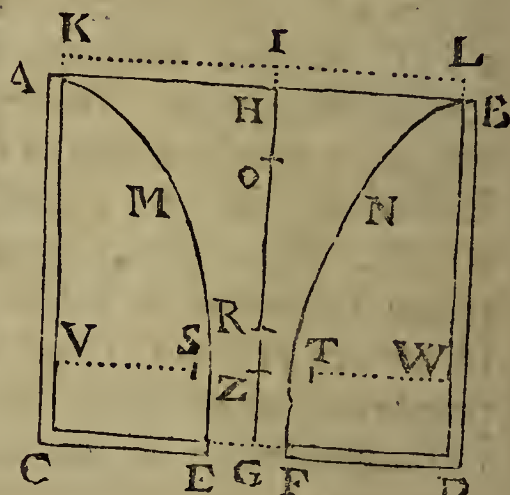
(k) * *Atquè ideò ut summa circulorum.* Quoniam enim (*per hyp.*) est IH ad IO ut IO ad IG, erit etiam IH + IO ad 2 IH ut IG + IO ad 2 IO, sed (ex modò dem.) circulus AB est ad circulum EF ut IG ad IO, ideóque summa circulorum AB & EF ad duplum circulum EF ut IG + IO ad 2 IO seu ut IH + IO ad 2 IH. Quarè patet propositum.

(l) * *Cor.* 4. Pondus aquæ totius in vase ABDC sit *P* ponderis illius pars quæ in defluxum impenditur sit *p* & hinc *P*—*p*, pars ponderis totius quæ fundo vasis seu plano æquali differentiæ circulorum CD & EF sustinetur & in defluxum non impenditur. Et (*per cor.* 3.) erit $P:p = AB+EF : 2\,EF$, ac proindè $P : P-p = AB+EF : AB-EF$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum *A B* & *E F* ad differentiam eorundem circulorum.

(m) *Corol.* 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *A B* & *E F* ad duplum circulum minorem *E F*, sive ut area fundi ad duplum foramen.



(n) *Corol.* 6. Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *A B* ad summa circulorum *A B* & *E F*, sive ut circulus *A B* ad excessum dupli circuli *A B* supra fundum. Nam ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum *A B* & *E F* ad summam eorundem circulorum, per cor. 4.: & pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *A B* ad differentiam circulorum *A B* & *E F*. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *A B* ad summam circulorum *A B* & *E F* (o) vel excessum dupli circuli *A B* supra fundum.

Corol. 7. Si in medio foraminis *E F* locetur circellus *P Q* cen-

(m) * *Cor.* 5. Cùm sit $P:p = AB + EF : 2EF$, erit quoque $P - p : p = AB - EF : 2EF$. Est autem area fundi æqualis differentiæ circulorum A B & E F.

(n) * *Cor.* 6. *Ponderis autem pars quâ solâ fundum urgetur*, sive pondus aquæ quæ in spatio solido C E M A D F N B continetur, *est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit* & quæ æquatur solido aqueo cujus basis est differentia circulorum A B & E F, & altitudo G H, *ut circulus &c.*

(o) * *Vel excessum dupli circuli A B suprà fundum.* Cùm fundum æquale sit differentiæ circulorum A B & E F, excessus dupli circuli A B, suprà fundum est $2AB - AB + EF$, seu $AB + EF$.

centro *G* descriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *G H*. Sit enim *A B N F E M* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *G H* ut supra, & congelari intelligatur aqua omnis in vase, (p) tam in circuitu cataractæ quàm supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit *P H Q* columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *G H*. Et finge cataractam hancce pondere suo toto cadere & non incumbere in *P H Q*, nec eandem premere, sed liberè & sine frictione præterlabi, nisi forte in ipso glaciei vertice quo cataracta ipso cadendi initio incipiat esse cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *A M E C*, *B N F D*

(p) * *Tam in circuitu cataractæ.* Quemadmodum enim suprà antè cas. 1um., aqua omnis cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum illiusque effluxum per foramen E F inutilis erat, in circuitu cataractæ congelata supponebatur, idque rectè factum experimentis posteà ostensum est, ità hic loci congelata supponi potest aqua omnis in vase tam in circuitu cataractæ quàm suprà circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ effluxum per spatium annulare E P, Q F, non requiritur; Et quemadmodum glacies in circuitu cataractæ constituta, C E M A, D F N B pertingebat ad superficiem A B seu terminum glaciei continuò liquescentis K A B L, ità aqua suprà circellum congelata producitur ad punctum H, in eâdem superficie A B positum; & uti glacies *in circuitu cataractæ convexa est versùs cataractam cadentem* (272), *sic etiam columna aquæ suprà circellum congelatæ PHQ convexa erit versus cataractam cadentem AHPEM, BHQFN*; * Considerari enim potest axis H G ut paries vasis cujus sectio sit H G C A, & foramen in fundo factum sit E P, qualiscumque autem sit Lex quâ effluit aqua ex vase, eodem modo quo factum est à NEWTONO in hujus demonstrationis casu primo, concipi potest cataracta trans glaciem effluens, adhibitis cautionibus illic notatis, ut hæc Hypothesis Mathematica congruat cum verâ effluxus aquæ Lege, quâtenus ad copiam aquæ effluentis dato tempore, quo posito evidens est lineam H P convexam sumi debere. Quâpropter si ex punctis P & Q ad punctum H ducantur lineæ rectæ, quæ cum diametro P Q triangulum constituant, conus ex revolutione hujus trianguli circà axem H G genitus, totus continebitur in solido quod per rotationem figuræ convexæ P H Q circâ eundem axem H G generatur. Hoc igitur solidum, seu columna P H Q suprà circellum congelata, magnitudine superat conum illum 275.

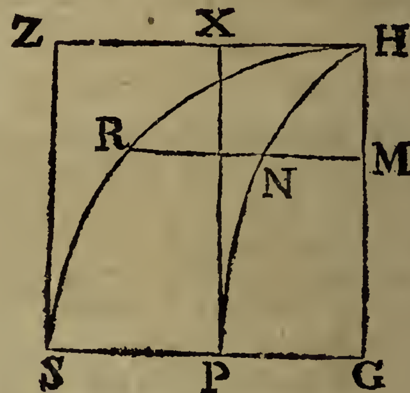
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

BNFD convexa eſt in ſuperficie internâ *AME*, *BNF* verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit verſus cataractam, & propterea major cono cujus baſis eſt circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id eſt, major tertiâ parte cylindri eâdem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere coni ſeu tertiæ partis cylindri illius majus eſt.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* ſuſtinet, minus eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *HG*. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium ſphæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt *HG*. (q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maximè directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi *PQ* (r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua

illum cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo H G. Quarè (*per prop. X. lib.* 12. *Elem.*) columna congelata P H Q, major eſt tertiâ parte cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo G H. Sed ſicut fundum E C, F D ſuſtinet pondus aquæ in ſpatio ſolido C E M A, D F N B contentæ, ità circellus P Q ſuſtinet pondus columnæ aquæ P H Q, id eſt, pondus quod majus eſt pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo G H.

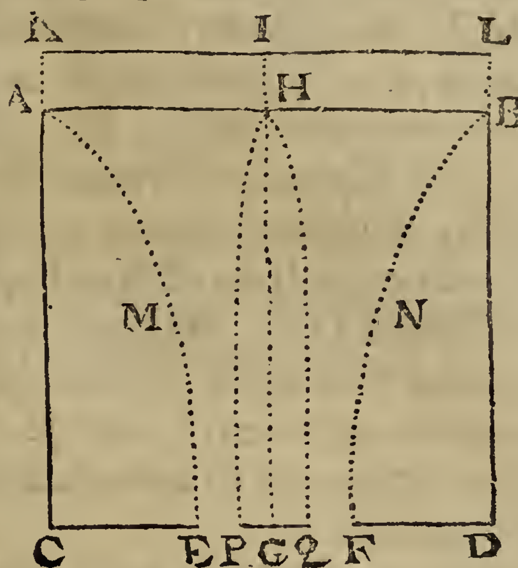
(q) * *Et hæc figura æqualis erit &c.* Centro G, & ſemiaxibus conjugatis G H & G P, deſcribatur ellipſeos quadrans H N P, & centro eodem G ac radio G H circuli quadrans H R S, compleanturque rectangula H G P X & H G S Z. Ducatur in circulo ordinata quævis R M, ellipſi occurrens in N, erit R M ad N M, in datâ ratione S G ad P G (247. *lib.* 1.) & propterea ſi figuræ illæ circà axem H G revolvantur, circulus quem radius M R in hâc revolutione deſcribet, erit ad circulum radio M N deſcriptum in datâ ratione SG^2 ad PG^2, ſeu in datâ ratione cylindri quem rectangulum H G S Z ro-



tando deſcribit ad cylindrum ex rotatione rectanguli H G P X genitum; undè (*per cor. Lem. IV. lib.* 1.) hæmiſphærium ex revolutione quadrantis circuli H R S G genitum, eſt ad hemiſphæroidem ex rotatione quadrantis ellipſeos H N P G in eâdem ratione. Cum igitur hemiſphærium ſit ad cylindrum circumſcriptum ut 2 ad 3 (170. *lib.* 2.) erit etiam hemiſphærois ad cylindrum circumſcriptum qui per rotationem rectanguli H G P X generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q. E. D.

(r) * *In angulo nonnihil acuto.* Nam quemadmodum angulus quem cataractæ ABNFEM

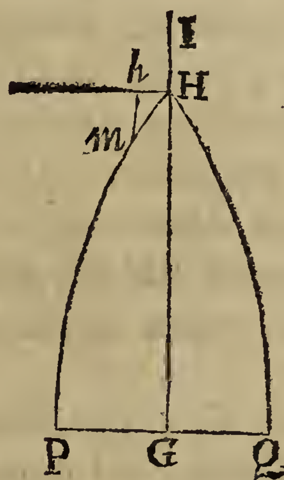
aqua cadendo perpetuò acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cùm angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes (s) jacebit intra dimidium sphæroidis. (t) Eadem verò sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem sphæroidis sit infinitè velocior quàm ejus motus horizontem versus. (u) Et quò minor est circellus PQ, eò acutior erit vertex columnæ; & circello in



ABNFEM superficies externa AME, BNF cum basi CE, DF constituit, est semper acutus, quia aqua cadendo semper acceleratur (272.) Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ PHQ superficies externa concurret cum basi PQ in angulo acuto HPQ, HQP. Quia verò circulo PQ evanescente, seu coincidente HP cum axe HG, angulus ille HPG rectus evadit; si circulus est valdè parvus; angulus HPG erit fere rectus seu nonnihil acutus.

(s) *Jacebit intrà dimidium sphæroidis.* Quia (ex naturâ ellipseos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus constituunt, sphæroidis superficies cum circello PQ, concurrit in angulo recto.

(t) * *Eadem verò sursum acuta erit.* Cùm enim partes aquæ duplici motu cieantur in H, alio verticali qui lapsu per altitudinem IH acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad se mutuò accedunt, uti suprà antè [cas. 1um. dictum est, atquè ideò guttula aquæ in H, lineam curvam HP motu composito describat, necessum est ut angulus PHG sit acutus, & proindè columna PHQ cuspidata in H. Describat enim guttula aquæ lineam quam minimam Hh, motu horizontali, & eodem temporis momento lineam hm, motu verticali, atquè arcum Hm motu composito; & velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut Hh ad hm,

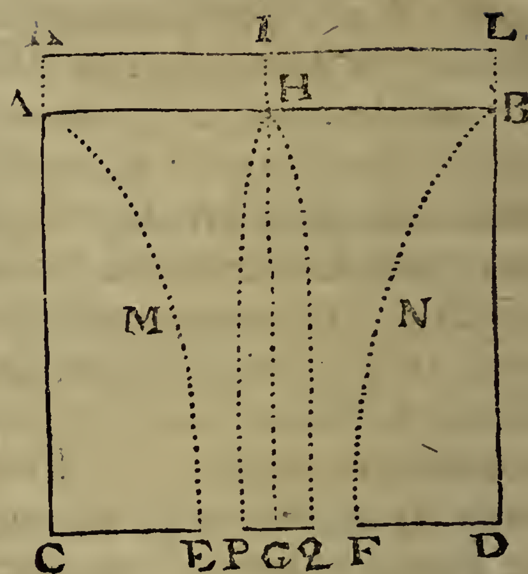


id est, ut sinus hmH seu mHG ad sinum anguli hHm. Sed evanescente angulo hHm, seu angulo mHG recto existente, sinus anguli mHG, infinitè major est sinu anguli hHm. Quare si angulus mHG rectus sit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quàm motus ejus verticalis. Quod absurdum est; angulus igitur mHG acutus est. 276.

(u) * *Et quò minor est circellus PQ.* Nam si circellus PQ ità augeatur, ut adæquet foramen EF illudque occludat, columna PHQ evadet cylindrica, & recta mh coincidente cum Hh angulus mHG rectus erit; & contrà circello in infinitum diminuto, coincidet HmP, cum axe HG, angulusque mHG evanescet. Columna igitur tam ad superiores partes versùs H, quàm ad inferiores partes versùs P & Q, jacebit intrà dimidium sphæroidis.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVI. Probl. VIII.

in infinitum diminuto, angulus *PHQ* in infinitum diminuetur & propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo *GH*. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.



Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$ quamproximè. (x) Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni & hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen *EF*; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *GH*.

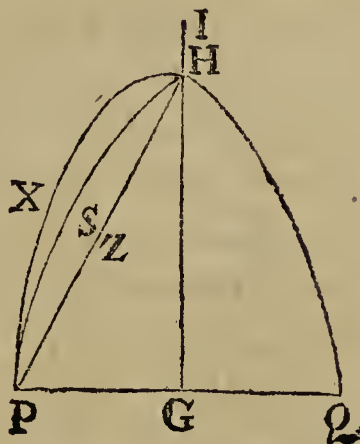
Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}GH$, (y) ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$, sive ut circulus *EF* ad excessum circuli hujus supra semissem circelli *PQ* quamproximè.

(x) * *Nam pondus hocce est medium arithmeticum.* Cùm enim columna illa aquæ, quam circellus valde parvus sustinet, major sit tertiâ parte cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo HG (*cor.* 7.), & minor duabus tertiis partibus ejusdem cylindri (*cor.* 8.), erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3}PQ \times HG$; & $\frac{2}{3}PQ \times HG$. Est autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ summæ illorum cylindrorum, id est, cylindro $\frac{1}{2}PQ \times HG$; cujus basis est circellus PQ, & altitudo $\frac{1}{2}HG$.

(y) * *Ut* EFq *ad* $EFq - \frac{1}{2}PQq$. Hæc enim suppositio superioribus determinationibus satisfacit. Nam sit p pondus aquæ quam circellus sustinet; P pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo GH; & si (juxtà cor. hoc 10.) ponatur $p : \frac{1}{2}P = EF^2 : EF^2 -$

$\frac{1}{2}$ P.

$\frac{1}{2} PQ^2$, erit $p = \frac{\frac{1}{2} P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2} P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2} = \frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$ ſemper major eſt quantitate $\frac{1}{3}$ P, quod cor. 7. ſatisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$, minor eſt quàm $\frac{2}{3}$ P, ubi circellus eſt, ſatis parvus ſeu quamdiu $2\overline{PQ}^2 < EF^2$ (cùm enim ſit $\overline{PQ}^2 = \frac{EF^2}{2}$, tunc illa quantitas p eſt $\frac{2P \times \overline{EF}^2}{3EF^2} = \frac{2}{3} P$, (quæ eſt determinatio cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor eſt quàm foramen EF, fit $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = \frac{1}{2} P$, & ubi circellus adæquat foramen EF, eſt $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = P$, quæ duo cum cor. 9. determinationibus congruunt.



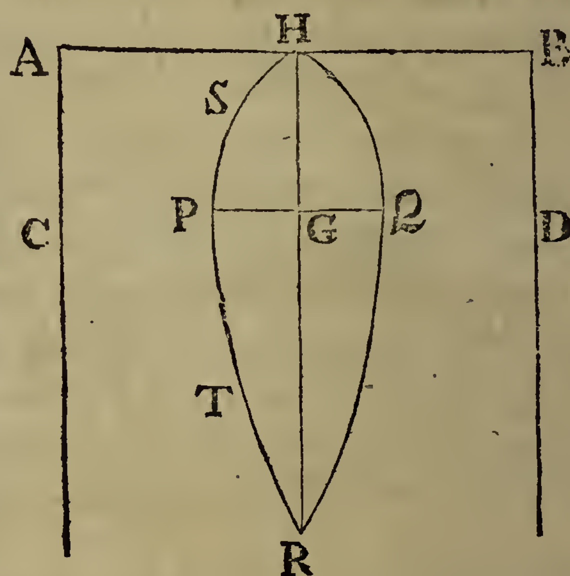
277. Si circellus PQ ſit valdè parvus, & vertice P axe PG deſcribatur per punctum H, parabolæ arcus PSH, & figura PSHG circà HG convolvatur, ſolidum inde genitum columnam aquæ quam circellus ſuſtinet exhibebit quam proximè. Nam angulus SPG quem parabola cum axe PG, continet, rectus eſt, & ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ ſuperficies cum circello valdè parvo PQ efficit (*cor.* 8.); & evaneſcente PG, angulus SHG arcu parabolæ SH & rectâ HG comprehenſus fit infinitè parvus, ut oportet (*per idem cor.* 8.). Præterea ſi jungatur recta PZH, & centro G, ac ſemiaxibus conjugatis GH, & GP deſcribatur ellipſeos quadrans PXH, & figuræ PZHG, PSHG, PXHG circà axem HG convolvantur, ſolidum quod per revolutionem figuræ parabolicæ PSHG generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli PZHG genito, & minus hemiſphæroide quam figura PXHG rotata deſcribit, quod cor. 7°. & 8°. ſatisfacit. Tandem, calculo inito, facile patet ſolidum quod per convolutionem figuræ PSHG gignitur, eſſe ad cylindrum cujus baſis eſt circellus PQ, & altitudo GH, ut 8 ad 15, quæ ratio non multùm aberrat à ratione 1 ad 2 quam NEWTONUS in cor. 9. invenit. 277

LEMMA IV.

Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia circuli eâdem diametro descripti & eâdem velocitate secundùm lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

(z) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur.

PRO-



278. Si circulus P Q valdè parvus maneat respectu foraminis E F, foramen verò E F quantumvis augeatur finitum sit, & vas A E D C infinitum evadat, æquales erunt altitudines I G & H G, & velocitas aquæ in loco P Q, ea erit quàm aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem H G, acquirere potest (*per cor. 1. Prop. hujus 26.*). Iisdem positis, si vas A B D C infrà circulum P Q continuetur, & aqua postquam pervenit ad locum P Q, solâ vi insitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco P Q, sitque P Q R columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptissimum alterius aquæ motum non requiritur, ut suprà de columnâ P H Q dictum est; erit G R = 2 G H & P T R ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis P G, & ordinata G R. Nam * fingatur considerari lapsum ejus aquæ quæ per conoeidem HPQ moveretur seorsim à lapsu reliquæ aquæ Vasis, liquet quod eo tempore quo aquæ gutta motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoeide H P Q continetur; ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit H G, & Basis circulus P Q, particula verò G celeritate ex lapsu per H acquisita describet 2 H G sive G R, tota ergo aqua quæ per Conoidem H P Q movebitur occupabit figuram cujus Basis est circulus P Q, cujus altitudo est 2 H G, & soliditas dimidium cylindri cujus P Q foret Basis & altitudo 2 H G, sed per præcedentem Paraboloeides est ferè dimidium cylindri circumscripti: ergo aqua quæ per Conoidem effluit eum Paraboloeidem occuparet: est ergo columna P Q R columna aquæ congelatæ quæ ad promptissimum aquæ reliquæ circumpositæ motum non requiritur. Hæc ad demonstrationem Scholii proximi hic adnectenda visa sunt; utrum satis rectè NEWTONIANÆ demonstrationis indolem simus assecuti, videat B. Lector,

Si quid novisti rectiùs istis
Candidus imperti; si non, his utere mecum.

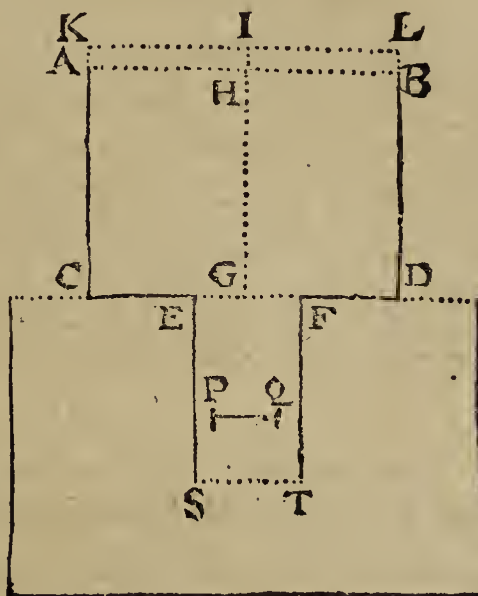
(z) * *Nam latera cylindri &c.* Hic enim latera cylindri esse politissima, & medii tenacitatem & frictionem esse nullam supponitur.

279. Lemma. *Vires uniformes sunt directè ut quantitates motus quas generant, & inversè ut tempora quibus illas generant*, (13. & 15. lib. 1.); & quia motûs quantitates sunt ut massæ & velocitates conjunctim, sive ut volumina & densitates & velocitates, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum & velocitatum & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; cùmque tempora illa sint ut

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.

Nam si vas *A B D C* fundo suo *CD* superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum *E F T S* horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus *P Q* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *C A* ad *K*, ut sit *A K* ad *C K* in duplicatâ ratione quam habet excessus orificii canalis *E F* supra circellum *P Q* ad circellum *A B*: manifestum est (*per cas.* 5. *cas.* 6. *& cor.* 1. *prop.* XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *K C* vel *I G* acquirere potest.



Et

ut spatia descripta directè & velocitates inversè (31. lib. 1.); *vires uniformes sunt quoque in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum & quadratorum velocitatis & ratione inversâ spatiorum descriptorum*, & quia velocitates sunt ut spatia descripta directè & tempora inversè, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex ratione voluminum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.*

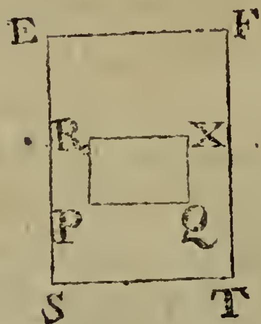
280. *Cor.* Quoniam cylindrorum volumina sunt ut eorum altitudines & diametrorum quadrata conjunctim; *vires uniformes quibus urgentur cylindri, sunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & velocitatum à viribus illis genitarum, & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; sunt etiam in ratione quæ componitur ex *rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, densitatum & quadratorum velocitatum, & ratione inversâ spatiorum descriptorum*; Sunt quoque vires illæ in ratione compositâ *ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.* Ubi prædictarum quantitatum, ex quibus virium ratio composita est, aliquæ datæ sunt, iis deletis habetur virium ratio. 280.

Et (*per corol.* x. *prop.* XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita; (a) ut lineola HI evanescat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proximè. Nam vis aquæ, (b) uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & ascendat circellus in fluido undique compresso, & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis (c) ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, (d) hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis quâ præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, sive ut $EFq - PQq$ ad EFq.

(a) * *Ut lineola HI evanescat.* Per cor. 1. prop. 37. aut (per not. 275.).

(b) * *Uniformi motu defluentis.* (Per cas. 6. prop. 36.).



(c) * *Ut differentia circulorum.* Velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore descripta; sed inter eadum circulus PQ spatium solidum, seu cylindrum PQXR describit, descendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, & propterea altitudo verticalis per quam aqua descendit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri PQXR per valorem sectionis annularis inter circulum PQ & vasis latera ES, FT comprehensam, ideóque si $\overline{EF}^2$ & $\overline{PQ}^2$, circulos, & RP, lineam rectam significent, altitudo illa per quam aqua descendit est $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quarè velocitas circuli ascendentis est ad velocitatem aquæ descendentis ut altitudo RP, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id est, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad $\overline{PQ}^2$, sivè ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ.

(d) * *Hoc est ad velocitatem relativam.* Cùm circulus ascendat & aqua descendat, velocitas relativa æqualis est summæ velocitatum oppositarum circuli & aquæ. Velocitas absoluta circuli ascendentis dicatur V, velocitas absoluta aquæ descendentis v, & quia circuli sunt ut diametrorum quadrata, si EF, & PQ, pro circulorum diametris sumantur; erit (*ex dem.*) $V : v = EF^2 - PQ^2 : PQ^2$, & ideo $V : V + v = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.

E F q. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius (*per legum corol.* v.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}$ *IG*, ut *E F q* ad *E F q* — $\frac{1}{2}$ *P Q q* quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirit, ut *E F q* — *P Q q* ad *E F q*.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter *E F q* — *P Q q* & *E F q*, interque *E F q* & *E F q* — $\frac{1}{2}$ *P Q q* accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *IG* acquirere potest, resistentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis *IG*, à quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; (e) & hâc velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem cylindri, hâc velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentiâ circelli (*per lemma* IV.) ideoque æqualis est vi quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, (f) generari potest quamproximè.

Sit

(e) * *Et hâc velocitate*, cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis I G, seu quadruplum longitudinis suæ $\frac{1}{2}$ I G, describet (30. *lib.* 1.).

(f) * *Generari potest quamproximè*. Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, describit spatium 2 I G, proprio pondere cadendo describeret altitudinem I G, & velocitatem illam acquireret (30. *lib.* 1.). Cùm igitur resistentia æqualis sit ponderi cylindri, patet propositum. 280.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVII. Theor. XXIX.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis suæ describit (g), augebitur vel minuetur in eâdem ratione, ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli possit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis est resistentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma IV.

(h) Si densitas cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Resistentia itaque cylindri cujuscunque erit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel tolli, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut sit continuum, (i) continuum verò esse debet & non elasticum, ut pressio omnis, quæ ab ejus compressione oritur, propagetur in instanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo resistentiam non mutet. Pressio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & resistentiam creat.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motûs in cylindro cujus basis, densitas & velocitas datæ sunt, augetur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri seu voluminis, & tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis suæ describit, augetur vel minuitur in eâdem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. lib. 1.) ideoque (179) vis *illa quâ motus auctus* &c.

(h) * *Si densitas cylindri* cæteris manentibus, *augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli potest, in eâdem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cùm igitur cylindri cujuscunque resistentia æqualis sit vi quâ motus cylindri aquæ ejusdem basis, altitudinis & velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, & vis hæc sit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari possit vel tolli, ut densitas aquæ ad densitatem cylindri, consequens est ut resistentia cylindri cujuscumque sit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli potest, ut densitas aquæ ad densitatem cylindri quamproxime.

(i) * *Continuum verò esse debet & non elasticum.* Nam si fluidum esset elasticum, ipsius partes per compressionem condensarentur, & deinde rarefierent, atque ità pressio per motum progressivum, qui instantaneus esse non potest, propagaretur. At si fluidum continuum sit & densari compressione nequeat, pressio propagabitur in instanti. Experimentis verò constat aquam in statu naturali constitutam vix posse condensari, seu in spatium minus compressione redigi; cùm è contrà aër maximæ condensationis & rarefactionis sit capax.

creat. Preſſio autem quæ oritur à compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motûm in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quàm in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinitè velocior ſit quàm motus corporis preſſi. Infinitè autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

([k]) *Corol.* 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione denſitatis mediorum.

([l]) *Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed cylindrus in medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: reſiſtentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel

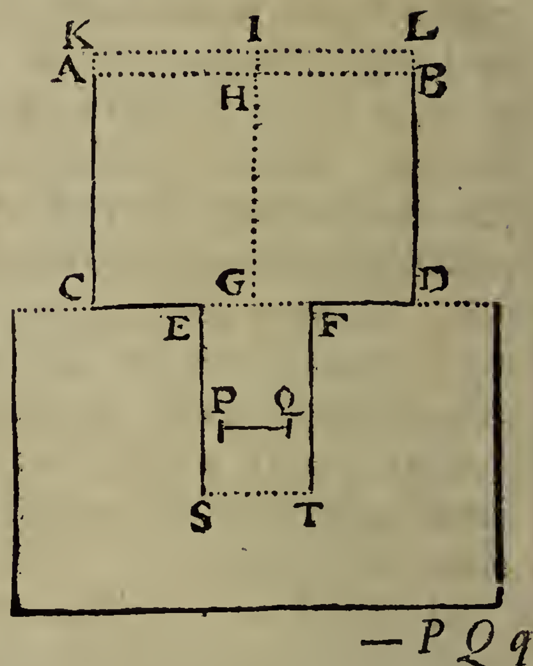
(k) *Cor.* 1. Sic demonſtratur. Reſiſtentia cylindri cujuſque eſt directè ut denſitas medii & vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit vel generari vel tolli poſſit, & inversè ut denſitas cylindri (ex dem.); Sed vis illa uniformis eſt in ratione compoſitâ ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati diametri, denſitatis & quadrati velocitatis & ex ratione inversâ ſpatii deſcripti, ſeu ex ratione inverſâ longitudinis cylindri (280.) Quarè (per compoſitionem rationum & ex æquo), reſiſtentia cylindri cujuſcumque, ſi conferatur cum reſiſtentiâ alterius cylindri, eſt in ratione quæ componitur ex ratione denſitatis medii, & ratione duplicatâ diametri & duplicatâ ratione velocitatis. 280.

(l) * *Cor.* 2. Sic demonſtratur. * Si Canalis non ſit infinitus reſpectu baſeos cylindri incluſi, reſumantur ea quæ ſub initium Theor. iſtius 37. dicebantur; Primo nempe quod aſcendente circello in canali clauſo, velocitas relativa aquæ ſemper ſit ad ejus velocitatem ut baſis canalis

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.

Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione EFq $- PQq$



lis E F ad annulum E P sive ad differentiam circulorum E F & P Q sive ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$; Quæratur igitur altitudo I G talis ut velocitas lapsu per eam acquisita sit ad velocitatem circelli, ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$, & si fingatur circellus immotus in medio foraminis E F & aqua cadens ex altitudine I G ex vase amplissimo A B D B per illud foramen, cùm velocitas aquæ juxta circellum transiens eadem sit ac velocitas respectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauso motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis censenda est, sed actio aquæ sive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. 36. est ad cylindrum cujus basis est circellus altitudo $\frac{1}{2}$ I G sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, hæc itaque erit ratio Resistentiæ ad pondus cylindri aquei cujus basis est circellus & altitudo $\frac{1}{2}$ I G; Sed gravitas est vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$ I G sive 2 I G velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest eam ipsam velocitatem, & pondus cylindri est ipsa gravitas per massam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, est vis quæ dum percurritur quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest motum ejus cylindri eâ velocitate moti.

Cùm verò celeritas quæ lapsu per I G acquiritur sit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ suâ celeritate alio tempore percurret quàm si moveatur celeritate lapsu per I G acquisitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur & inversè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de describendo uniformiter eodem spatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) sunt inversè ut velocitates, ideoque Pondus cylindri est ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur bis directe ut celeritas lapsu per I G acquisita, ad celeritatem Cylindri, sive bis ut EF^2, ad $EF^2 - PQ^2$.

Ergo ex æquo Resistentia est ad eam vim sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ$. At, nec resistentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, sed tantum densitate mutatâ ut ex ipsa propositionis demonstratione liquet, est autem vis quâ motus in Cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum suæ longitudinis suâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, sed diversæ densitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut densitas

—PQq ad EFq bis: (m) resistentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interera dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

Scholium.

In hâc propositione resistentiam investigavimus quæ oritur à solâ magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglectâ resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hâc propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & (n) undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, (o) idque in eâ ferè ratione quâ effluxum aquæ è vase diminuit, id est in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maximâ copiâ transirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vase

sitas aquæ sive medii, ad densitatem Cylindri, ergo tandem Resistentia est ad vim quâ motus in Cylindro generari vel tolli potest quo tempore quadruplum suæ longitudinis propriâ cum velocitate describit, ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$ & ut densitas medii ad densitatem Cylindri. Q. E. D.

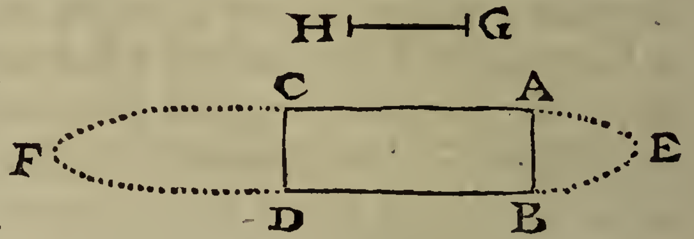
(m) * *Resistentia cylindri erit ad vim* Nam (per cor. 2. & hyp.) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ uniformiter describit vel generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri, & (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, est ad vim quâ idem ejusdem cylindri motus quo tempore longitudinem L uniformiter describit vel tolli possit vel generari, in ratione inversâ temporum, sive ob eamdem utrinque celeritatem in ratione inversâ spatiorum, hoc est, in ratione longitudinis L ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter describit tolli possit vel generati, ut densitas medii ad densitatem cylindri. 280.

(n) * *Et undiquè divergunt.* Vid. Prop. 41. & 42. lib. hujus.

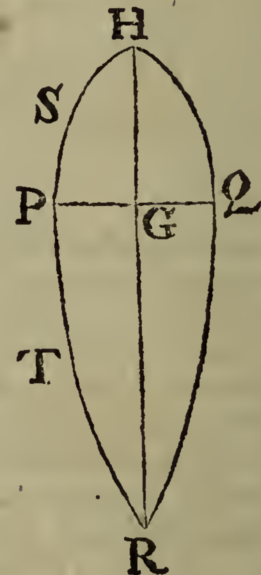
(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, sive aqua in planum circuli immotum impingat, sive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quiescente feratur.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

ſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hâc propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur & partes aquæ motu maximè directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum cylindro, & ſola maneat reſiſtentia, quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi, quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & (p) cylindro jungantur. Sit *ABCD* rectangulum, & ſint *AE* & *BE* arcus duo parabolici axe *AB* deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpatium *HG*, deſcribendum à cylindro cadente dum velociloci-



(p) * *Et Cylindro jungantur.* Ut num. 277. 278. factum eſt, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem HG acquirit & deinde moveatur uniformiter junctæ ſunt glaciei columnæ duæ parabolicæ P H Q & P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas ac motus ſunt inutiles, & parabolarum PSH, PTS erat vertex principalis P, axis PG, & ordinatæ GH, ac GR, ideòque parabolæ PSH, latus rectum $\frac{GH^2}{PG}$, & parabolæ PTR latus rectum $\frac{GR^2}{PG}$ ſeu $\frac{4\,GH^2}{PG}$ prioris $\frac{GH^2}{PG}$, quadruplum (per theor. 1. de parab.). Hinc ſi aqua quieſcat & circulus P Q in aquâ moveatur cum eâdem velocitate quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem HG acquirit, columnæ illæ PHQ & PRQ aquas fere exponent quarum fluiditas ac motus inutiles ſunt ut partes aquæ motu maximè directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli PQ ſubſtitui poteſt cylindrus ABDC eâdem velocitate motus, & cujus baſes AB, CD circulo PQ æquales ſint, quibus proinde baſibus adjungendæ ſunt columnæ duæ AEB, CFD columnis PHQ, PRQ æquales reſpectivè, atque idipſum eſt quod NEWTONUS in hoc ſcholio fecit. Siquidem junctâ EF, mediis baſibus AB, CD, occurrente in L & K, & poſitis AB

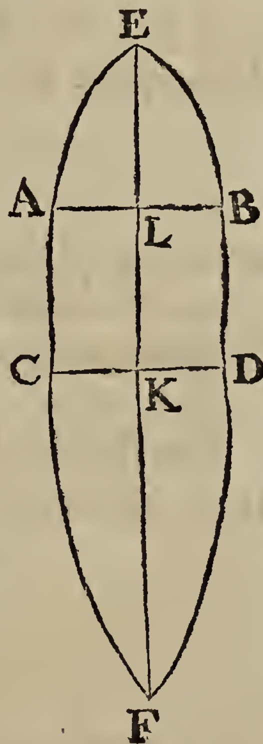


locitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}$ AB. Sint etiam CF & DF arcus alii duo parabolici, axe CD & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hâc propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo 4 AC motu illo uniformiter continuato describatur vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproximè. (q) Et hâc vi resistentia minor esse non potest quàm in ratione 2 ad 3. *per corol.* 7, *prop.* XXXVI.

LEM-

A B & C D ipsi P Q æqualibus; est (*per Newt. constr.*) Parabolæ A E latus rectum $\frac{HG^2}{AL}=\frac{HG^2}{PG}=\frac{EL^2}{AL}$, & ideò EL=HG. Et simili modo parabolæ C F, *Newtonianâ* constructione descriptæ, latus rectum est $\frac{4HG^2}{PG}=\frac{KF^2}{CK}=\frac{KF^2}{PG}$, ac proindè KF $=2HG=GR$. Columnæ igitur A E B & C F D, non differunt à columnis P H Q & P R Q.

(q) * *Et hâc vi resistentia minor esse non potest* &c. Resistentia (per cor. 7. prop. 36.) minor esse non potest pondere cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q (sive A B) & altitudo $\frac{1}{3}$ E L seu $\frac{1}{3}$ H G. (vid. figuras superiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis sui cadendo & casu suo describendo altitudinem E L acquirit, æqualis est velocitati cum quâ cylindrus A C D B, in aquâ movetur (ex dem.) & ideò cùm basis A B sit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri A B D C motus, quo tempore longitudinem 4 A C uniformiter describit, generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri A B D C, & ratione altitudinis $\frac{1}{3}$ E L ad altitudinem A C, & ratione spatii 4 A C ad spatium 2 E L (280), id est, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri ABDC & ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri A B D C motus, intereadum longitudinem 4 A C, uniformiter describit, generari vel tolli possit, sit ad vim aliquam P, ut densitas cylindri A B D C ad densitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atquè ideò pondus cylindri aquæ, quo resistentia minor esse non potest; quam in ratione 2 ad 3. 280.



LEMMA V.

Si cylindrus, sphæra & sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successivè ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

(r) Nam spatia inter canalem & cylindrum, sphæram, & sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quòd aqua omnis supra cylindrum sphæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in *corol.* VII. *prop.* XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta aqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per lemma V. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scho-

(r) * *Nam spatia inter canalem & transversas sectiones, seu latitudines maximas cylindri, sphæræ & sphæroidis per quæ aqua ransit, sunt æqualia.* Vid. Schol. sequens.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in ſcholio propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & caudâ ſint acutis. Sed nos in his lemmatis & propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de altè immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis, qualis eſt aer, quàm in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

PRO-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVIII. Theor. XXX.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.

(f) Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

(t) *Corol.* 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem

(f) * *Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria* (170. lib. I.) & propterea, cum eadem sit globi & cylindri densitas eademque velocitas (ex hyp.) quantitas motûs globi est ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, & tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter describit, est ad tempus quo cylindrus eâdem uniformi velocitate quadruplum longitudinis suæ, seu duodecim tertias diametrorum globi describit, etiam ut duo ad tria. Quare (178) vis uniformis quâ totus globi motus intereadum octo tertias partes diametri propriæ describit tolli possit vel generari, est ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi describit vel tolli vel generari possit ut duo ad tria directè & duo ad tria inversè, id est, in ratione æqualitatis. *Resistentia autem cylindri &c.*

(t) * *Cor.* 1. Patet per cor. 1. prop. 37., quiâ resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri circumscripti.

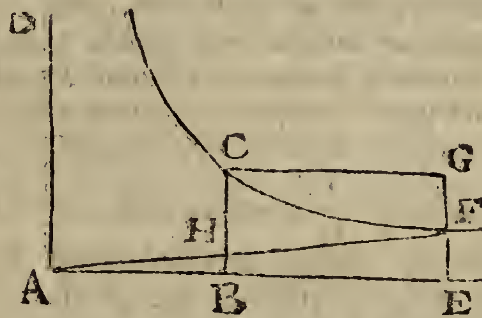
tatem fluidi. Nam globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, (u) describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas globi ad densitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore globus octo tertias diametri suæ eadem velocitate describit, ut (x) densitas fluidi ad densitatem globi: ideoque per hanc propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, & propterea globum accelerare non potest.

(y) *Corol.* 3. Datâ & densitate globi & velocitate ejus sub initio motus, ut & densitate fluidi compressi quiescentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum, per *corol.* VII. *prop.* XXXV.

(u) * *Describet spatium quod erit ad octo tertias partes diametri suæ &c.* Describet enim spatium duplum illius quod vi ponderis sui comparativi sine resistentia cadendo describit (30. lib. 2.), id est, *spatium quod erit ad octo tertias partes &c.*

(x) * *Ut densitas fluidi ad densitatem globi.* Sit D diameter globi, 2 F spatium quod sit ad $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi; & tempus quo globus uniformiter describit spatium $\frac{8}{3}$ D, erit ad tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium 2 F, ut $\frac{8}{3}$ D ad 2 F (5. *lib.* 1.), id est, ut densitas fluidi ad densitatem globi. Cùm igitur vires uniformes sint reciprocè ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propositum.

(y) 282. Cor. 3. *Datâ & densitate globi & velocitate ejus sub initio motus & densitate fluidi datur ad omne tempus & velocitas globi, & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum.* * Primum, ex datâ densitate globi, & densitate fluidi, invenietur, per Cor. 2, vis æqualis resistentiæ cùm velocitas ea est quam



acquirere potest is globus, cadendo in vacuo per vim sui ponderis comparativi & describendo spatium quod sit ad quatuor tertias Diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi. 282.

Secundò, ex datâ hac resistentiâ invenietur resistentia quæ competit velocitati globi de quo agitur sub initio ejus motus, quia resistentiæ hic supponuntur esse ut quadrata velocitatum; istâ autem resistentiâ cognitâ dabitur tempus quo si hæc resistentia uniformiter ageret, totam velocitatem quam habet globus sub initio motus destruere posset, sicque si B C designet eam velocitatem initio motus simulque resistentiam ipsi competentem, designeturque per A B illud tempus quo ea velocitas per resistentiam uniformem destrui potest, & erecto perpendiculo A D, asymptotis A D, A B per punctum C describatur Hyperbolâ,

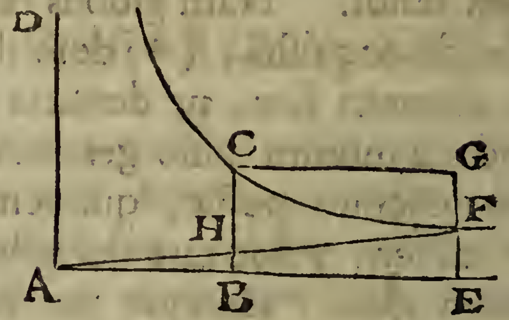
lâ, ex ejus Hyperbolæ constructione dabitur ad quodlibet tempus (quod designabitur per BE) velocitas residua EF, resistentia BH, & spatium descriptum $CBEF$; Quâ autem ratione hæc singula ad calculum revocentur, dicendum.

SECT. VII. PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

I. Vis illa quæ resistentiæ æqualis esse debet cùm Corpus habet velocitatem maximam quam lapsu suo in fluido dato acquirere potest; est ipsum pondus comparativum corporis, sit ergo A ejus pondus; Densitas data corporis est ad densitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurret cadendo spatium quod sit ad quatuor tertias Diametri suæ ut ejus densitas ad densitatem fluidi, sive, si dicatur D Diameter & dicatur F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem medii, ut determinetur tempus quo globus pondere B cadendo percurret spatium F posito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti secundi pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$ percurrit, & cùm spatia diversis viribus acceleratricibus descripta eodem tempore sint ut illæ vires, spatium $15\frac{1}{12}$ pedum pondere A uno minuto secundo percursum est ad spatium eodem tempore pondere B percursum ut A ad B. Ut autem est illud spatium, ad spatium F, ita quadratum minuti unius secundi ad quadratum temporis quo eo pondere B spatium F percurretur, quod tempus dicatur G, cumque velocitate per lapsum acquisitâ duplum spatii lapsu percursi uniformiter describatur ipso lapsus tempore, ideo velocitate pondere B tempore G acquisitâ, eodem tempore G describeretur $2F$, cùmque velocitas omnis exprimatur per spatium divisum per tempus, erit ea velocitas maxima $\frac{2F}{G}$ quæ in posterum dicatur H.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejusdem globi velocitate in eodem fluido eaque di-



catur M, resistentia ipsi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujusce M, ita est resistentia adversus velocitatem H cui pondus B æquiponet, ad resistentiam adversus velocitatem M, quam vocabo R; cum ergo prius data sit ratio A ad B dabitur etiam ratio A ad R ideoque dabitur spatium quod actione vi R uniformi suppositâ per unum minutum secundum describeretur, siquidem spatia per diversas vires uniformes acceleratrices descripta iisdem temporibus sunt ut illæ vires, ideoque A ad R ut $15\frac{1}{12}$ ped. ad spatium uno minuto secundo descriptum, cujus spatii duplum per unum minutum secundum divisum exprimit velocitatem vi R per unum minutum secundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim R uniformiter agentem velocitas M produci vel etiam destrui posset, velocitates enim per eamdem vim acquisitæ sunt ut tempora quibus acquiruntur; Ergo velocitas tempore unius minuti secundi acquisita est ad velocitatem M, ut unum minutum secundum ad tempus quo vis R velocitatem M generare vel tollere posset. Unde tandem in Hyperbolæ constructione datur valor temporis per lineam A B designati.

Sumatur ergo B E quod sit ad A B ut tempus quod assumere lubet ad tempus illud quo vis R velocitatem M quæ per BC exprimitur generare vel tollere potest uniformiter agendo, & ducatur ordinata EF, ea designabit velocitatem globi eo tempore superstitem quæ ex naturâ Hyperbolæ habebitur, est enim A E, ad A B, sicut B C sive M ad B E F, unde cum sit $AE = AB + BE$; sitque A B tempus mox inventum, B E

tempus

(z) *Corol.* 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem *corol.* VII.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

PRO-

282.

tempus assumptum, B C sive *M* velocitas data, datur etiam E F.

Datur pariter resistentia B H, est enim BC^2 ad EF^2 ut R ad hancce novam resistentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur spatium à corpore descriptum, datur enim spatium quod velocitate constanti *M* tempore B E percurritur; Est verò area B C G E ad spatium Hyperbolicum B C F E, ut spatium velocitate constanti *M* tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente, at ex naturâ Logarithmorum Hyperbolicorum spatium Hyperbolicum B C F E est Logarithmus quantitatis $\frac{AE}{AB}$, & quia Logarithmi earumdem quantitatum in diversis Logarithmorum seriebus sumpti sunt proportionales, sumatur Logarithmus illius quantitatis $\frac{AE}{AB}$ in Tabulis vulgaribus, fiatque ut Logarithmus denarii numeri in Tabulis (sive unitas) ad 2.30258509 qui est Logarithmus Hyperbolicus ejusdem denarii numeri, ita Logarith. quantitatis $\frac{AE}{AB}$ ex Tabulis desumptus ad Logarithmum Hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area B C F E, sit ergo dignitas Hyperbolæ $=1$, erit $BC=\frac{1}{AB}$ & area $BCGE=\frac{1}{AB}\times BE$, ideoque ut $\frac{BE}{AB}$, ad Logarithmum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ è Tabulis desumptum & multiplicatum per 2.30258509. Ita spatium velocitate constanti B C tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente. Q. E. I.

(z) * *Cor.* 4.;* Cum globus & fluidum ejusdem densitatis supponantur, resistentia isto in casu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli posset quo tempore octo tertias Diametri suæ uniformiter describeret; itaque sit B C motus globi, erit A B tempus quo uniformiter percurreret octo tertias suæ Diametri, sit E F, dimidium B C, quoniam EF exprimit residuum motum, PE erit tempus quo dimidia pars motus amissa fuerit, sed BC ad EF ut A E ad A B & est B C ad E F ut 2 ad 1, per const. ergo etiam $AE=2AB$ & $BE=AB$, ideoque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias Diametri suæ; Sed illud spatium uniformiter percursum est ad spatium percursum velocitate per resistentiam decrescente ut $\frac{BE}{AB}$ (sive $\frac{1}{1}$) ad Logarithmum è Tabulis desumptum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ (sive $\frac{2}{1}$) multiplicatum per 2.30258509, & ille Logarithmus est. 3010300, productum ergo erit .6931 &c. ideo 1. ad .6931 &c. ut $\frac{8}{3}$ D, ad 1.84832 D, quod quidem paulo minus est quam 2 D, ideo Globus in fluido ejusdem densitatis dimidiam sui motus partem prius describet *quam longitudinem duarum ipsius Diametrorum descripserit.* Q. E. D.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXIX. Theor. XXXI.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproximè.

Patet *per corol.* 2. *prop.* XXXVII. procedit verò demonstratio (a) quemadmodum in propositione præcedente.

Scholium.

In propositionibus duabus novissimis (perinde ut in lem. v.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulùm. Sed augmentum illud in his propositionibus parvum erit & negligi potest, propterea quòd convexa superficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resisten-

(a) * *Quemadmodum in propositione præcedente.* Demonstratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc sunt: resistentia autem cylindri est ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi (*per cor.* 2. *prop.* XXXVII.); & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri, per Lem. V, VI, VII. Q.E.D.

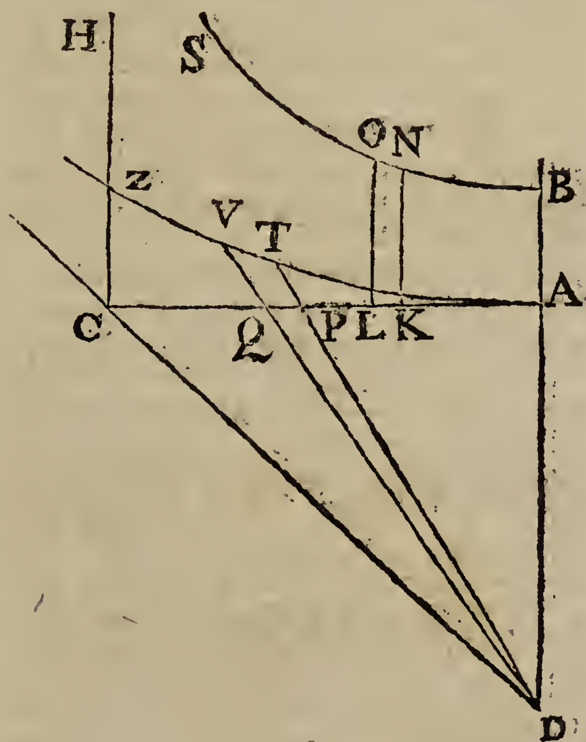
sistente, D diameter globi, F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem medii, id est, (b) ut A ad A — B, G tempus quo globus pondere B sine resistentiâ cadendo describit spatium F, & H velocitas quam globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima quâcum globus, pondere suo B, in medio resistente potest descendere, *per corol.* 2. *prop.* XXXVIII. & resistentia, quam globus eâ cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: resistentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, *per corol.* 1. *prop.* XXXVIII.

Hæc est resistentia quæ oritur ad inertiâ materiæ fluidi. Ea verò quæ oritur ab elasticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, (c) sic investigabitur.

De-

(b) 283. * *Id est, ut A ad A — B.* Densitates corporum ejusdem voluminis sunt eorumdem pondera in vacuo (2. & 3. *lib.* 1.); Sed A est pondus globi in vacuo, & A — B pondus æqualis globi aquæ etiam in vacuo; nam globus A aquæ immersum ponderis sui partem amittit æqualem ponderi paris voluminis æquæ (*per cor.* 6. *prop.* XX). Ergo &c.

(c) 284. * *Sic investigabitur.* Ut eorum quæ hic NEWTONUS profert, demonstratio facilius intelligatur, non nulla revocanda sunt, quæ in propositionibus VIII & IX. demonstravit. Sunto C H & A B rectæ ad datam A C perpendiculares, C H quidem infinita, & B A æqualis $\frac{1}{4}$ A C. Centro C asymptotis G H, C A describatur per punctum B hyperbola B N S capiantur A C, A P, A K continuè proportionales, & per punctum K ducatur ad hyperbolam recta K N parallela A B. Et si corpus grave è quiete cadat in medio quod in duplicatâ velocitatis ratione resistit, exponatque area A B N K spatium à corpore cadente descriptum; velocitas corporis hocce casu acquisita exponi poterit per lineam A P, & ipsius velocitas maxima per datam A C (*per cor.* 1. & 2 *prop.* VIII). Producatur jam B A ad D ut sit A D æqualis A C, jungatur D C, &



centro D, asymptoto D C ac vertice principali A describatur altera hyperbola A T Z, quæ lineam D P productam secet in T, & lineam D Q ipsi D P infinitè propinquam in Y; & sector evanescens D T V erit æqua- 284.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Demittatur globus ut pondere suo B in fluido descendat; & sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, sitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquisita

lis $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, & sector ATD tempus exponet quo corpus cadendo describit spatium ABNK & quo velocitatem AP acquirit (per casum 7. prop. IX.). Spatium verò quod corpus tempore quovis ATD cadendo describit, erit ad spatium quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo, describere potest, ut area ABNK ad aream ATD (*per cor.* 1. *prop.* IX), & tempus quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, erit ad tempus quo velocitatem maximam AC in medio non resistente vi ponderis sui comparativi cadendo acquirere posset, ut sector ATD ad triangulum ADC (per cor. 5. prop. IX.).

285. His præsuppositis, dicantur AC $=$ AD $= a$, AB $= \frac{1}{4}a$, AP $= x$, PQ $= dx$, & quia AC : AP $=$ AP : AK, erit AK $= \frac{xx}{a}$, CK $= \frac{aa-xx}{a}$, triangulum PDQ $= \frac{1}{2}a\,dx$, & sector DTV $= \frac{PDQ \times AC}{CK} = \frac{\frac{1}{2}a^3\,dx}{aa-xx} = \frac{\frac{1}{4}aa\,dx}{a+x} + \frac{\frac{1}{4}aa\,dx}{a-x}$; unde, sumtis fluentibus, habetur sector ATD $= \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{a+x} - \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{a-x} = \frac{1}{4}aa\,L.\,\frac{a+x}{a-x}$, cui quantitati nihil addendum vel subducendum est, quia ubi fit ATD $= 0$, & $x = 0$, evanescit, ut oportet. Ducatur LO parallela KN ipsique infinitè propinqua; & cum sit AK $= \frac{xx}{a}$ & (*per theor.* 4. *de hyp.*) KN $= \frac{CA \times AB}{CK} = \frac{\frac{1}{4}a^3}{aa-xx}$ ac KL $= \frac{2x\,dx}{a}$, erit areæ ABNK fluxio KNOL $= \frac{\frac{1}{2}a^2x\,dx}{aa-xx}$, sumtisque fluentibus, area ABKN $= Q$ *const.* $- \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{aa-xx}$; quia verò area ABNK evanescit ubi fit $x = 0$, erit constans $Q = \frac{1}{4}aa\,L.\,aa$; & area accurata ABNK $= \frac{1}{4}aa\,L.\,aa - \frac{1}{4}aa\,L.\,aa - xx = \frac{1}{4}aa\,L.\,\frac{aa}{aa-xx}$. Porro

sita erit $\frac{N-1}{N+1}$ H, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G}$ — 1,3862943611

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

ro (284) tempus P quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem acquirit lineæ AP seu x proportionalem, est ad tempus G quo velocitatem maximam H vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadendo acquirere potest, ut sector ATD ad triangulum ADC, id est, $P : G = \frac{1}{4} aa \, L. \frac{a+x}{a-x} : \frac{1}{2} aa = L. \frac{a+x}{a+x} : 2$. Quare erit $\frac{2P}{G} = L. \frac{a+x}{a-x}$, hoc logarithmo sumto in logistica cujus subtangens est unitas (38. *lib.* 1.). Quapropter si logarithmus numeri $\frac{a+x}{a-x}$ sumatur in tabulis, multiplicandus erit per numerum 2,302585093, ut in *cor.* 7. *prop.* XXXV. factum est, & habebitur $\frac{2P}{G} = 2{,}302585093 \; L. \frac{a+x}{a-x}$, ideoque dividendo 1. per 2. 3025 &c. numerus $0{,}4342944819. \frac{2P}{G}$ est logarithmus tabularis numeri $\frac{a+x}{a-x}$. Itaque si per tabulas quæratur numerus absolutus N qui congruat Logarithmo $0{,}4342944819. \frac{2P}{G}$, erit $N = \frac{a+x}{a-x}$, ideoque $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$. Est autem (284) AC ad AP seu a ad x, ut velocitas maxima H ad velocitatem cadendo acquisitam. Quare hæc velocitas erit $\frac{xH}{a} = \frac{N-1}{N+1} \times H$, sicuti NEWTONUS invenit. Spatium quod globus velocitate maximâ H uniformiter progrediendo tempore P describit, est ad spatium $2F$ quod eadem velocitate H uniformiter percurrit tempore G, ut tempus P ad tempus G (5. *lib.* 1.), & propterea spatium illud est $\frac{2PF}{G}$. Altitudo S quam globus tempore P cadendo in medio resistente describit, est ad spatium $\frac{2PF}{G}$, ut area ABNK ad sectorem ATD (284), id est, ut $\frac{1}{4} aa \, L. \frac{aa}{aa-xx}$ ad $\frac{1}{4} aa \, L. \frac{a+x}{a-x}$, sive ut $L. \frac{aa-xx}{aa}$ ad $L. \frac{a+x}{a-x}$; Sed (ex dem.) $\frac{a+x}{a-x} = N$, & $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$, ac proinde $\frac{aa}{aa-xx} = \frac{[N+1]^2}{4N} = \frac{N \times [N+1]^2}{4NN}$, & si

285. logarithmi sumantur in logistica cujus subtangens est unitas, est $\frac{2P}{G} = L. \frac{a+x}{a-x} = L. N$, & $L. \frac{aa}{aa-xx} = L. \frac{N \times [N+1]^2}{4NN} = L. N + 2 L. \frac{N+1}{N} - L. 4$; ideoque $L. \frac{aa}{aa-xx} : L. \frac{a+x}{a-x} = L. N + 2 L. \frac{N+1}{N} - L. 4 : L. N$

$$= 1 + \frac{2 L. \frac{N+1}{N} - L. 4}{L. N} : 1 = 1 + \frac{G}{P} L. \frac{N+1}{N} - \frac{G}{2P} L. 4 : 1 = S : \frac{2PF}{G}.$$

Quare altitudo $S = \frac{2PF}{G} - F L. 4 + 2F L. \frac{N+1}{N}$.

At si velimus tabularum logarithmis uti, ii multiplicandi sunt per numerum 2,302585092994, seu per 2,302585093. Hic numerus dicatur M, logarithmus numeri 4 in tabulis sumptus Q; & logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ sit L; & erit $S = \frac{2PF}{G} - MQF + 2MLF$. Est autem $2M = 4{,}605170186$, & Q in tabulis vulgaribus est 0,60206; seu accuratius 0,60205999132, ideoque $MQ = 1{,}3862943611$ quamproximè. Quare altitudo S, quam globus in medio resistente cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G} - 1{,}3862943911 \, F + 4{,}605170186 \, LF$, uti NEWTONUS definivit.

1, 3862943611 F + 4, 605170186 L F. (d) Si fluidum satis profundum sit negligi potest terminus 4, 605170186 L F; & erit $\frac{2 P F}{G}$ — 1, 3862943611 F altitudo descripta quamproximè. Patent hæc per libri secundi propositionem nonam & ejus corollaria, ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertiâ materiæ. Si verò aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ describit, & quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maximâ descripta. Numeri in quartâ columnâ sunt $\frac{2 P}{G}$, & subducendo numerum 1, 3862944 — 4, 6051702 L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus à corpore, vi ponderis sui comparativi B, in (e) vacuo cadente.

Tem-

(d) * *Si fluidum satis profundum sit*; id est, si altitudo S quam globus tempore *P* cadendo describit, satis magna fuerit, negligi potest terminus 4,605170186 *L F*. Cum enim sit *L* logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N est numerus satis magnus, seu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ est fere æqualis unitati, Logarithmus *L* evanescit quam proximè. Sed, si velocitas maxima dicatur *H*, & velocitas tempore *P* casu globi acquisita *V*, est $H : V = a : x$ (285), & ideo $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a-x} = N$, & quando spatium descriptum *S* satis magnum est, fit $V = H$ quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ seu *N* numerus satis magnus, ut ex sequenti tabula manifestum est. Patet ergo propositum.

(e) * *In vacuo cadente.* Hujus tabulæ constructio paulo fusius exponenda videtur. Numeri singuli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G, assumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correspondentes facillimè reperiuntur. Cum enim spatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter de-

scrip-

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,2F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16 6137057F	18F	81F
10G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

Scho-

scriptum sit 2 F, & spatia eâdem uniformi velocitate descripta temporibus, quibus describuntur, proportionalia sint; numeri columnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correspondentibus, habentur. Quia verò spatia, à corpore vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadente, descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur, & tempore G describitur spatium F; numeri columnæ quintæ sunt quadrata numerorum correspondentium in columna prima. Numeri columnæ secundæ velocitatem acquisitam cadendo in fluido tempore P indicant quæ est $\frac{N-1}{N+1} \times H$, sicque

inveniuntur: assumpto in columna prima termino quovis, Exempli causâ, 2 G pro P, fit $\frac{2\ P}{G} = \frac{4\ G}{G} = 4$, & hinc 0,4342944819, $\frac{2\ P}{G} = 1,7371779276$. Huic logarithmo in tabulis congruit numerus absolutus 54,59815, $= N$; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$, & quia H = 100000000 (*per hyp.*), velocitas tempore P, sive 2 G, acquisita $\frac{N-1}{N+1}$ H, est 96402758, uti NEWTONUS in tabula posuit. Inventis hoc modo numeris columnæ secundæ, inveniuntur quoque numeri colum- 285.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Scholium.

Ut resistentias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem (f) pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aquâ pluviali; & globis ex cerâ & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus seu (g) grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel (h) grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet

næ tertiæ, videlicet $\frac{2P}{G}$ — 1,3862943611 + 4,6051702 L. Quoniam enim datus est numerus $\frac{2P}{G}$, & jam inventus fuit numerus N, cognoscetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum ipsius Logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertiæ.

286. Ex hâc porro tabulâ patet verum esse posse, quod non nulli se observasse testantur, nimirum gravia in mediis resistentibus cadentia brevi satis tempore ad maximam quam acquirere possint velocitatem pervenire & postea moveri uniformiter; licet per theoriam non nisi tempore infinito, seu nunquam, possint maximam illam velocitatem reverâ acquirere. Nam si tempus P quo globus in fluido quocumque cadit, sit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquisita erit ad velocitatem maximam ut 9999092 ad 10000000, seu ut 1. ad 1,0000908, quamproximè, & spatium hoc tempore 5 G descriptum erit 8,6137964 F, & deinde spatia descripta crescent fere in progressione arithmetica ad modum temporum. Elapso igitur tempore 4G, vel 5 G globus uniformiter descendere videbitur, licet ejus velocitas reverâ perpetuò crescat. Si verò assumatur tempus P æquale 10 G, tum velocitas acquisita est ad velocitatem maximam ut 99999999 $\frac{3}{5}$ ad 100000000, & tantorum numerorum differentia $\frac{2}{5}$ prorsus insensibilis est oculis humanis.

(f) * *Pedis Londinensis.* Pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, & digitus in 12 lineas dividitur.

(g) * *Seu grana.* Libra Romana uncias 12, uncia 480. grana continet.

(h) 287. * *Vel grana* 132, 8 *in vacuo.* Corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera absoluta sub paribus voluminibus sunt ut eorum densitates, & densitas aquæ, juxta NEWTONUM, est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ejusdem pondere in vacuo, dicendum est, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0,1543 quam proxime. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132, 645, & summa gran. 132, 7993, seu gran. 132,8 erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proxime. Dato igitur pondere globi cujuslibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, si ponderi dato addatur id

libet ([i]) alius eſt ut exceſſus ponderis ejus in vacuo ſupra pondus ejus in aquâ.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcripſit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum.

([k]) Pondus globi in vacuo eſt $156\frac{13}{38}$ *gran.* & exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aquâ eſt $79\frac{13}{38}$ *gran.* ([l]) Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Eſt autem ut exceſſus ille ad pondus globi in vacuo, ita ([m]) denſitas aquæ ad denſitatem globi, ([n]) & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad ſpatium 2 F, ([o]) quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius ſecundi, toto ſuo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, ([p]) cadendo in vacuo de-

id quod ex diviſione ejuſdem ponderis per numerum 860 habetur.

(i) 288. * *Et globus quilibet &c.* Globus quilibet *E* eſt ad globum aqueum *C* diametro digiti unius deſcriptum, ut exceſſus ponderis globi *E* in vacuo ſupra pondus ejus in aqua, ad pondus granorum 132,8. Nam exceſſus ponderis globi *E* in vacuo ſupra pondus ejus in aquâ eſt pondus globi aquæ ejuſdem cum globo *E* diametri; Sed globi aquæ homogenei ſunt ut eorumdem pondera: eſt igitur globus *E* ad globum C ut exceſſus ponderis globi *E* in vacuo ſupra pondus ejus in aqua, ad pondus 132,8 granorum.

(k) * *Pondus globi in vacuo eſt* $156\frac{13}{38}$ *gran.* Si enim ex pondere globi in aere gran. $156\frac{1}{4}$ ſubducatur pondus ejus in aqua, quod eſt gran. 77, reſiduum erit pondus globi aquæ ejuſdem voluminis gran. $79\frac{1}{4}$; & propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. $156\frac{1}{4}$ addendum eſt pondus gran. $\frac{79\frac{1}{4}}{860}$, & prodit pondus globi in vacuo gran. $156\frac{13}{38}$ quam proximè.

(l) * *Unde prodit globi diameter &c.* Eſt enim (288) pondus gran. 132,8 ad exceſſum $79\frac{13}{38}$, ut globus diametro digiti unius deſcriptus ad globum quæſitum; ideoque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæſiti cubum, qui proinde erit $\frac{79\frac{13}{38}}{132,8}$ partium digiti cubici. Hujus fractionis radix cubica, ſeu globi diameter, eſt 0,84224 partium digiti quam proximè. 288.

(m) * *Ita denſitas aquæ ad &c.* (283).

(n) * *Et ita partes octo tertiæ diametri globi &c.* Per Prop. XL. lib. II.

(o) * *Quod proinde erit* 4,4256 *dig.* Nam $79\frac{13}{38} : 156\frac{13}{38} = 3015 : 5941 = 2,24597 : 4,4256$, quam proxime.

(p) 289. * *Cadendo in vacuo deſcribet digitos* $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præſertim gravioris, oſcillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iiſdem quam proximè temporibus peraguntur in aere & in vacuo (*per cor.* 2. *prop.* XXVII. *lib.* II.); ſpatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius ſecundi deſcribit, eſt pedum Pariſienſium $15\frac{1}{12}$, ſeu ac-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

describet digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere granorum 77, eodem tempore sine resistentiâ cadendo in aquâ (q) describet digitos 95,219; (r) & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum potest in aquâ descendere. (s) Est igitur tempus G 0″, 15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium 2 F digitorum 4,4256; (t) ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. (u) Subducatur spatium 1,3862944 F seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, (x) minui debet in ratione quæ com-

accuratius digitorum 181 $\frac{1}{6}$ quam proximè (471. *lib.* 1.); & quia pes Londinensis pede Parisiensi minor est in ratione 15 ad 16, erit spatium illud digitorum Londinensium $193\frac{11}{45}$, seu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc spatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oscillantis diminutum, & ideo poni potest digit. Lond. $193\frac{1}{3}$ quam proximè.

(q) * *Describet digitos* 95, 219. Nam vires uniformes sunt ut spatia quæ corpus viribus illis agitatum dato tempore describit (179); & propterea $156\frac{13}{38}$ est ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius secundi sine resistentia cadendo describit; unde spatium hoc prodet 95,219 digit. quam proximè.

(r) * *Et tempore G, quod sit &c.* Spatia quæ corpus vi ponderis sui comparativi 77 gran. sine resistentiâ cadendo describit, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur (27. lib. 1.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis sui comparativi sine resistentiâ cadendo describit spatium F (*per prop.* XL.), est ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 dig. ad 95,219 digit.

(s) 290. * *Est igitur tempus G* 0″, 15244. Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit 0″,7622 seu 46‴ ferè. Quare globus, cujus diameter est 0,84224 partium digiti & pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua cadendo tempore 46‴ describet spatium 19 dig. circiter & maximam suam velocitatem acquirere atque postea uniformi velocitate descendere videbitur (286).

(t) * *Ideoque tempore minutorum quatuor secundorum &c.* Sunt enim tempora ut spatia velocitate uniformi H descripta, & 0″,15244 est ad 4″ ut 4,4256 ad 116,1245 ferè.

(u) * *Subducatur spatium &c.* Tempus P est minutorum secundorum quatuor, & ut G ad P ita est 2 F ad digitos 116,1245 $= \frac{2PF}{G}$, Sed (*per prop.* XL) spatium quod globus in aqua cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G} - 1,3862944$ F, neglecto, scilicet, termino 4,605170 16 L F, qui ob parvitatem hic potest tutò contemni.

(x) 291. * *Minui debet in ratione &c.* Globi datâ velocitate moti resistentia in vase amplissimo sit *r*, in vase angustiore *R*, hujus vasis orificium æquale sit circulo *c*, cir-

componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aquâ, ſucceſſivè demittebantur, & unuſquiſque cecidit in aquâ tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

circulus globi maximus ſit m, denſitas globi δ, denſitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ uniformiter deſcriberet tolli poſſit vel generari, ſit p. Et (*per prop.* XXXVIII.) erit $p : r = \delta : d$; & (*per prop.* XXXIX.) $R : p = d c^3 : \delta [c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$; & propterea, conjunctis his rationibus, $R : r = c^3 : [c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$. Datâ igitur velocitate globi, reſiſtentia in vaſe ampliſſimo eſt ad reſiſtentiam in vaſe anguſtiore in datâ ratione $[c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$ ad c^3. Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n. Quando velocitas in vaſe ampliſſimo maxima eſt, ſeu H, reſiſtentia æqualis eſt ponderi B globi in aqua, & F eſt ſpatium quod globus tempore G vi ponderis B ſine reſiſtentia cadendo deſcribit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vaſe anguſtiore, quam cum acquiſivit, reſiſtentia ejus æqualis eſt ponderi B; & cum reſiſtentia globi in vaſe anguſtiore æqualis ſit $n B$ ubi velocitas ejus eſt H (ex demonſtratis), & reſiſtentiæ ſint ut quadrata velocitatum, erit $H H : h h = n B : B = n : 1$, ideoque $H : h = \sqrt{n} : 1$. Sit g tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit velocitatem h, & f ſpatium quod eodem tempore deſcribit; & erit $H : h = \frac{F}{g} : \frac{f}{g}$, 291.
ac proinde $\frac{F}{G} : \frac{f}{g} \sqrt{n} : 1$. Porro ſpatia in vaſe ampliſſimo tempore P, quod ſatis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo deſcripta, ſunt quam proximè ut $\frac{2 P F}{G}$, ſeu ut ſpatia eodem tempore motu maximo deſcripta, ut ex prop. XL. & ex tabulâ huic ſcholio præfixâ patet; & ſimiliter ſpatium eodem tempore P in vaſe anguſtiore deſcriptum erit etiam ut $\frac{2 P f}{g}$ ferè. Quare cum ſit $\frac{2 P F}{G}$ ad $\frac{2 P f}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad $\frac{f}{g}$, id eſt (ex demonſtr.) ut $\sqrt{n}$ ad 1; ſpatium tempore P in vaſe ampliſſimo deſcriptum erit ad ſpatium eodem tempore in vaſe anguſtiore deſcriptum, ut $\sqrt{n}$ ad 1, id eſt, ut $c^{\frac{3}{2}}$ ad $[c - m] \times [c - \frac{1}{2} m]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem eſt, in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis c ad exceſſum $c - \frac{1}{2} m$ orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem c ad exceſſum ejus $c - m$, ſupra circulum maximum globi.

Sed

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Computum (y) ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* excessus hujus ponderis supra pondus in aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* spatium 2 F 2,3217 *dig.* spatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ sine resistentiâ cadendo describat 12,808 *dig.* & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* descendere, tempore 0″,301056 describet spatium 2,3217. *dig.* & tempore 15″ spatium 115,678 *dig.* Subducatur spatium 1,3862944 F seu 1,609 *dig.* & manebit spatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0,895 *dig.* circiter. Et sic manebit spatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit veros digitos 112 per experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aquâ, successive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam (z) hi globi cadere debuerunt tempore 40″ cir-

Sed vasis orificium *c* est 81 digitorum (ex dictis initio scholii hujus), & circuli *m* diameter inventa est 0,84224 partium digiti, ideoque si dicatur ut 7 ad 11 ita 0,84224 digit. ad semiperipheriam circuli *m*, hæc invenietur digit. 1,32352, & hinc circulus *m* prodit 0,5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur

$$\frac{c}{c-m}=1{,}0069, \ \& \ \frac{c^{\frac{1}{2}}}{[c-\frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}}=1{,}0017, \text{ac}$$

$$\text{proinde } \frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c-m]\times[c-\frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}}=1{,}00861.$$

Quare spatium in vase amplissimo descriptum digit. 113,0569 est ad spatium in vase angustiore eodem tempore minutorum quatuor secundorum descriptum, ut 1,00861 ad 1, seu ut 1 ad 0,9914 ferè; unde hoc spatium prodit 111,08 digit.

(y) * *Computum ineundo &c.* Calculo experimenti primi fusè exposito, nulla superest difficultas in computo simili experimenti hujus.

(z) * *Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore* 40″ *circiter.* Cum pondus globi sit 121 granorum in aëre, & 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; & ideo pondus globi in vacuo gran. $121\frac{120}{860}$ seu $121\frac{6}{43}$ (287). Excessus hujus ponderis supra pondus globi

circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni resistentiæ quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis tribuendum sit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum esse puto. Ideoque pondus globi in aquâ debet esse plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistentias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proximè præcedentibus exposita mihi innotesceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua. & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aquâ extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitùs immersi quiescebant, demittebantur quam cautissimè, ne impulsum aliquem à manu demittente acci-

bi in aqua est gran. $120\frac{6}{43}$. Unde prodeunt globi diameter 0,9671 partium digiti, spatium 2 F 2,6004 digitorum, spatium quod globus pondere 1 grani sine resistentia cadendo tempore minuti unius secundi describit digit. 1,5959, & tempus G 0″,9026. Hoc tempore globus cum velocitate maximâ *H* uniformiter progrediendo describet spatium 2 *F* seu 2,6004 dig. & tempore 40″ describet spatium 115,2404 dig. Subducatur spatium 1,3862944 F seu 1,8024 dig, & manebit spatium 113,438 dig. quod globus cadendo in aqua in vase amplissimo tempore 40″ describeret; & hoc spatium, propter angustiam vasis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam spatium 112 digitorum cadendo describere debuerunt tempore 40″ circiter. 291.

acciperent. Ceciderunt autem ſucceſſivè temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulò frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Experimento ſæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione eiuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit verò ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 &

33,

33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XL. Probl. IX.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$ 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motûs proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit semper à latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, in majoribus aquam magis agitat. Quâpropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo mi-

 nores

nores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis ſequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aquâ, ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maximâ ex parte tempore oſcillationum 51 circiter, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aquâ, ſæpius demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oſcillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aquâ, ſæpe demiſſi, cadebant temporibus oſcillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, deſcribentes altitudinem digitorum $181\frac{3}{4}$. Et ubi ceciderunt tempore oſcillationum 19, nonnunquam audivi impulſum eorum in latera vaſis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oſcillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aquâ ſæpe demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, deſcribentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demiſſi, ceciderunt temporibus oſcillationum 61, 62, 63, 64, & 65, deſcribentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oſcillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per

Per hæc experimenta manifestum est quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, (a) resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum: & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motûs languorem citò cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motûs fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aquâ ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur à fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem à tergo relinquent, (b) nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (*per prop.* XXXII. & XXXIII.) (c) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut resistentia sit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur à tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine ecclesiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, mense Junio 1710 globi duo vitrei simul demittebantur, unus

(a) * *Resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim resistentia accuratè esset in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; At si resistentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum spatium describit, majora esse debent in experimentis quam in theoriâ, quæ minorem resistentiam supponit.

(b) * *Nisi compressio fluidi simul augeatur.* Tanta enim esse potest globi velocitas, ut fluidum ad posticas illius partes satis citò recurrere & locum à globo relictum statim occupare nequeat, nisi fluidi compressio augeatur, ut per fluidum pressio & motus celerius propagentur.

(c) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis &c.* Nam partes fluidi per compressionem in se mutuo agunt & reagunt; & si vires quibus fluidi particulæ se mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, resistentia est in eâdem ratione duplicatâ, *per cor.* 2. *prop.* XXXIII.

unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur; subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in (d) tabulâ sequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8″ $\frac{1}{2}$
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8$\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	8$\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis (e) describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum

3″

(d) * *In tabulâ* sequente 4 — significat tempus cadendi minutis quatuor secundis paulo minus fuisse, & 4 + tempus minutis quatuor secundis paulo majus indicat.

(e) * *Describent pedes Londinenses &c.* Quoniam densitas mercurii est ad densitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parùm admodum minuitur mercurii pondus in aere, & ideo globi mercurio pleni eâdem ferè celeritate in aëre & in vacuo per breve tempus descendunt; sed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius secundi describunt pedis Londinensis digitos 193 $\frac{1}{3}$ (289), & spatia descripta sunt in duplicatâ ratione temporum (27. *lib.* 1. Quare ut 1 ad 16 ita 193 $\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus mercurio plenus tempore 4″ cadendo describit, quod proinde erit 3093 dig. seu 257 pedum Londinensium circiter. Simili modo, cum sit

3″,

3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tardâ suâ devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulò quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidêre, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore 8″ 12‴, describendo altitudinem pedum 220. (f) Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ *gran.* seu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo est $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 *gran.* describit digitos 185,905, &c.

3″. 42‴ — 3″.7, erit 1 ad 13,69 ut 19 $\frac{1}{3}$ dig. ad spatium tempore 3″. 42‴. descriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni spatium hoc 220 ped. tempore 4″ describunt in experimentis, & differentia temporum 4″ & 3″.42‴. est 18‴. Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

(f) * *Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum.* Globus aqueus, cujus diameter est unius digiti continet grana 132,8 (287), & globorum homogeneorum, pondera sunt ut diametrorum cubi, & propterea ut 1 ad 125 ita sunt 132,8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter est digitorum 5, quod proinde pondus est gran. 16600. Globorum æqualium pondera sunt ut illorum densitates, & densitas aquæ est ad densitatem aeris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diametro digitorum 5 descripti est $\frac{16600}{860}$ seu $19\frac{3}{10}$ gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo est gran. 483 + $19\frac{3}{10}$ seu gran. 502 $\frac{3}{10}$, & hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, id est, densitas globi, si homogeneus fingatur, ad densitatem aëris, ut 502 $\frac{3}{10}$ ad 19 $\frac{3}{10}$ *& ita sunt* 2 F *&c.*, cætera patent ut in superioribus calculis. 291.

& eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* (g) tempore 57‴ 58⁗, & velocitatem maximam acquirit quâcum poſſit in aere deſcendere. Hâc velocitate globus, tempore 8″ 12‴, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus tempore 8″ 12‴, cadendo deſcribere debuit per theoriam. Deſcripſit verò ſpatium 202 pedum per experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.*		*Spatia deſcribenda per theoriam.*		*Exceſſus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	8″	12‴	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. menſe Julio, D. *Deſaguliers* hujuſmodi experimenta iterum cepit, formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum ope ſphæræ ligneæ concavæ ambientis, quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam glo-

(g) 291. * *Tempore* 57‴ 58⁗. Hoc tempus, quod ante dictum eſt G, ducatur in numerum 5, & productum erit fere 5″; & propterea (186) globus cujus diameter eſt 5 digit. & pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum ſecundorum quinque deſcribet ſpatium 124 pedum circiter, & deinde videbitur uniformiter deſcendere.]

globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum qui in terrâ ſtabant unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè conſtructam cum pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum qui ſtabant in ſummitate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}'''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{4}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ ſequente, aſſumendo denſitatem

tem aeris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando spatia quæ globi per theoriam describere (h) debuerunt cadendo.

Vesicarum pondera	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.*	*Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.*		*Differentia inter theor. & exper.*	
128 *gran.*	5,28 *dig.*	19″	271 *ped.*	11 *dig*	— 0 *ped.*	1 *dig.*
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+ 10	0

Globorum igitur tam in aere quàm in aquâ motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In scholio, quod sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aere, aquâ, & argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. (i) Idem hic ostendimus magis ac-

(h) * *Describere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia vesica facti. Hujus vesicæ diameter erat 5.3 digitorum & pondus in aëre granorum 137, 5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 descriptus continet 23 grana quam proxime; unde vesicæ pondus in vacuo erat gran. 160,5, & ut 23 ad 160, 5 ita sunt octo tertiæ partes diametri vesicæ seu digiti $14\frac{2}{15}$ ad spatium 2 *F*, quod ita prodit digit. 98,626. Vesica cadendo in vacuo toto suo pondere 160,5 gran. tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere 137,5 gran. describit digitos 165,628, & eodem pondere 137,5 gran. etiam in vacuo describit spatium *F* digitorum 49,313 tempore 0″,5456 & velocitatem maximam acquirit cum quâ possit in aëre descendere. Hâc velocitate vesica tempore minutorum secundorum $18\frac{1}{2}$ describet spatium 277 ped. & 8. digit. circiter. Subducatur spatium 1,3863 *F* seu 5. ped. & 8 digit., & manebunt 272 pedes; cùm in tabula accuratiore calculo confecta spatium per theoriam describendum sit 272 ped. & 7 digit., & in experimento sit 272 ped.

(i) * *Idem hic ostendimus &c.* Nam theoria experimentis confirmata, cui superiore computationes nituntur, supponit resistentiam, cæteris paribus, esse in ratione composita ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis & ratione simplici densitatis fluidi.

accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre & aquâ. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam penduli resistentiam majorem reddiderunt quàm resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum aquâ, describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, amittere deberet motûs sui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac septimâ sectione expositam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, (k) amittere deberet motûs sui partem tantum $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas aquæ sit ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quàm per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cûm pendulorum in aëre, aquâ & argento vivo oscillantium resistentiæ à causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, satis rectè exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

His

(k) * *Amittere deberet motûs sui partem tantùm* $\frac{1}{4586}$. Sit D diameter globi V ejus velocitas sub initio motus in fluido, $2F$ spatium quod sit ad $\frac{2}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem aëris, hoc est, ut 860 ad 1, ideoque $2F = \frac{6880}{3}D$; sit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo describit spatium $2F$, & t tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium $\frac{1}{2}D$; & erit $t : T = \frac{1}{2}D : \frac{6880}{3}D = 3 : 13760$, & inde $t : T + t = 3 : 13763$, ideoque $\frac{t}{T+t} = \frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$ quam proximè. Est autem $\frac{tV}{T+t}$ velocitatis V pars amissa tempore t (*per cor.* 3 *prop.* 38). Globus igitur describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, per theoriam in hac septimâ sectione expositam amittere debet motûs sui partem $\frac{1}{4586}$.

(l) His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, *per corol.* VII. *prop.* XXXV. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulò minor, (m) propterea quod figura globi paulò aptior ſit ad motum quàm figura cylindri eâdem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulò major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non (n) augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de quâ agitur in propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ cor-

(l) * *His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem globus quilibet, in fluido quocumque projectus* & ſolâ vi inſitâ motus, *dato tempore amittet quam proximè*; theoriam enim cum experimentis conſentire vidimus tum in fluidis elaſticis, quale eſt aër, tum in fluidis non elaſticis, quale eſt aqua. Quæ ſequuntur, manifeſta ſunt per notam ad cor. 3. prop. XXXVIII. (282).

(m) * *Propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum &c.* Nam in Lemmate VII. lib. I. & in ſequentibus propoſitionibus ſuppoſitum eſt, globi & cylindri, quorum eadem eſt diameter, æqualem eſſe reſiſtentiam.

(n) * *Non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis*, in quâ tamen augeri deberent, uti expoſitum eſt in experimento 12.

corporibus essentialis est & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur à tenacitate & frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui resistentia, de quâ hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrimè & sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aere, aquâ & argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate suâ, non tantum motum ciet in fluido, sed (o) etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido à projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aquâ & argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

(o) * *Sed etiam agit in projectile*, per motûs legem III. 292.

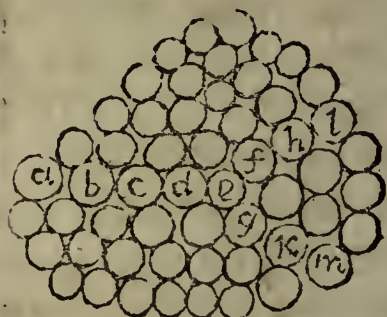
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

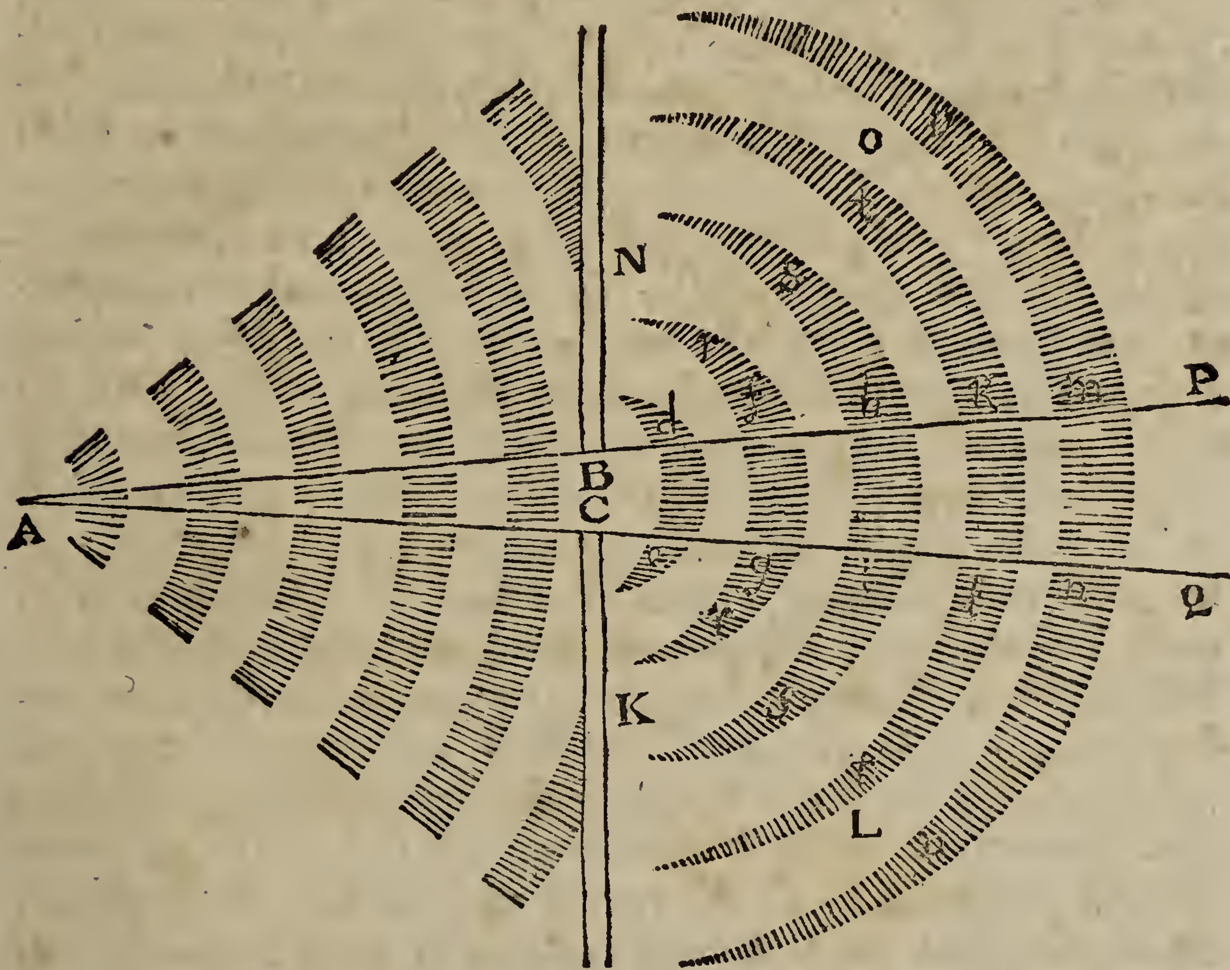
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in lineâ rectâ, potest quidem pressio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè positas *f* & *g* obliquè, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur à particulis ulterioribus *h* & *k*; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m*, easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & obliquè propagabitur in infinitum; & postquam incipit obliquè propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si pressionis, à dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quâquâversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta; & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie

cie

cie *fg*, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus legem tertiam) quod fruſtum primum *defg*, reactione fruſti ſecundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie *fg*, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur *defg* inter conum *Ade* & fruſtum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (*per corol.* VI, *prop.* XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eàdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu



quo premitur in ſuperficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *df*, *eg*; ubi que (cùm rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam fruſtum *fghi* eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur à lateribus *df*, *eg* in ſpatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur à ſuperficie *fg* verſus *PQ*. *Q. E. D.*

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XLII. Theor. XXXIII.

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus à puncto A per foramen BC, pergatque, ſi fieri poteſt, in ſpatio conico $BCQP$, ſecundum lineas rectas divergentes à puncto A. Et ponamus primo quod (a) motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque de, fg, hi, kl, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in fluidi partibus immotis LK, NO, defluet eadem de jugorum terminis e, g, i, l, &c. d, f, h, k, &c. hinc inde verſus KL & NO: & quoniam (b) in undarum vallibus depreſſior eſt quam in fluidi partibus immotis KL, NO; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus KL & NO. Et quoniam motus undarum ab A verſus PQ fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque (c) celerior non eſt quàm pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus KL & NO eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus KL & NO eâdem velocitate quâ undæ ipſæ ab A verſus PQ rectà progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus KL & NO ab undis dilatatis $rfgr$, $shis$, $tklt$, $vmnv$, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita ſe habere quilibet in aquâ ſtagnante experiri poteſt.

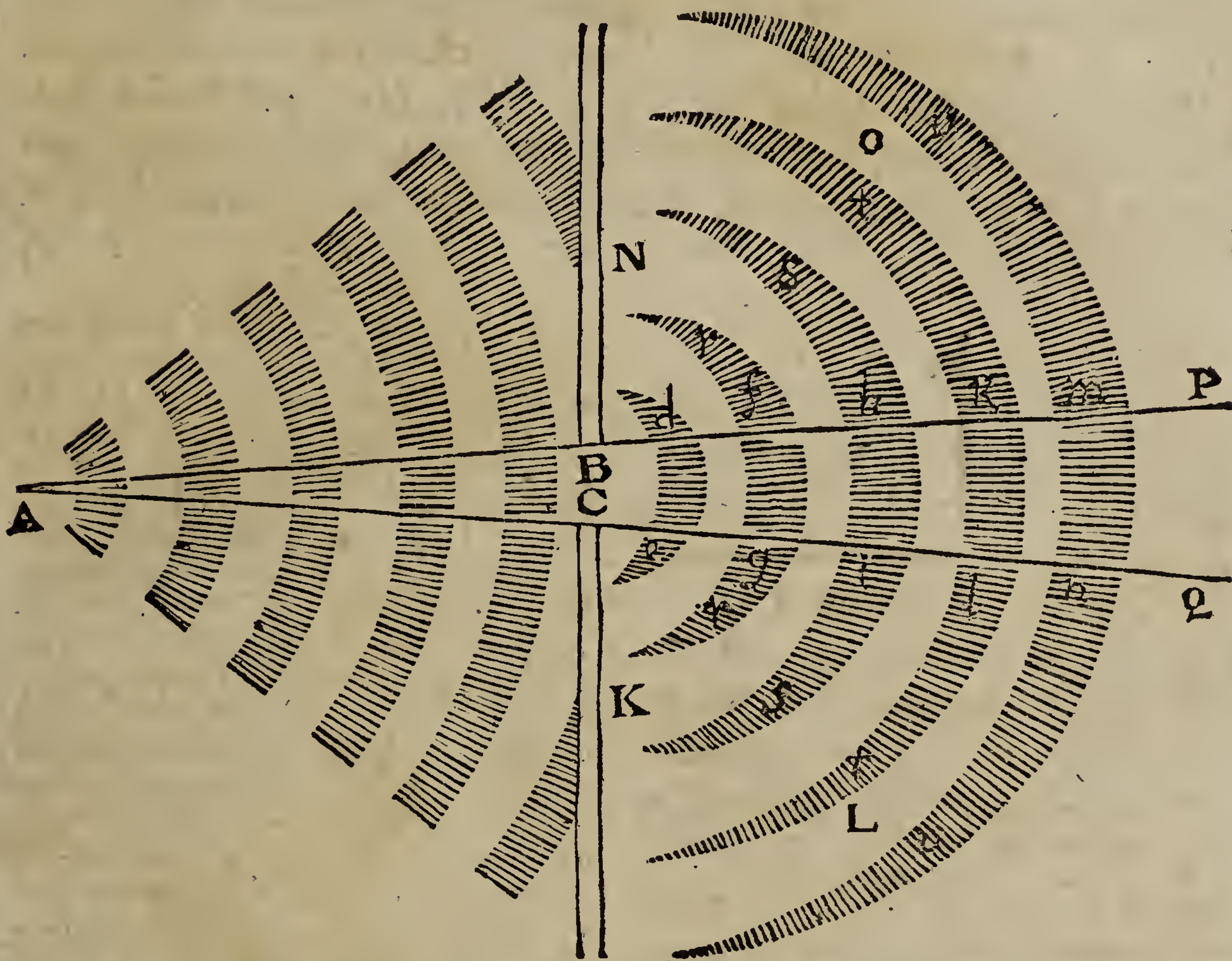
Caſ.

(a) *Motus iſte ſit undarum &c.* Vis quælibet deorſum directa in ſuperficiem ſtagnantis aquæ agat in A; & cavitate factâ, cogat aquam circumquaque aſcendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis deſcendendo partim refluet in A, ad cavitatem replendam, partim in plagam oppoſitam feretur, & celeritate cadendo acquiſitâ novam cavitatem formabit, atque ità deinceps undæ motus per ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum propagabitur in orbem.

(b) * *In undarum vallibus depreſſior eſt &c.* Aqua enim ab altioribus undarum partibus cadendo celeritatem acquirit, quâ infrà quieſcentis aquæ ſuperficiem deſcendit.

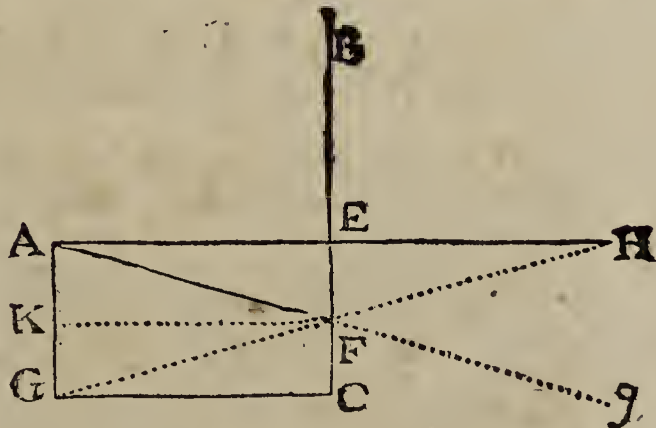
(c) * *Celerior non eſt* quàm pro celeritate deſcenſûs ab eâdem undarum altitudine, undè aqua in plagas P Q, K L, N O æquè defluit.

Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* designent pulsus à puncto *A* per medium elasticum successive pro-



293. Ex demonstratis in hoc casu, motus undæ in obstaculum planum incurrentis definiri potest. Undarum motus è loco A quasi centro propagetur. Incurrat unda in obstaculi immoti B C punctum F, cum velocitate & directione A F. Ductâ ex A in B C perpendiculari A E, completoque rectangulo A E F K, resolvatur motus A F, in duos alios motus A E, A K, seu factâ F C æquali A K, in motus K F, F C; & quia particulæ aquæ motu F C in obstaculum non agunt, post impactum pergent eâdem quâ antè impactum velocitate ac directione F C moveri. At motu K F, in obstaculum directè incurrentes motum illum omnem, juxtà leges conflictûs corporum non elasticorum, amittent. Cùm autem aqua in F ab aliâ insequente urgeatur, & obstaculum (per hyp.) cedere nequeat, elevabitur illa in F; & deindè vi ponderis sui, id est, vi æquali illi quâ per obstaculi longitudinem elevata fuit, des-

293.

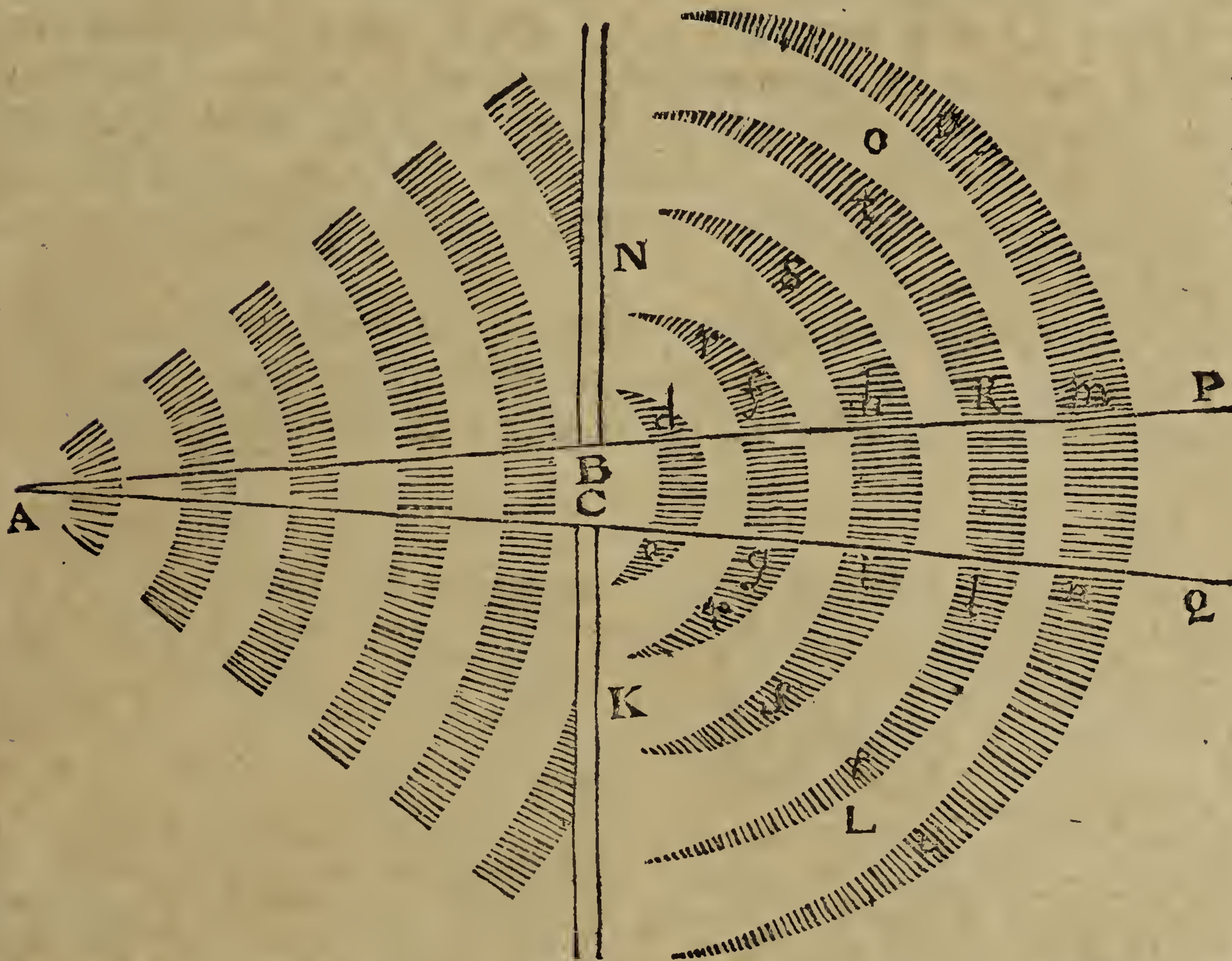


propagatos. (d) Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphæricam occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*,

descendet in plagam F K, eâdemque proinde velocitate ac directione ab obstaculo recedet quâ ad illud accesserat. Ex hoc motu F K, & ex alio F C in aquâ residuo componetur motus F G, per diagonalem parallelogrammi K F C G; unda igitur à puncto F reflectitur secundum directionem F G, & cum eâdem velocitate quâ per A F in obstaculum incurrit, & quâ, sublato obstaculo, motum per F g, seu per A F productam continuasset, estque angulus reflexionis G F C æqualis angulo incidentiæ A F E. Producatur jam linea G F ut perpendiculo A E etiam producto occurrat in H; & quia angulus E F H = C F G = E F A, erit E H = A E & F H = A F = F G, & ideò aqua reflexa eodem modo movebitur per F G, ac si ex puncto H, quasi ex centro undarum motus propagaretur; cùmque demonstratio hæc omnibus obstaculi plani B C punctis congruat, manifestum est undas reflexas eandem velocitatem eandemque figuram citrà obstaculum obtinere, quas, sublato obstaculo, ultrà lineam B C habuissent.

(d) * 294. *Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones medii*, ità ut primum partes medii è puncto A quaquaversum propulsæ eant & condensentur, & ubi sunt densissimæ sphæricam superficiem circà centrum A descriptam occupare intelligantur, tum vi elasticâ rarefiant & dilatatione suâ partim versus centrum A redeant, partim à centro illo quaquaversum recedant & partes vicinas propullent; ita ut condensentur, atque ità successivis condensationibus & dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ sphæræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d &c. puncta physica medii quiescentis in rectâ a q, ad æquales ab invicem distantias sita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, secundùm directionem a q, & deinde cessante vis illius actione, per celeritatem acquisitam moveatur. Non poterit ità moveri particula a, quin successive moveantur particulæ aliæ b, c, d, e, &c. & quia medium elasticum in intervallis b c, c d. d e, &c. gradatim condensatur & vim elasticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, sibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorsus extinguitur; tum verò medium condensatum vi suâ elasticâ utrinque tam versus a, quam versus q dilatatur, & particulas a, b, c, &c.

NO, (e) dilatabit sese tam versus spatia illa *KL*, *NO* utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla; eoque pacto rarius semper evadens è regione intervallorum ac den-



sius è regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora;

&c. in pristina loca successivè repellit, dum intereà aliæ particulæ ut g, h, &c. versus q progrediuntur; quo motu medium rursus condensatur versus q, & deinde utrinquè dilatatur, atquè ità deinceps pulsus per successivas condensationes & rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulsuum in medio Elastico genitorum naturâ, ad Propos. XLVII. fusius expendetur, sed ictco in loco hæc sufficere videntur.

(e) * *Dilatabit se tam versus &c.* Per vim elasticam quæ vi comprimenti quâ partes medii condensantur, æqualis est, & in omnem loci circumferentiam agit. 294.

295. Motus pulsuum in medio elastico spectari potest ut analogus cum motu undarum in superficie aquæ stagnantis; nam condensatio partium medii elastici locum tenet elevationis aquarum, vis elastica medii locum gravitatis aquæ, & pars pulsuum densissima parti undarum altissimæ correspondet. Undè in utroque motu, medii particulæ per brevia spatia eunt & redeunt, intereadum pulsus vel unda propagatur

ra; & pulſus eâdem ferè celeritate ſeſe in medii partes quieſcentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulſus illi eâdem ferè celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota *KL*, *NO*, quâ propagantur directè à centro *A*; ideoque ſpatium totum *KLNO* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppoſitis, quam à feneſtrâ directè propagati, quantùm ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quâtenus partes medii centro *A* propiores ur-

genr

(294) & eodem modo quo (293 undarum reflexionem expoſuimus, demonſtratur pulſus ab obſtaculo plano B C, (vid. fig. not. 293.) ità repercuti ut ſit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque ſit medii motus poſt reflexionem qui produceretur, ſi pulſus ex centro H ſublato obſtaculo, propagaretur.

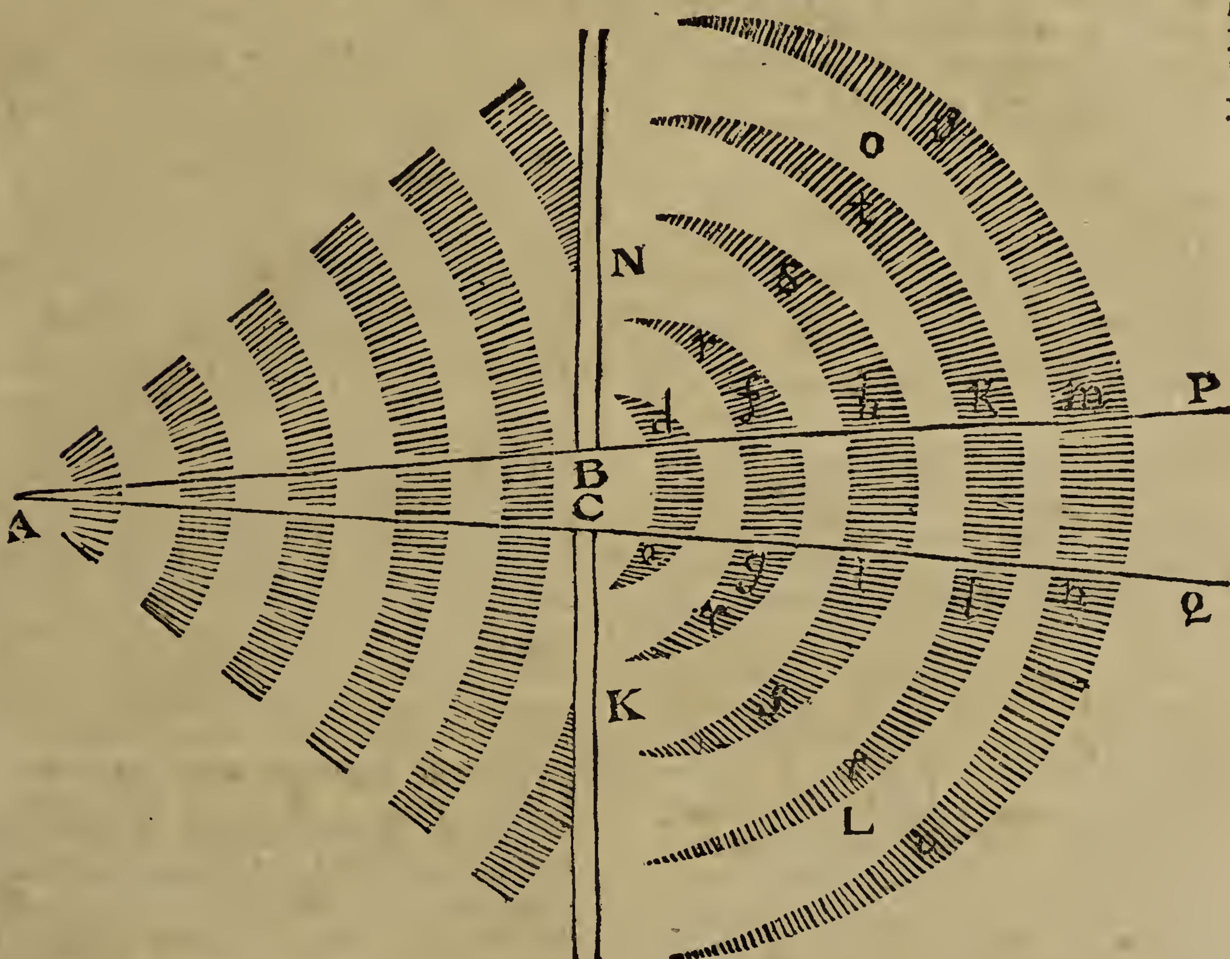
Sed ut hujus ſectionis doctrina quæ ſoni phænomenis explicandis accommodata eſt, melius intelligatur, nonnulla de naturâ ſoni & de motu corporum reſonantium præmittenda ſunt.

296. *Definitio. Sonus directus eſt*, qui à corpore ſonoro ad organum auditûs rectâ lineâ fertur. *Sonus reflexus qui* à corpore ſonoro in alia corpora fertur, & inde ad aurem reflectitur.

297. *Propoſitio. Sonus eſt particularum corporis reſonantis motus tremulus ac vibratorius aeri communicatus & ad aures delatus.* Hæc propoſitio notiſſimis experimentis certa eſt. Nam corpora non reſonant niſi percutiantur, & maximè omnium reſonant corpora dura atquè elaſtica quorum partes ictu flectuntur, & deinde vi ſuâ elaſticâ reſiliunt, atquè ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis reſonantis ſubſultus viſu & tactu percipitur; chartæ fruſtula corpori reſonanti inſidentia ſubſultare oculis cernuntur & admotâ manu partium fremitus ſentitur. Verùm ſi fides inſtrumenti muſici tenſa non fuerit, licet oſcillationes tota peragat, ſonum non edit; & forcipis focariæ crura digitis conſtricta & extemplò dimiſſa, oſcillationes agunt ſine ſono; at ſi oſcillando corpus aliquod durum percutiunt, reſonant; ex quibus deducitur ſonum non ſolo totius corporis oſcillatorio motu, ſed particularum ipſius tremore produci. Hic motus aeri contiguo communicatur & pulſus excitat (294). Cùm propè aquam ſtagnantem tympanum quatitur, ſubſultus obſervantur in aquæ ſuperficie. Dum inſtrumentorum muſicorum pulſantur nervi, pulviſculi qui aëri innatant & radio ſolis fiunt conſpicui, conformiter ad fremitum nervorum ſubſultare videntur. Si ex duabus chordis muſicis, homogeneis, æqualibus & æque tenſis una pulſetur ut ſonum edat, altera prioris vicina concutitur & ſimiliter reſonat. Tandem corpora ſonora ſub campanâ antliæ pneumaticæ poſita atque percuſſa, dum educitur aër, ſonum languidiorem reddunt & exhauſto aëre, nullum qui poſſit percipi. Eſt igitur aër vehiculum ſoni: attamen totius aereæ molis motus qui in vento cernitur, per ſe ad producendum ſonum non valet, ſed vibratorius particularum motus ſatis validus neceſſarius eſt.

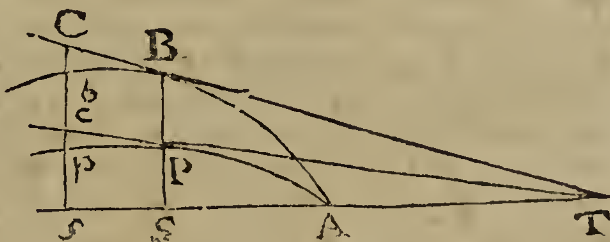
298.

gent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ ſunt, ideoque recedunt quâquâverſum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem verſus medii partes omnes quieſcentes, tam laterales *KL* & *NO*, quàm anteriores *PQ*,



eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* tranſiit, dilatari incipiet & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. *Q. E. D.*

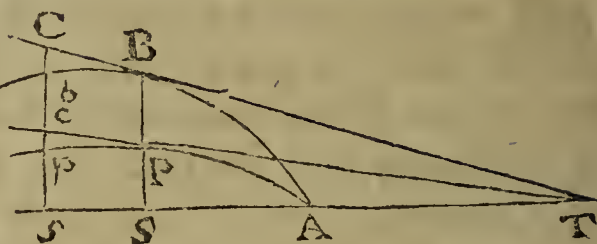
298. Lemma. *Si curvarum duarum AB, AP abſciſſam communem AS habentium, ordinatæ SB, SP ſint ſemper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinatarum.* Duc novam ordinatam s p curvis occurrentem in p & b, & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes ordinatæ novæ in C & c. Tum ob datam ordina- 298.

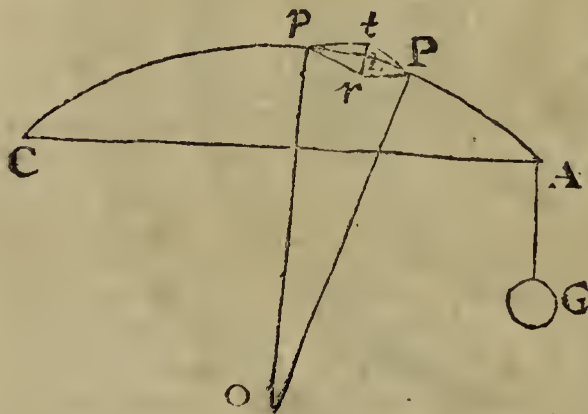


tarum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

lib. 1.) & ideò ob parallelas S B, s C, erit s C : s c = S B : S P & (per hyp.) S B : S P = s b : s p; unde s C : s c = s b : p = s C — s b : s c — s p = b C : p c = S B : S P, coincidant jam ordinatæ s b, S B, & lineolæ evanescentes b C, p c, erunt subtensæ angulorum contactûs b B C, p P c, & ordinatis S B, S P in infinitum diminutis, ut curvæ tandem coincidant cum axe A S, subtensæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque B b æqualis P p. Sed in hâc hypothesi, anguli contactûs sunt ad invicem ut $\frac{b\,C}{B\,b}$, ad $\frac{p\,c}{P\,p}$ (154. lib. 1.), hoc est, ut b C ad p C. Quarè curvaturæ in B & P, quæ angulis contactûs proportionales sunt (121. *lib.* 1.) erunt subtensis b C, p c, ac proindè (ex dem.) ordinatis S B, S P proportionales. Q. E. D.



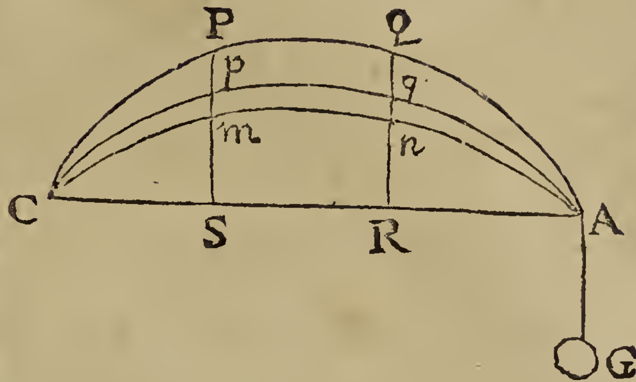


299. Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tensi & uniformiter crassi urgetur, dum per brevissimum spatium oscillatur, est ut nervi curvatura in eodem loco.* Nervus A C pondere G tensus oscillando pervenerit ad positionem curvæ A P C, cum axe A C ferè coincidentis, & quia linea recta C A pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tensio omnium partium curvæ A P C quamproximè. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, & ductis tangentibus P t, p t concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum P t p r, ducanturque ad curvam normales P O, p o concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evanescens P p, (qui sumi potest pro arcu circuli radio P O descripti (121. *lib.* 1.) in directionibus tangentium t P, t p, hinc indè trahitur, exponantur per tangentes illas æquales, & singulæ resolvantur in duas alias vires, vis quidem t P in vires t z & z P, & vis t p in vires t z, seu z r & z p vires z P, z p, æquales & oppositæ nullum motum in arcu P p producent, at viribus t z & z r, simul, seu vi totâ t r, in directione t r, sivè P O urgebitur. Erit igitur vis motrix quâ particula P p in directione t r urgetur, ad fili tensionem in P vel p per quam generatur vis illa ut t r ad t P. Sed (ex naturâ circuli) angulus t P r, æqualis est angulo P O p, cum arcus P p sit utriusque mensura, & propterà triangulum isosceле P O p, simile est triangulo isosceli t P r. Quarè P p est ad P O ut t r ad t P, hoc est, ut vis motrix quâ particula P p in directione t r seu P O urgetur ad fili tensionem datam G, & ideò vis illa est ut $\frac{P\,p}{P\,O}$. Cum igitur vis acceleratrix sit in ratione vis motricis directè & materiæ movendæ inversè (per def. 8am. lib. 1.) & materia movenda sit hic ut P p, ob æqualem ubique nervi crassitudinem, erit vis acceleratrix ut $\frac{1}{P\,O}$, id est, in ratione inversâ radii circuli curvam osculantis in P, ideóque in ratione curvaturæ in P (121. *lib.* 1.). Q. E. D.

300. PROPOSITIO. *Si chorda musica A C uniformiter crassa & pondere G tensa, ità inflectatur dum resonat, ut ejus elongatio maxima ab axe motûs A C sit ferè insensibilis & ideò vis tensionis non mutetur per auctam chordæ longitudinem in majoribus suis ab axe distantiis & inclinatio radiorum curvaturæ ad axem negligi possit, ea erit natura curvæ A Q P C in quam chorda oscillando inflectitur, in quovis articulo motûs ejusdem chordæ ut ductis pro libitu ordinatis ad axem normalibus Q R, P S sit curvatura in Q, ad curvaturam in P,*

P, ut QR, ad PS, ac puncta omnia Q, P simul ab axem pervenientia & simul redeuntia oscillationes suas omnes eodem tempore peragant ad instar penduli oscillantis in cycloide.

Cas. 1. Sit curva AQPC chordæ oscillantis distantia maxima ab axe AS punctis omnibus jam quiescentibus, eaque sit hujus curvæ natura ut curvatura in Q sit ad curvaturam in P, in ratione distnatiæ QR ad distantiam PS. Hoc posito erit acceleratio in Q ad accelerationem in P in eâdem ratione QR ad PS (*per Lem. superius* 299.) ideóque initio motû spatia simul percursa Qq, Pp, erunt in eâdem ratione, & divisim spatia percurrenda qR, pS, erunt in eâdem ratione QR ad PS; undè etiam accelerationes novæ in punctis q & p, erunt in eâdem ratione QR ad PS (299, 298.) atque erunt ad accelerationes priores in Q & P, ut distantiæ qR & pS ad distantias QR & PS (299. 298.). Ergò puncti cujusvis P, vel in eâdem curvâ AQPC vel in diversis AQPC & Aqpc, spectati acceleratio semper est ut ejusdem distantia ac axe motûs AC. Quarè (*per prop.* 51. *lib.* 1.) puncta omnia nervi ad axem simul perveniunt, simul redeunt & oscillationes singulas peragunt dato tempore ad instar corporis in cycloide oscillantis. Q. E. D.

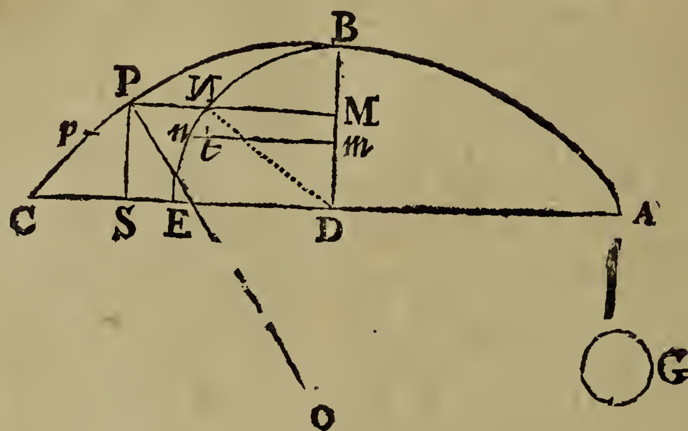


Cas. 2. Si chorda plectro modò percussa nondum induerit formam curvæ in primo casu descriptæ, erit curvatura in P ad curvaturam in Q in majori vel minori ratione quàm distantiæ PS ad distantiam QR. Sit in majori ratione, & erit velocitas in P, ad velocitatem in Q, in ratione majore quam PS ad QR, (299) & spatium Pp tempore minimo descriptum ad spatium Qq, eodem tempore descriptum in ratione majore quam PS ad QR, ideòque divisim erit ps minor respectu PS, quàm qR, respectu QR; & quia curvatura cum distantiis ab axe minuitur ac coincidente curvâ cum axe nulla evadit, erit etiam curvatura in p, minor respectu curvaturæ in P, quam curvatura in q, respectu curvaturæ in Q, & inde (299) acceleratio in p, minor respectu accelerationis in P, quam acceleratio in q, respectu accelerationis in Q. Majoris igitur velocitatis acceleratione semper decrescente & minoris velocitatis acceleratione è contrà semper crescente, respectu distantiarum ab axe AC, motus inter se tandem ità temperabuntur, ut punctis P & Q pervenientibus in loca quædam m & n, tum velocitates, tum accelerationes futuræ sint distantiis mS, nR proportionales, ideóque curvâ AnmC, jam existente eâdem quam descripsimus in casu 1°, motus dehinc omnes conspirabunt, atquè idem eveniet, si sit curvatura in P ad curvaturam in Q in minore ratione quam distantiæ PS ad distantiam QR. Quarè quocumque modo percutiatur chorda musica, quam citissimè induet formam curvæ in casu primo descriptæ, atquè perget moveri more ibidem descripto. Q. E. D. 300.

Cæterùm inflexiones seu distantias admodum parvas ab axe motûs tam in chordis musicis quam in laminis elasticis ex quibus corpora sonora compacta esse fingi potest, viribus acceleratricibus proportionales & proindè oscillationes esse isochronas experimentis ostendit Clar. *s'Gravesandius* in Elem. phys. & *Mersennus* in harmoniâ universali longiorum chordarum vibrationes isochronas oculis observavit. Si verò chorda nimiâ vi pulsetur, vis acceleratrix in experimentis crescit in majori ratione quam distantiæ ab axe motûs & oscillationes breviori tempore absolvuntur.

Xx 3 301

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.



301. *Cor.* 1. Datis axibus A C & B D curva musica sic potest describi. Centro D & radio D B describatur circuli quadrans B N E; ducatur ad B D, perpendicularis M N circulo occurrens in N, & producatur ad P, ut sit M P ad D C, in ratione arcûs B N, ad arcum quadrantalem B N E, dico punctum P esse in curvâ musicâ A B C.

Sit enim P puuctum curvæ musicæ ABC, & dicantur B D $= a$, A C $= L$, D C $= \frac{1}{2} L$, B M $= x$, P M $= y$, arcus B P $= s$, $PS = MD = z = a - x$, radius curvaturæ in $B = r$: & si fluxio ds sive P p constans sumatur, erit (126. *lib.* 1.) radius curvaturæ in P, seu P O $= \frac{ds\,dz}{ddy} = -\frac{ds\,dx}{ddy}$. Sed (ex dem.) B D est ad P S ut curvatura in B ad curvaturam in P, id est, ut radius curvaturæ in P ad radium curvaturæ in B, seu $a : a - x = -\frac{ds\,dx}{ddy} : r$. Quarè $r\,a\,ddy = x\,dx\,ds - a\,dx\,ds$, & sumptis fluentibus, additâ constante $Q\,ds$, fit $r\,a\,dy = \frac{1}{2} xx\,ds - a\,x\,ds + Q\,ds$. Evanescente B M seu x, fit $dy = ds$, seu B P $=$ P M (*per cor.* 1. *Lem.* 7. *lib.* 1.) & æquatio in hanc abit $r\,a\,ds = Q\,ds$, ideòque constans $Q = r\,a$. Quarè in quovis curvæ puncto P erit $r\,a\,dy\,[r\,a + \frac{1}{2} xx - ax]\,ds$. Ponatur $ax - \frac{1}{2} xx = bb$, ut fit $r\,a\,dy = [r\,a - bb]\,ds$, & $rr\,aa\,dy^2 = [ra - bb]^2 ds^2 = [ra - bb]^2 dy^2 + [ra - bb]^2 dx^2$; undè deducitur $[2\,r\,a\,bb - b^4]\,dy^2 = [r\,a - bb]^2 dx^2$; & quia curva A B C ferè coincidit cum axe A C (per hyp.) ac ideò quantitas bb minima est respectu quantitatis $r\,a$ in quâ radius curvaturæ] r maximus est, si conferatur cum a vel x æquatio in hanc abibit $2\,r\,a\,bb\,dy^2 = rr\,a\,dx^2$, ex quâ eruitur $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ducatur in circulo altera ordinata m n priori M N proxima; & ex puncto N demittatur ad m n perpendiculum N t; evanescente M m, erit (ex naturâ circuli) N M : N D $=$ N t : N n, sivè $\sqrt{2ax - xx} : a = dx : N = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Est igitur $dy = \text{M n} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & sumptis fluentibus $y = \text{BN} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, cui æquationi nihil addendum vel subducendum est, cum arcus B N, evanescente P M seu y evanescat. Verum ubi P M coincidit cum C D, seu ubi fit $y = \frac{1}{2} L$, est B N $=$ B N E; & propterea $\frac{1}{2} L = \text{BNE} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, atquè adeò $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2} L}{\text{BNE}}$. Quarè in quolibet curvæ puncto P, est $y = \frac{\text{BN} \times \frac{1}{2} L}{\text{BNE}}$, & proindè $y : \frac{1}{2} L = \text{BN} : \text{BNE}$, hoc est, P M est ad C D ut arcus B N ad quadrantem B N E. Q. E. D.

302.

302. *Cor.* 2. Quia P S eſt ad B D ſeu ad a, ut radius r ad radium P O, erit $PO \times PS = ar$. Sit diameter circuli ad circumferentiam ut 1 ad c & ideò a ad BNE ut 1 ad $\frac{1}{2}c$, ſeu $BNE = \frac{1}{2}ac$, & cum ſit (301) $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$, erit $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{L}{ac}$ & $\frac{r}{a} = \frac{LL}{a^2c^2}$, & $r = \frac{LL}{ac^2}$; atquè $PO \times PS = ar = \frac{LL}{cc}$.

303. PROPOSITIO. *Si diameter circuli ſit ad circumferentiam ut 1, ad c, & chorda muſicæ uniformiter craſſæ longitudo ſit* L, *pondus* P, *pondus quo tenditur* G *& penduli in cycloide oſcillantis longitudo* D; *tempus quo chorda illa oſcillationem unam perficit, erit ad tempus unius oſcillationis penduli in ratione ſubduplicatâ* P L *ad* c c D G; *numerus verò oſcillationum chordæ tempore unius oſcillationis penduli erit* $c\sqrt{\frac{DG}{LP}}$.

Nam vis quâ particula P p in loco P, exiſtens urgetur dicatur A, ejuſdem pondus B & (*per dem.* 199) erit A ad G, ut P p ad P O, & ob uniformem chordæ craſſitudinem eſt P ad B, ut L ad P p, & his rationibus conjunctis, $P \times A$ ad $B \times G$ ut L, ad P O; undè fit A ad B ut $G \times L$ ad $PO \times P$. Jam ſi particula P p vi motrice ceu pondere A ſollicitata oſcillaretur in cycloide cujus perimeter tota æquaret duplam diſtantiam P S, tempus unius vibrationis in cycloide æquale eſſet tempori vibrationis unius chordæ muſicæ ſeu particulæ P p; quia vis particulæ P p, in cycloide oſcillantis ſemper decreſcit in ratione diſtantiæ ejus à puncto infimo ſeu medio cycloidis, quemadmodum vis illa decreſcit in ratione diſtantiæ a puncto S cum particula P p vibrationes ſuas agit in rectâ P S, & vis motrix particulæ in puncto cycloidis altiſſimo æqualis eſt vi motrici A, (*per cor. prop.* 51. *lib.* 1.). Si verò particula P p pondere ſuo abſoluto B oſcilletur in cycloide cujus perimeter tota ſit 2 D, erit hujus penduli longitudo D (*per cor. prop.* 50. *lib.* 1.), & tempus unius vibrationis chordæ muſicæ erit ad tempus unius oſcillationis penduli in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione longitudinis P S ad longitudinem D, & ſubduplicatâ ratione ponderis B ad vim A (*cor.* 5. *prop.* 24. *lib.* 2.); id eſt, in ratione ſubduplicatâ quantitatis $PO \times PS \times P$, ad quantitatem GLD, atque ideò ob $PO \times PS = \frac{LL}{cc}$ (202.) in ratione ſubduplicatâ PL ad $ccGD$. Q. D. E.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

303. Quia verò numerus vibrationum iſochronarum quas chorda vel pendulum tempore quovis dato peragunt ſunt inversè ut oſcillationum tempora, erit numerus vibrationum quas chorda muſica tempore unius oſcillationis penduli prædicti peragit ad unitatem ut tempus unius oſcillationis penduli ad tempus unius vibrationis chordæ, ideoque in ratione ſubduplicatâ $ccGD$, ad PL, & proinde numerus vibrationum quas chorda muſica peragit eo tempore quo pendulum cujus longitudo eſt D ſemel oſcillatur eſt $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$. Q. E. D.

304. *Cor.* 1. Si longitudo chordæ L digitis pedis Pariſienſis exprimatur, numerus vibrationum quas chorda tempore minuti unius ſecundi peragit, erit $19{,}0341 \sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè. Nam pendulum cujus longitudo D eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, ſeu digit. $\frac{881}{24}$, ſingulas oſcillationes tempore minuti unius ſecundi abſolvit (471. *lib.* 1.) & præterea ut 113 ad 355; ità diameter 1 ad circuli circumferentiam c, quæ proinde erit $\frac{355}{113}$. Quarè ſi loco D & c ſcribantur ipſorum valores in formulâ, erit $c\sqrt{\frac{GD}{PL}} = \frac{355}{113}\sqrt{\frac{881\,G}{24\,LP}} = 19{,}0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè.

305. *Cor.* 2. Si conferantur variarum chordarum oſcillationes, quia quantitates c & D in formulâ $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$ datæ ſunt; numeri vibrationum dato tempore peractarum erunt ut $\sqrt{\frac{G}{PL}}$, & ideò tempora quibus

bus singulæ vibrationes fiunt ut $\sqrt{\frac{PL}{G}}$ (473 *lib.* 1.).

306. *Cor.* 3. Iisdem positis, si præterea chordæ sint homogeneæ, æquè crassæ & æquè tensæ, cum in eo casu pondus G datum sit & pondus P sit ut chordæ longitudo L, tempora quibus singulæ vibrationes fiunt, erunt ut $\sqrt{LL}$, seu ut chordarum longitudines; Quod experimentis confirmavit Clariss. *s'Gravesande* in Elem. Physices.

Scholion. Quæ de chordis vibrantibus huc usque diximus, ea ferè omnia, nonnullis tamen immutatis, mutuati sumus ex tractatu de methodo incrementorum Clariss. *Taylor*. Formulas nostris similes dedêre Celeberrimi Viri, *Sauveur* in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. & *Daniel Bernoulli* tum in Actis Petropol. tum in Dissertatione de Propagatione Lucis, ab Academiâ regiâ Paris. præmio condecoratâ an. 1736.

307. PROPOSITIO. *Si numeri vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, sint inter se ut numeri* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, chordæ illæ tonos edent qui his notissimis vocibus significantur, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*, initio sumpto à tono graviori. Hæc propositio experimentis demonstrata est; nam nervi musici homogenei, æquè crassi eodemque pondere tensi, quorum longitudines sunt inversè ut numeri illi, tonos quos diximus edunt, & horum nervorum longitudines sunt inversè ut numeri vibrationum quas dato tempore absolvunt & directè ut singularum vibrationum tempora ideoque ut 180, 160, 144, 135, 120, 108, 96, 90: (306).

308. *Cor.* Sonorum differentia secundùm *grave* & *acutum*, à minori vel majori numero vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, pendet, & eò graviores sunt soni quò tardiores sunt singulæ chordarum vibrationes & contrà.

309. PROPOSITIO. *Corpora sonora homogenea & similia quorum latera homologa rationem habent inversam numerorum* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, *tonos edunt*, *UT*, *RE*, *MI*, *FA*, *SOL*, *LA*, *SI*, *ut*. Hanc propositionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris & prismatibus homogeneis & similibus habuerunt Mersennus in harmoniâ universali & D. Carré in monum. Acad. Reg. an. 1709.

310. PROPOSITIO. *Dum corpus sonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu & vi elasticâ creatus, remotis obstaculis, per superficiem corporis propagatur*: quod quidem leviora chartæ frustula superficiei corporis resonantis imposita, tremore suo indicant.

311. PROPOSITIO. *Campanæ figura ictu clavæ itâ mutari oculis cernitur ut cum rotunda esset, fiat ovata & quandiù auditur sonus, alternis mutatur oscillationibus.*

312. *Cor.* Ex tribus ultimis propositionibus concludere licet, ut in chordis ita & in aliis corporibus resonantibus, tonos pendere à numero vibrationum seu undulationum quæ dato tempore peraguntur.

PRO-

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio verò non elaſtico motum circularem excitabit.

Caſ. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu ſuo urgebunt & propellent partes medii ſibi proximas, & urgendo comprimen eaſdem & condenſabunt; dein reditu ſuo ſinent partes compreſſas recedere & ſeſe expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad inſtar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant haſce medii partes, hæ ſimilibus tremoribus agitatæ agitabunt partes ſibi proximas, eæque ſimiliter agitatæ agitabunt ulteriores, & ſic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condenſantur & redeundo relaxantur, ſic partes reliquæ quoties eunt condenſabuntur, & quoties redeunt ſeſe expandent. Et propterea non omnes ibunt & ſimul redibunt (ſic enim determinatas ab invicem diſtantias ſervando, non rarefierent & condenſarentur per vices) ſed accedendo ad invicem ubi condenſantur, & recedendo ubi rarefiunt, (f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condenſatæ, ob motum ſuum progreſſivum, quo feriunt obſtacula, ſunt pulſus; & propterea pulſus ſucceſſivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem diſtantiis, (g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus ſuis ſingulis ſingulos pulſus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant ſecundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulſus inde per medium propagati ſeſe dilatabunt ad latera, per propoſitionem præcedentem;

(f) *Aliquæ earum ibunt* (294).

(g) * *Ob æqualia temporis intervalla.* (300). 312

tem; & à corpore illo tremulo tanquam centro communi, ſecundum ſuperficies propemodum ſphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ ſi digito tremulo excitentur, non ſolum pergent hinc inde ſecundum plagam motus digiti, ſed, in modum circulorum concentricorum, digitum ſtatim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum ſupplet locum vis elaſticæ.

Caſ. 2. (h) Quod ſi medium non ſit elaſticum: quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; ſed in circulum eundo, pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum ſuum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non ſit firmum, ſed modis omnibus flexile, ſi tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus ſuis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem ſimul cedat; efficiet ut medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat ſemper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad preſſionem, per medium ambiens, ſecundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſolâ partium flammæ, ſed à totius dilatatione derivari.

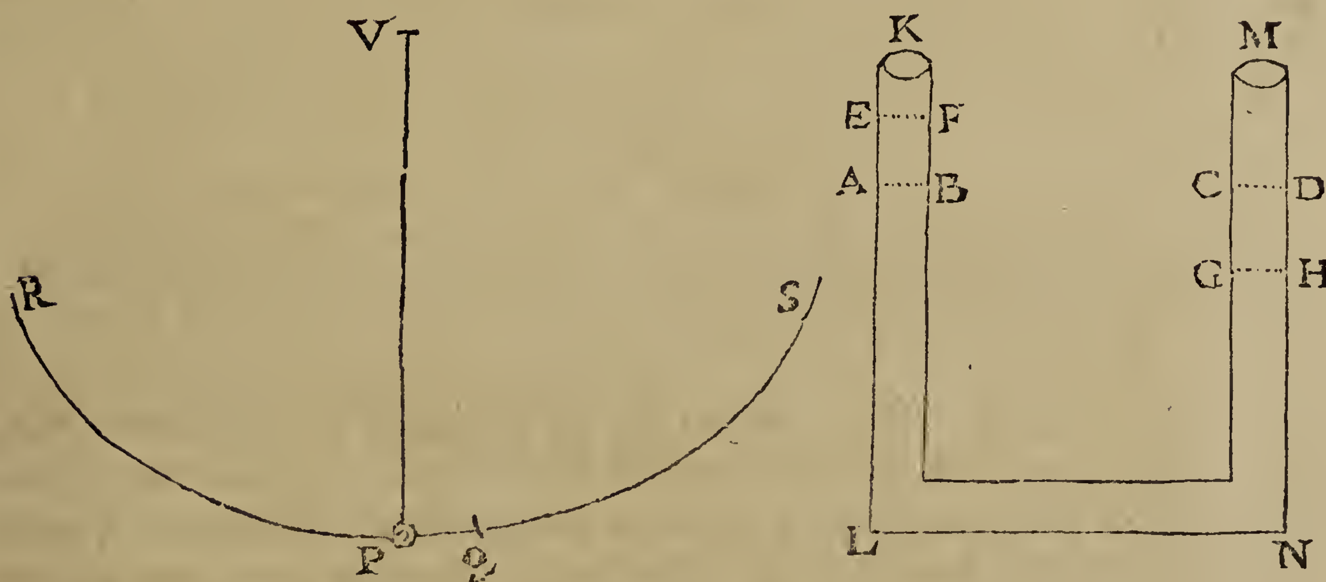
(h) * *Quod ſi medium* continuum ſit & *non elaſticum*, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in canalis cruribus erectis K L, M N *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*

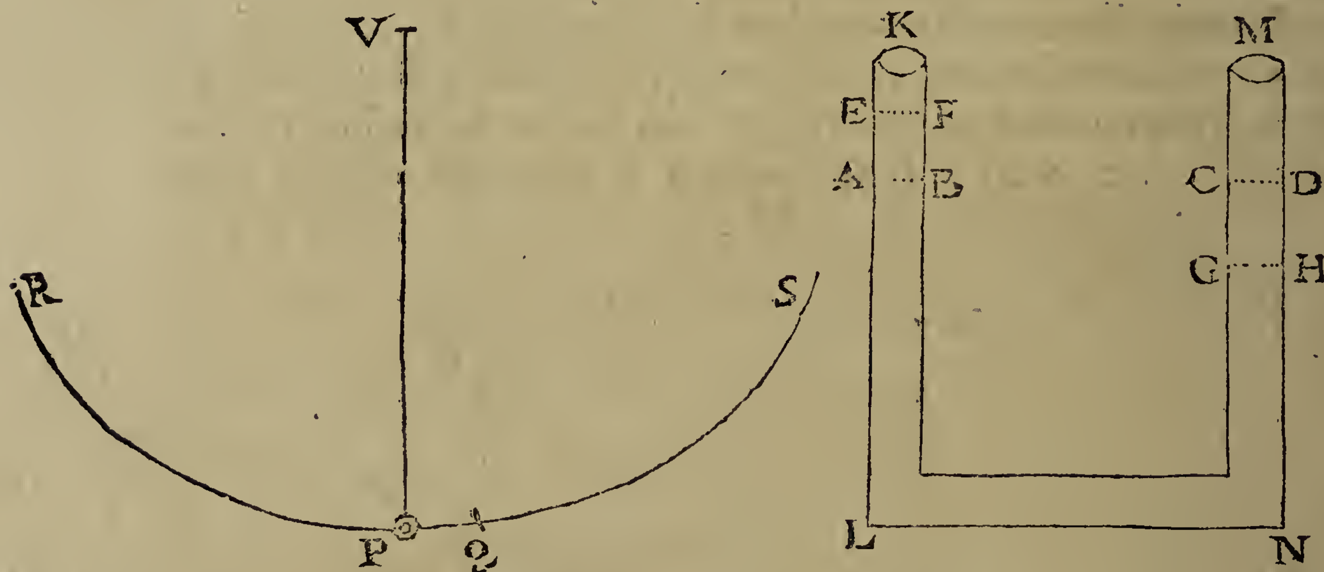
Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando; & resistentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non considero. Designent igitur *A B*, *C D* mediocrem altitudinem aquæ in crure



utroque; & ubi aqua in crure *K L* ascendit ad altitudinem *E F*, descenderit aqua in crure *M N* ad altitudinem *G H*. Sit autem *P* corpus pendulum, *V P* filum, *V* punctum suspensionis, *R P Q S* cylois quam pendulum describat, *P* ejus punctum infimum, *P Q* arcus altitudini *A E* æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLIV. THEOR. XXXV.

excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure KL ascendit ad EF, & in crure altero descendit ad GH, (i) vis illa est pondus duplicatum aquæ $EABF$, & propterea est ad pondus aquæ totius ut AE seu PQ ad (k) VP seu PR. Vis etiam, quâ pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in cycloide (*per corol. prop.* LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia PQ à loco infimo P, ad cycloidis longitudinem PR. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia AE, PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; (l) ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*



Co-

(i) * *Vis illa est pondus duplicatum &c.* Est enim vis illa pondus tam aquæ EABF, quam aquæ æqualis CGHD.

(k) * *Ad VP seu PR.* Semicyclois PR, æqualis est longitudini penduli, (*per cor. prop.* 50. *lib.* 1.).

(l) 313. * *Ideoque si aqua & pendulum &c.* Id evidentissimum fit si pondus P quod, manente oscillationis unius tempore potest ad arbitrium assumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tùm enim vires motrices, massæ movendæ, & spatia describenda, ideòque & tempora quibus spatia illa describuntur, in canali

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6\frac{1}{9}$. aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. (m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicatâ.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicatâ ratione latitudinum.

Consequitur ex constructione propositionis sequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Constituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

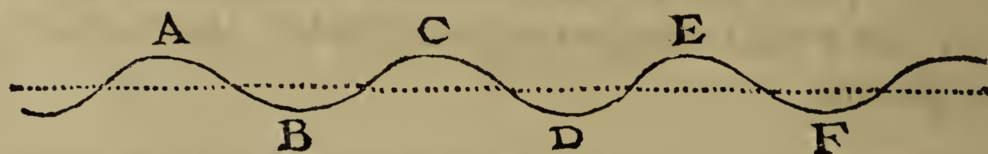
Un-

nali & in cycloide æquantur respectivè. Sed observandum est superficiem A B, esse locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, sed velocitate tantum acquisitâ ulteriùs descendit vel ascendit; sicuti corpus pendulum *P* dum pervenit in locum cycloidis infimum *P* solâ velocitate acquisitâ movetur. Undè quo tempore aqua descensum unum absolvit in crure alterutro canalis, eodem tempore pendulum oscillationem unam ex descensu & ascensu compositam perficit, duas verò oscillationes absolvit intereadum aqua è loco E descendit & ad eundem redit. 313.

(m) * *Nam pendulum ped.* $3\frac{1}{18}$, seu ped. 3. & lin. 8. quamproximè (471. *lib.* 1). Clariss. *Hermanus* tom. 3. Comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad basim inclinata habentibus definivit. Rem generaliùs pertractavit Celeb. D. *Bernoullius* in Hydrodynamicâ. Hos authores, si lubet, adeat lector.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVI. PROBL. X.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc al-



tiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (*per prop.* XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F*, (n) æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

Co-

(n) * *Æquentur duplæ penduli longitudini.* Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem ſuam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitas B in D, quod fieri non poteſt niſi aqua ab altitudine undarum deſcendat, & deindè ad eandem altitudinem aſcendat, & quia cavitas quæ eſt infrà aquæ quieſcentis ſuperficiem quam in figurâ exhibet linea punctis diſtincta, eſt circiter æqualis elevationi aquæ ſuprà eandem ſuperficiem quæ eſt æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem eſſe longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrà vel ſuprà locum illum æquilibrii, ac proinde cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis ſit diſtantiæ A B, vel B C, pendulum cujus longitudo eſt $\frac{1}{2}$ A B vel $\frac{1}{2}$ B C, ſemel

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Pariſienſes* $3\frac{1}{18}$ latæ ſunt, (o) tempore minuti unius ſecundi progrediendo latitudinem ſuam conficient; ideoque tempore (p) minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ ſpatio pedes 11000 quamproximè.

(q) *Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in ſubduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita ſe habent ex hypotheſi quod partes aquæ rectà aſcendunt vel rectà deſcendunt; ſed aſcenſus & deſcenſus ille (r) verius fit per circulum, ideoque tempus hâc propoſitione non niſi quamproximè definitum eſſe affirmo.

PROP.

ſemel oſcillabitur eo tempore quo aqua aſcendit, & iterum oſcillabitur, intereadum aqua deſcendit (313.) atque ità oſcillabitur bis quo tempore unda deſcribit latitudinem ſuam. Quoniam igitur numeri oſcillationum quas pendula eodem tempore peragunt, ſunt in ratione ſubduplicatâ longitudinis pendulorum inverſè (474. *lib.* 1.) pendulum cujus longitudo eſt ABCD, quadrupla longitudinis $\frac{1}{2}$ AB ſemel oſcillabitur quo tempore unda latitudinem ſuam percurrit. In undis verò latioribus quæ altiùs non elevantur, linea curva ABC, vix differt à rectâ AC, quæ eſt undæ latitudo, & propterea in eo caſu unda latitudinem ſuam deſcribit, intereadum pendulum cujus longitudo eſt recta AC, ſemel oſcillatur.

(o) * *Tempore minuti unius ſecundi.* (471. *lib.* 1.)

(p) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis eſt (ex dem.) Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{18}$, ducatur in tempus 60″, factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit ſpatium quod unda tempore minuti unius primi ſeu minutorum ſecundorum 60, deſcribit & ducto rurſus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in 60′, producetur ſpatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit. 312.

(q) * *Cor.* 2. Undarum velocitates ſunt ut earumdem latitudines directè & tempora quibus latitudines illas percurrunt inverſè (5. *lib.* 1.) Sed tempora illa ſunt in ſubduplicatâ ratione latitudinum undarum ſeu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines ſuas deſcribunt, ſemel oſcillantur (472. *lib.* 1.). Undarum igitur velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ratione latitudinum directè & ratione ſubduplicatâ earumdem latitudinum inverſè, ideòque ſunt in ratione ſubduplicatâ latitudinum directè.

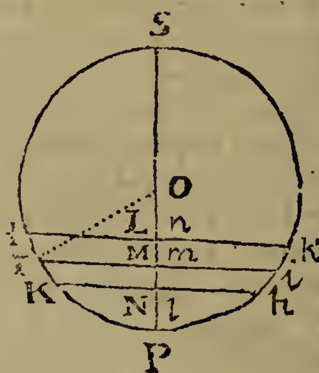
(r) * *Veriùs fit per circulum*, ſeu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quàm ad figuram canalis rectilinei in quo aqua, rectà aſcendit & deſcendit.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis penduli.

Designent *AB*, *BC*, *CD*, pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria physica (f), medii quiescentis in rectâ *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *E e*, *F f*, *G g* spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco (t) singulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *E F*, *F G* lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, & successivè translatas in loca εφ, φγ & *ef*, *fg*. Rectæ *E e* æqualis ducatur recta *P S*. Bisecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *O P* describatur circulus *S I P i*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus pro-



por-

(f) * *Medii quiescentis*, id est, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut indè productis aëris pulsibus.

(t) 314. * *Singulis vibrationibus eunt & redeunt.* Si corporis tremuli aut chordæ musicæ oscillantis particula incipiat moveri in E, & eundo secum transferat medii punctum E, in locum e, & deindè particula illa chordæ musicæ vi propriâ & punctum e, medii inter e, & C compressi ac condensati dilatatione redeant in locum E, unicus in medio elastico pulsus secundum directionem B C. producetur, & singulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ musicæ ex itu & reditu compositis, singuli excitabuntur pulsus (*prop.* 43.) atquè adeò pulsus latitudinem suam describit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu & reditu per brevissimum spatium E e, compositam, absolvit.

portionalibus; ſic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh$, ſi demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur $E\epsilon$ æqualis PL vel Pl, punctum phyſicum E reperiatur in ϵ. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ϵ ad e, & inde redeundo per ϵ ad E, iiſdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes ſingulas peraget (u) cum oſcillante pendulo. Probandum eſt quod ſingula medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causâ quâcunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

In circumferentiâ $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum totum BC. Et demiſſis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſivè agitantur, & vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur à B ad C; ſi PH vel $PHSh$ ſit tempus ab initio motûs puncti E, (x) erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motûs puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motûs puncti G; & propterea $E\epsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipſis PL, PM, PN in itu punctorum vel ipſis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, (y) æquales reſpectivè. Unde $\epsilon\gamma$ ſeu $EG+G\gamma-E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. (z) Sed $\epsilon\gamma$ latitudo eſt ſeu ex-

(u) * *Cum oſcillante pendulo..* (prop. 52. lib. 1.).

(x) * *Erit P I vel P H S I.* Quoniam puncta E, F, G, & alia deinceps, motibus ſimilibus per medii compreſſionem & dilatationem communicatis ſucceſſivè agitantur, pulſus per æqualia ſpatia EF, FG &c. æqualibus temporibus propagatur, ideòque tempus quo transfertur ab E ad F, vel ab F ad G, eſt ad tempus totum quo transfertur à B ad C, & quo ſingula puncta E, F, G vibrationes ſuas integras ex itu & reditu compoſitas perficiunt, ut ſpatium E F vel F G ad ſpatium B C, in quâ ratione etiam eſt arcus H I, vel I K, ad totam circumferentiam P H S P, (*per hyp.*) quæ tempus totum quo pulſus à B ad C transfertur, exponit, & differentia inter tempus ſumptum ab initio motûs puncti E & tempus ſumptum ab initio motûs puncti F, eſt tempus illud quod pulſus transfertur ab E ad F. Quare *ſi P H vel P H S h exponat tempus ab initio motûs puncti E, P I vel P H S I, exponet tempus ab initio motûs puncti F*, cum H I vel h i exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E, & tempus ab initio ſimilis motûs puncti E, &c. 314.

(y) * *Æquales reſpectivè.* (per prop. 52. vel 38. lib. 1.)

(z) * *Sed ε γ eſt latitudo ſeu expanſio partis medii E G, in loco ε γ,* quia punctum E tranſlatum eſt in locum ε, & punctum G in locum γ.

expanſio partis medii EG in loco $\varepsilon\gamma$; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut $EG - LN$ (a) ad EG; in reditu autem ut $EG + ln$ ſeu $EG + LN$ ad EG. Quare (b) cùm ſit LN ad KH ut IM ad radium OP, & (c) KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id eſt, ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulſuum BC, (d) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expanſio partis EG punctive phyſici F in loco $\varepsilon\gamma$ ad expanſionem mediocrem, quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, (e) ut $V - IM$ ad V in itu, utque $V + im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\varepsilon\gamma$ (f) eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V + im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V - HL}$ & $\frac{1}{V - KN}$ ad $\frac{1}{V}$; (g) & virium differentia ad medii vim elaſticam mediocrem, ut $\frac{HL - KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc eſt, ut

(a) * *Ad EG.* Nam cùm E, F, G ſint puncta tria medii quieſcentis ſeu motu impreſſo nondum condenſati vel rarefacti, expanſio medii in loco EG, mediocris ſeu quaſi media eſt inter minimam ipſius expanſionem in locis pulſuum denſiſſimis, & maximam in locis rariſſimis.

(b) 315. * *Cùm ſit LN ad KH.* Anguli ad centrum IOP menſura eſt arcus IP æqualis dimidio arcui IPi, ſeu KPk, & anguli ad circumferentiam KHk, menſura eſt etiam dimidius arcus KPk, & ideò anguli IOP & KHL, æquales ſunt. Hinc ſi ex puncto K, demiſſum intelligatur ad HL, perpendiculum æquale LN, hoc perpendiculum cum ordinatarum HL & KN differentiâ & cum arcu minimo KH triangulum conſtituet ſimile triangulo IOM. Eſt igitur LN ad KH, ut IM ad IO ſeu OP.

(c) * *Et KH ad EG.* (per hyp. ſuprà).

(d) * *Ut OP ad V.* Sunt enim circulorum peripheriæ PHSP & BC radiis ſuis OP & *V* proportionales.

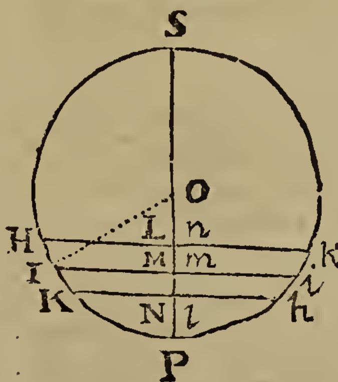
(e) * *Ut V — IM ad V.* Quia enim (*ex dem.*) $LN = \frac{EG \times IM}{V}$, erit $EG - LN = \frac{V \times EG - IM \times EG}{V}$, & hinc $EG - LN$ ad EG ut $V - IM$ ad V. Et ſimiliter ob $LN = ln$, & $IM = im$, erit $EG + ln$ ad EG ut $V + im$ ad V.

(f) * *Eſt ad vim ejus elaſticam &c.* Hic ſupponit NEWTONUS vim elaſticam medii denſitati proportionalem, quam quidem hypotheſim in aëre noſtro, cæteris paribus, quamproximè veram eſſe experimentis conſtat. At, datâ medii maſſâ, denſitas eſt ut expanſio ſeu volumen inversè; Quarè cùm hic data ſit maſſa medii in volumine EG vel $\varepsilon\gamma$, contenti, vis elaſtica eſt ut expanſio reciprocè & *ideò vis elaſtica puncti F, in loco* $\varepsilon\gamma$, *&c.*

(g) * *Et virium differentia,* id eſt, ex-

$\frac{HL - KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, five ut $HL - KN$ ad V, fi modo (ob ([h]) anguftos limites vibrationum) fupponamus HL & KN indefinitè minores effe quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium eft ut $HL - KN$, hoc eft (ob ([i]) proportionales $HL - KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, datafque HK & OP) ut OM; id eft, fi Ff bifecetur in Ω ut $\Omega\phi$. ([k]) Et eodem argumento differentia virium elafticarum punctorum phyficorum ϵ & γ, in reditu lineolæ phyficæ $\epsilon\gamma$ eft ut $\Omega\phi$. Sed differentia illa (id eft, exceffus vis elafticæ puncti ϵ fupra vim elafticam puncti γ) exceffus vis elafticæ puncti E, fuprà vim elafticam puncti G erit ad medii vim elafticam mediocrem &c.

(h) * *Ob anguftos limites vibrationum.* Quoniam eo tempore quo punctum G vibrationem unam ex itu & reditu per breviffimum fpatium Ee compofitam abfolvit & quo pulfus transfertur à B ad C, innumeræ ferè medii particulæ per medii compreffionem & dilatationem fucceffivè agitantur, fpatium illud Ee, feu æquale PS, perbreve erit, fi conferatur cum pulfuum intervallo BC, aut etiam cum radio V circuli qui circumferentiam habet æqualem BC. Rectè igitur fupponitur, quantitate HL & KN, longè minores effe quantitates V. 315.



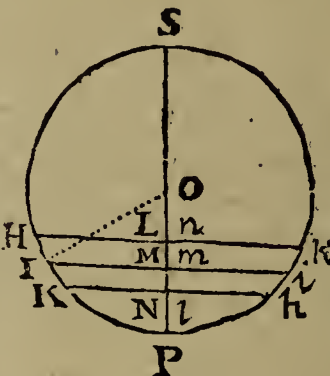
(i) * *Ob proportionales.* Liquet (*per not.* 215.) effe HL — KN ad HK, ut eft OM ad OI vel OP, undè $HL - KN = \frac{HK \times OM}{OP}$, & ideò ob datum radium OP, datúmque arcum HK, qui eft ad datam FG ut peripheria data PHSP ad datam BC, erit HL — KN ut variabilis OM. Sed $Ff = PS$, $F\phi = PM$, & propterea fi Ff bifecetur in Ω, ut fit $OP = F\Omega$, erit $OM = \phi\Omega$. Eft igitur HL — KN ut $\phi\Omega$.

(k) * *Et eodem argumento.* Nam in reditu, vis elaftica puncti F in loco $\epsilon\gamma$ eft ad vim ejus elafticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V + im}$, ad $\frac{1}{V}$, & vires elafticæ punctorum phyficorum G & E, in loco $\epsilon\gamma$, funt ut $\frac{1}{V + hl}$, & $\frac{1}{V + kn}$, ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad medii vim elafticam mediocrem ut $\frac{kn - hl}{VV + V \times hl + V \times kn + hl \times kn}$, ad $\frac{1}{V}$, hoc eft, ut $\frac{kn - hl}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ fivè ut kn — hl ad V, &c.

(l) est vis quâ interjecta medii lineola physica ε γ acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix physica ε γ, est ut ipsius distantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (*per prop.* XXXVIII. *lib.* I.) rectè exponitur per arcum *P I*; & medii pars linearis ε γ lege (m) præscriptâ movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q. E. D.* (†)

(l) * *Est vis quâ interjecta lineola.* Medium in ε & in γ vi suâ elasticâ sese dilatare in plagas oppositas C & B nititur, his viribus interjecta lineola physica ε γ, seu punctum physicum φ, urgetur in utramque plagam, & excessu vis elasticæ in ε, suprà vim elasticam in γ, acceleratur in itu & retardatur in reditu.

(m) * *Lege præscriptâ movetur.* Demonstratum est quod si punctum physicum E ad legem oscillantis penduli moveatur, uti si vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi musici (quemadmodum in not. 314. exposuimus) agitetur, tùm solâ vi elasticâ medii punctum physicum F, & alia deindè puncta secundum eandem legem oscillantis penduli successivè movebuntur.



(†) *Jam pridem Vir Acutissimus* Eulerus, *hanc* Newtoni *Theoriam suspectam habuit, aliamque formulam dedit quâ soni celeritatem determinaret à* Newtonianâ *diversam, sed suæ formulæ demonstrationem, aut vitium* Newtonianæ, *palam non fecit, quod sciamus*; *Observationes suas hanc in rem nobis communicavit Vir Doctissimus* Gabriel Cramer, *Vir in his rebus expertissimus; sagacissimique ingenii, quas suâ cum veniâ, publici juris facimus, quasque Doctorum attentione dignissimas credimus; Certè planissimè ostendit aliquod subreptionis vitium in hac Demonstrandi formâ, quam* Newtonus *adhibet, latere; scilicet demonstrationem ipsam non ex rei naturâ, sed ex Hypothesi assumptâ fluere. Ipsi verò motus aëris secundùm methodum* Newtonianam *assequi conabimur, nam ipsam ejus propositionem veram esse, etsi ejus demonstratio vitio quodam laboret, persuasum habemus, sed eam ex naturâ motûs puncti Elastici sonori esse deducendam, potius quàm ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipsi impressæ peragi possent. Hæc autem sunt Viri Illustrissimi verba.*

Propositio XLVII. Lib. II. Princip. Philos. Newtoni, minus firmâ demonstratione nititur, ut ex eo patet, quod si diversæ prorsus conclusioni demonstrandæ applicetur, eodem successu gaudeat. Id ego cùm pluribus diversis tentassem modis, lubet unum, exempli gratiâ, apponere. Sit, verbi causâ, hoc Theorema à *Newtoniano* omnino diversum, eâdem tamen Demonstratione munitum.

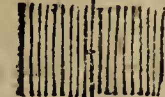
Pulsi-

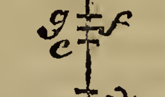
315.

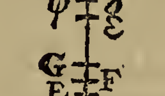
Pulsibus per Fluidum elasticum propagatis, singulæ Fluidi particulæ, motu uniformiter retardato & accelerato euntes & redeuntes, oscillantur pro lege Gravis ascendentis & descendentis.

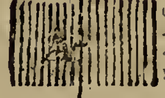
Designent AB, BC, CD, &c. pulsuum successivorum æquales distantias, ABC plagam motus pulsuum ab A versus B propagati, E, F, G, puncta tria Physica medii quiescentis in recta BC ad æquales distantias sita, Ee, Ff, Gg, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu uniformiter retardato moventur; ε, φ, γ, loca quævis intermedia illorum punctorum, & EF, FG lineolas physicas seu partes medii lineares punctis illis interjectas & successivè translatas in loca εφ, φγ, & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS, quâ tanquam axe describatur parabola SHIK. Per basim Tt exprimatur totum tempus unius vibrationis, & per ejus partes, partes temporis proportionales exprimantur, sic ut completo tempore quovis TR, vel Tr, si erigatur normalis RH aut rh, & capiatur Eε æqualis RH vel PL, aut rh vel Pl, punctum Physicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iisdem retardationis & accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum ascendente & descendente Corpore gravi. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causa quâcunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

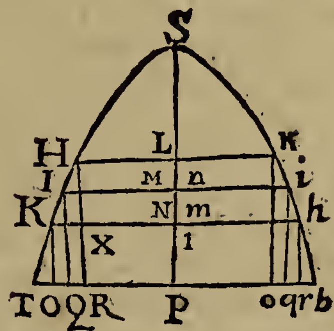
In rectâ Tt, sumantur æquales partes OQ, QR, vel oq, qr, eam habentes rationem ad rectam totam Tt, quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum BC; Et erectis OK, QI, RH, vel ok, qi, rh: demissis etiam si placet KN, IM, HL; kn, im, hl; quoniam puncta E, F, G, motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur ex B ad C, si TR vel Tr sit tempus ab initio motûs puncti E, erit TQ vel Tq tempus ab initio motûs puncti F, & TO vel To, tempus ab initio motûs puncti G; & propterea Eε, Fφ, Gγ, erunt ipsis RH, vel PL, QI vel PM, & OK vel PN in itu punctorum, vel ipsis rh aut Pl, qi aut Pm, & ok vel Pn in reditu æquales respective: Unde εγ seu EG + Gγ — Eε in itu punctorum æqualis erit EG — LN: in reditu autem æqualis EG + ln. Sed εγ latitudo est seu expansio partis medii EG in loco εγ, & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut EG—LN ad EG; in reditu autem ut EG + ln seu EG + LN ad EG. Quare cum sit LN seu HX ad KX seu OR, ut LM ad semiparametrum Parabolæ, & OR ad EG ut Tt ad BC, id est (si ponatur V ad semiparametrum ut BC ad Tt, vel si sit Tt æqualis semiparametro & V æqualis BC) ut semiparameter ad V, & ex æquo LN ad EG ut IM ad V; erit expansio









partis EG punctive Physici F in loco εγ ad expansionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo EG, ut V — IM ad V in itu, utque V + im ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco εγ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in

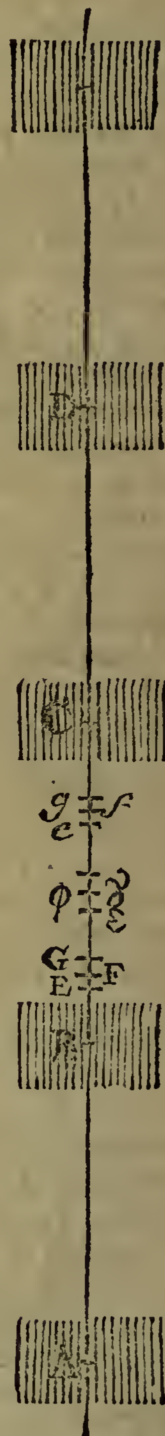
 itu;

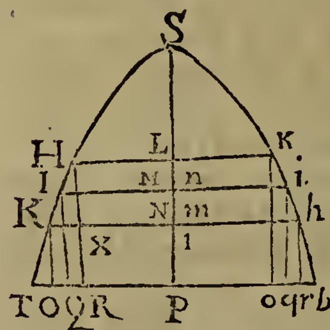
itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+Im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento itus punctorum physicorum E & G in itu sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad vim elasticam mediocrem, ut $\frac{KN-HL}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{KN-HL}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut KN — HL ad V, si modo (ob angustos limites Vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut KN — HL seu KX, seu OR, hoc est, ob proportionales OR, EF, & Tt, BC, (datasque EF, Tt & BC) constans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum physicorum ε & γ in reditu lineolæ physicæ εγ est etiam constans. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica acceleratur aut retardatur, & propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ εγ est constans. Propterea tempus rectè exponetur per ordinatam IM & medii pars linearis εγ lege præscripta movetur, id est, lege ascendentis descendentisque Gravis, estque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. E. D.

Sed (quod sanè mirum) Prop. XLIX. in quâ ex sua hypothesi NEWTONUS Soni velocitatem computat, eandem dabit conclusionem in nostra, & , ut arbitror, in aliâ quâcunque. Sic

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris nostri, comprimi, sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi in quo pulsus propagatur. Et, quo tempore corpus cadet ex altitudine æquali dimidio ipsius A eodem tempore pulsus percurret spatium æquale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.)

Nam stantibus quæ in Propos. XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica singulis vibrationibus describendo spatium PS urgeatur in itu & reditu à vi Elastica quæ ipsius ponderi, æquetur, peraget semivibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine PS, adeoque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4 PS. Quare, cùm tempora descensus sint in subduplicata ratione longitudinum percursarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$A, in subduplicatâ ratione longitudinis 4 PS ad $\frac{1}{2}$A, seu 8 PS ad A. Sed vis quâ in singulis punctis urgetur particula EG erat ad ejus vim mediocrem elasticam, ut KN — HL seu KX vel OR ad V, & vis illa mediocris, hoc est pondus incumbens quo lineola EG comprimitur, est ad pondus lineolæ EG, ut A ad EG, adeoque ex æquo, vis quâ lineola EG in singulis punctis urgetur, est ad ejus pondus, ut OR × A ad EG × V, seu ut semiparameter in A, ad VV (est enim OR ad EG ut Tt ad BC, atque ideo ut semiparameter ad V) vel ut 8 PS × A ad BC², ob V q ad BC q ut semiparametri





quadratum ad Tt quad. (atque ideo ut 8 PS ad semiparametrum.) Quare cùm tempora quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa Elastica, ad tempus unius vibrationis urgente

vi

vi ponderis, in subduplicatâ ratione BC^2 ad $8PS+A$. Atque adeo ad tempus descensûs ex altitudine $\frac{1}{2}A$, in subduplicatâ ratione BC^2 ad $8PS+A$ & subduplicata ratione $8PS$ ad A, hoc est in ratione integra BC ad A. Sed tempore unius vibrationis pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium BC est ad tempus descensûs ex altitudine $\frac{1}{2}A$, ut BC ad A. Tempus autem quo pulsus percurrit spatium A est ad tempus quo percurrit spatium BC, ut A ad BC, adeoque æquale tempori descensus ex altitudinè $\frac{1}{2}A$.

Hîc notandum, quod absurda sit, & facilè refutanda hypothesis hîc assumpta, quod nempe pulsus propagetur, particulis euntibus & redeuntibus pro lege gravis ascendentis & descendentis. Verùm id ipsum est quod Demonstrationem NEWTONIANAM evertit, ostendendo nimirum eam ipsam absurdæ hypothesi probandæ æque inservire.

Hactenus Vir Doctissimus; sequuntur ea quibus restitui posse Newtonianam *demonstrationem credimus.*

De Motibus in fluido Elastico genitis.

1. *Hypothesis.* Suppono medium Elasticum constare punctis, quantitate exiguâ sed finitâ à se dissitis, & vi repulsivâ donatis quæ distantiæ illorum punctorum sit reciproce proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediatè proxima sunt sese extendit: Hoc enim modo quæcumque sit partium medii Elastici natura, satis feliciter repræsentantur effectus qui ex eorum Elaterio pendent.

2. *Cor.* 1. Medii Elastici status naturalis est ut puncta ejus Elastica à se mutuò æqualiter distent.

3. *Cor.* 2. Puncta elastica velocitatem finitam suscipere possunt vel per immediatum contactum corporis moti, velocitate suâ finitâ punctum elasticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulsivæ punctorum elasticorum si ab unâ parte fortior sit quàm ab aliâ. Reliquas causas motus, ut gravitatem, vires centrales &c. hic non consideramus.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

4. *Theor.* 1. Si velocitas finita quomodocumque excitetur in puncto Elastico, distantiæ ejus à proximo puncto versus quod movetur minuetur finitâ quantitate antequam in reliquo medio factus sit ullus motus ullaque compressio: Sint A, B, C, tria puncta medii Elastici æquidistantia moveatur A versus B velocitate finitâ, & tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum primi ordinis A a, Vis motrix puncti B erit differentia virium repulsivarum puncti A & C, est autem vis repulsiva puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (si immotum supponatur) ut BC ad Ba, & dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulsivam puncti C, ut $BC - Ba\ (= Aa)$ ad Ba. Sed A a, est infinite parvum ex Hypothesi & B a est finita quantitas, ergo vis motrix puncti B, est infinite parva vis respectu vis repulsivæ puncti C, quæ vis repulsiva pro ipsa vi naturali elaterii assumi potest; Vis autem Elasticitatis est ex genere pressionum, tempore infinitè parvo velocitatem infinitè parvam generaret, quæ velocitas infinite parva durante tempore infinitè parvo, spatium infinitè parvum secundi ordinis describere faceret: Ergo siquidem vis motrix puncti B hujus vis respectu est infinitè parva, tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum duntaxat tertii ordinis describere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur nisi spatium descriptum A a sit finita quantitas, nulla ergo erit compressio inter puncta B & C. Q. E. D.

315.

5. *Cor.* 1. Nullus ergo motus ex puncto medii Elastici in punctum proximum transfertur nisi post tempus finitum, nam spatium finitum A a, nonnisi tempore finito percurri potest per velocitatem finitam.

6. *Cor.* 2. Et velocitas finita in puncto Elastico excitata non mutabitur nisi post tempus finitum & postquam quantitate finitâ processerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finitâ utcumque in id punctum

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

ctum producta, & tempore infinitè parvo deſcribat ſpatium infinitè parvum A a, vis quâ ſiſtetur ea velocitas orietur ex differentia virium Elaſticarum puncti Z & puncti B, eſtque vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B — A a, & dividendo. Vis ſiſtens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B — A a, ſed A a eſt infinitè parvum reſpectu quantitatis A B — A a, ergo, vis ſiſtens punctum A eſt infinitè parva, reſpectu vis puncti Z, quæ eſt vis elaterii naturalis, ideo (eodem modo ac in Theorematis demonſtratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinitè parvo ſpatium infinitè parvum tertii ordinis producturam: Quare etiamſi ſingula puncta à parte B poſitâ æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non niſi ſpatium infinitè parvum ſecundi ordinis infinitè parvo tempore ex ſpatio A a eodem tempore deſcripto detraherent, maneret itaque idem, velocitates ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii Elaſtici, niſi poſt tempus finitum & poſtquam finita quantitate proceſſerit.

Z A B

a

7. *Cor.* 3. Si conſiderentur innumera puncta Elaſtica ordine in lineâ rectâ poſitâ,

A B C D E &c.

nec attendatur ad alia quæ circumquâque ſolidum ſpatium conſtituunt, ſi unum velocitate finitâ quâcumque ex causâ urgeatur, quæ conſtans in eo maneat, quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producatur, ſicque deinceps, nam per Cor. 1. nullus motus ex puncto medii Elaſtici in punctum proximum transfertur niſi elapſo finito tempore, velocitas ergo primi puncti ad ſecundum non tranſit niſi poſt finitum tempus ab initio motus primi puncti & velocitas ſecundi puncti ad tertium non tranſit niſi poſt finitum tempus ab initio motûs ſecundi ejus puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in ſecundo puncto per actionem continuatam ab initio motûs primi puncti, quàm in tertio per actionem continuatam ab initio motûs puncti ſecundi: cùm enim velocitas primi puncti ſit finita & æquabilis, compreſſio exinde orta ab initio ejus motûs eſt major quàm compreſſio quæ per motum ſecundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, ſiquidem ad celeritatem primi puncti nonniſi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget ſecundum punctum ab initio, fortior eſt quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergò tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquiret, & pari ratiocinio, cum vis motrix ſecundi puncti ſub initio fortior ſit quam vis motrix tertii, compreſſio inter ſecundum & tertium punctum major erit ſub initio quàm inter tertium & quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum ſub initio, fortior eſt quàm ea quâ urgetur quartum punctum; Ergo cùm punctum ſequens aliqualem velocitatem ſuſcipere non poſſit niſi poſtquam punctum præcedens ſpatium finitum deſcripſerit, & longiori tempore ab initio motûs ſuſcepti datam velocitatem poſſit ſuſcipere, liquet quod ea data velocitas nonniſi ſucceſſivè ad ſucceſſiva medii Elaſtici puncta pertingit.

8. *Schol.* Hinc patet diſcrimen inter motum in medio Elaſtico excitatum & motum qui excitatur in medio non Elaſtico cujus partes contiguæ ſunt, in tali enim medio, preſſio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum poſitas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; Motus verò inſtanti in circulum propagari debet; At in medio Elaſtico, Preſſio ab uno puncto ad alterum non continuatur niſi per acceſſum punctorum medii, ſive per realem motum, qui antrorſum propagetur, & poſt tempus finitum à puncto primum moto ad reliquas partes fluidi ſucceſſivè perveniat.

9. PROB. Si punctum medii Elaſtici finitâ velocitate moveatur quæ conſtans maneat, definire motum punctorum ſequentium in lineâ recta poſitorum, omiſſis aliis ſphæricè circumquaque poſitis.

Primus Caſus. Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales diſtantias in navi poſita, & punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum ſuſcipiat & reliqua puncta vehat; Recipiat verò punctum A velocitatem finitam

quæ

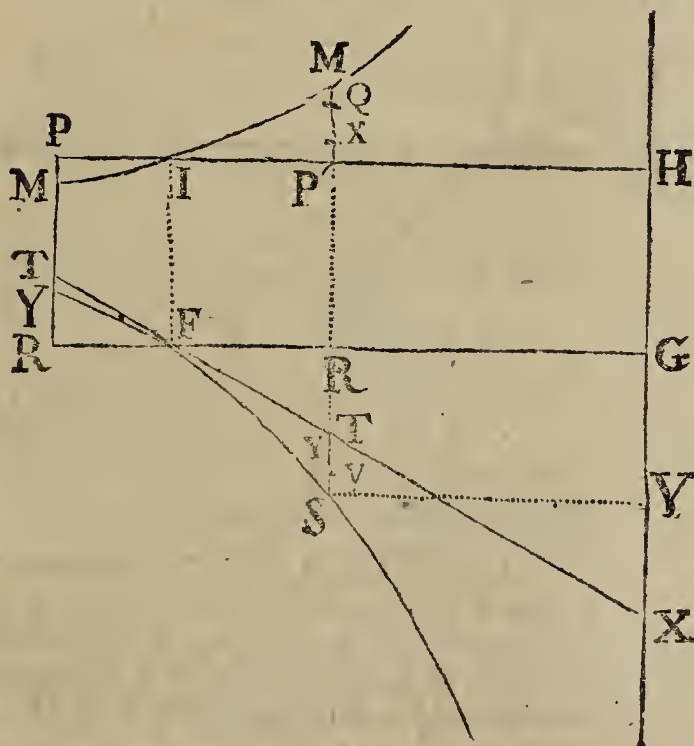
quæ conſtans maneat relatè ad navis punctum in quo verſabatur, & ponatur primo eam verſus B tendere; ex acceſſu puncti A verius B vis repulſiva particulæ A fortior fiet vi repulſivâ particulæ C, quare ex differentia virium naſcetur vix motrix particulæ B; Procedat enim A ad B quantitate A a, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut a B ad B C ſive A B (quia particularum intervalla A B, B C initio erant æqualia) & dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ eſt vis motrix puncti B ut a B ad A B — a B ſive A a, ſed vis particulæ C eſt vis ipſa elaterii in ſtatu naturali, ex Hypot. Ergo Vis elaterii eſt ad vim moventem punctum B, ut a B ad A a. Repræſentet itaque I H tempus quo diſtantia A B punctorum elaſticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque illud tempus a, ducatur deorſum ad angulos rectos linea H G quæ vim elaſticam ſingulæ particulæ medii in ſtatu naturali deſignet, ductaque F G parallela I H, aſymptotis F G & G H & dignitate æquali $a \times$ H G deſcribatur Hyperbola, tranſibit per punctum I, (ſiquidem I F = H G & F G = I H = a, ideoque I F $\times$ F G = H G $\times$ a) & ſi I P repræſentet tempus quo durante A motum eſt, dicaturque x, Dico quod P M repræſentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ Hyperbolæ, G R : G F = F I (H G) : R M & dividendo G R (H P) : F R (I P) = H G : P M; ſpatia verò uniformiter deſcripta ſunt ut tempora; ergo A B : A a = I H : I P & dividendo a B : A a = H P : I P, ſed a B ad A a ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo HP : IP = HG : PM = vis elaterii ad vim motricem puncti B, ſed H G repræſentat vim elaterii, ergo P M ubique repræſentat vim motricem puncti B.

Repræſentabit ergo etiam linea P M velocitatem momento P genitam, & area I P M totam velocitatem à puncto B acquiſitam tempore I P ſive tempore quo percurritur A a à puncto A.

Deſcribatur verò ex puncto F Logarithmica cujus axis ſit linea H G producta, ſubtangens linea quævis G X quæ dicatur s, ductâque ex puncto P lineâ P T S dico quod linea T S repræſentabit velocitatem tempore I P acquiſitam & area F T S ſpatium à puncto B deſcriptum.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

Eſt enim (*per nat. Logarith.*) area I F R M, ad Rect. I F G H ut R S ad G X, & Rect. I F G H ad Rect. I F R P ut F G ad F R ut G X ad R T, ideoque ex æquo area I F R M ad Rect. I F R P ut R S ad R T, & dividendo, eſt I P M ad I F R P ut T S ad R T; Ergo area I P M eſt ad T S in Ratione datâ, ob datum P R & rationem F R ad R T datam, ut pote æqualem rationi F G ad G X, eſt ergo T S ut I P M, 315.



ſive ut velocitas puncti B, & cùm perpendicula inter ordinatas T S ſint æqualia momentis temporis in linea I P ſumptis, area F T S erit ut ſpatium à puncto B percurſum.

Eodem modo conſtabit, quod ſi vis elaſtica ageret more gravitatis tempore a, velocitas quam eo tempore generaret, deſignaretur per ſubtangentem s, & ſpatium deſcriptum foret $\frac{a\,s}{2}$, dicatur verò m velocitas data puncti A, data erit ratio s ad m, intervallum particularum A B erit $m\,a$, & ſpatium A a velocitate datâ percurſum eſt $m\,x$, notandum verò eſt quod ea

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. 47. THEOR. 38.

velocitas s ſit pluſquam dupla velocitatis globi tormentarii, unde liquet quod in caſibus ſequentibus ubi velocitas puncti A longe minor velocitate globi tormentarii eſt intelligenda; quantitas $\frac{m}{s}$ eſt fractio ſatis parva.

Ad calculum verò facile revocatur linea F T S & area T S; 1°. enim cùm ſubtangens ſit s, ordinatarum F G, S Y differentia ſit x, area tota F G S Y (*ex nat. Log.*) eſt $s\,x$, intervallum R S eſt $s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. Rectang. R G × R S $= \overline{a - x} \times s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. & quoniam eſt F G (a) : G X (s) = F R (x) : R T. eſt R T $= \frac{sx}{a}$ & Triang. F R T $= \frac{sx^2}{2a}$. Detrahantur ergo Rectang. RG×RS & Tr. FRT ex area F G S Y remanet area F T S $= sx - \overline{sa - sx} \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a}$ $= sx \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. $- sx \times 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a} = \frac{sx^2}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a}$ $+ \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ + &c.

erit itaque A a ad B b, ut $m\,x$, ad $\frac{sx^2}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. vel ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}$ &c. erit verò recta T S = R S − R T $= \frac{sx}{a} \times 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. $- \frac{sx}{a} = \frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. ideoque velocitas data puncti A erit ad velocitatem puncti B ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$.

Coroll. Si quæratur in hac Hypotheſi quo tempore & ſpatio deſcripto punctum B velocitatem puncti A obtineat, fiat $m = \frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. ſed cum ſpatium A a ſit ad B b ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}$ &c. erit A a ad B b ut $\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. ad $\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. cumque primus terminus, primæ ſeriei ſit accuratè triplus primi termini alterius ſeriei, reliqui verò pluſquam tripli; Punctum A totam ſuam celeritatem puncto B communicat antequam id punctum B tertiam partem ejus ſpatii deſcripſerit quod deſcripſit punctum A.

Tempus verò x exprimetur per Radices hujus æquationis $0 = \frac{ma}{s} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ &c. Ubi liquet quod quando $\frac{m}{s}$ eſt fractio, tunc x eſt minus quam a, & ſeries eſt Convergens, ideoque ex primo termino & proximo aſſumptis erit $x = a\sqrt{\frac{2m}{s}}$; rem accuratius expendere iſto in caſu, qui merè fictitius eſt, nihil eſt neceſſe.

Caſus ſecundus. Si A moveatur uniformiter & acceleret punctum B quod etiam acceleret punctum C (nullâ habitâ ratio-

ne motûs puncti D) erit in hoc Casu vis repulsiva A ad vim repulsivam C ut $AB - Bb + Cc$ ad $AB - Aa + Bb$ & differentia virium sive vis motrix puncti B ad vim repulsivam puncti C, ut $Aa - 2Bb + Cc$ ad $AB - Aa + Bb$; est præterea vis repulsiva puncti C ad vim Elaterii ut AB ad $AB - Bb + Cc$; & denique vis Elastica est ad vim moventem punctum B in primo casu ut $AB - Aa$ ad Aa; ideoque ex æquo vis vera motrix puncti B ad ejus vim in primo casu ut

A a B b C c D &c.

$$\left.\begin{array}{l} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right.$$

In eâdem autem Hypothesi vis motrix puncti C, hoc modo determinatur, est vis repulsiva puncti B ad vim repulsivam puncti D ut Dc ad bc sive ut $AB - Cc$, ad $AB - Bb + Cc$, ergo vis motrix puncti C ad vim repulsivam puncti D, ut $Bb - 2Cc$ ad $AB - Bb + Cc$.

Hæc vis repulsiva puncti D est ad vim Elasticam ut AB ad $AB - Cc$, denique vis Elastica ad vim moventem punctum B in primo Casu, ut $AB - Aa$, ad Aa, ideoque ex æquo vis motrix puncti C, ad vim moventem punctum B in primo Casu ut

$$\left.\begin{array}{l} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right.$$

Ut verò determinetur motus puncti B in isto casu (qui pro vero haberi potest ob exiguitatem motûs puncti D qui negligitur) concipiatur PM ad PQ ut

$$\left.\begin{array}{l} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

& idem PM ad PX ut

$$\left.\begin{array}{l} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} Ab - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

curvæ quæ transibunt per Q & X erunt loci virium motricium puncti B & puncti C, arcæ IPQ, IPX erunt ut velocitates per illas vires dato tempore IP genitæ, & si sumantur ordinatæ TV & TY, tales ut TS, TV, TY sint ut areæ IPM, IPQ, IPX, areæ FTV, FTY erunt ut spatia Bb & Cc: sit ergo

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

$TV = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$ &c. & $TY = Ox^4 + Pa^5 + Ra^6$ &c. erit $TV\,dx = Ax^2dx + Bx^3dx + Cx^4dx + Dx^5dx$ &c.

$TY\,dx = Ox^4dx + Px^5dx$

Unde integrando, est area $FTV = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$ &c. $= Bb$

& $FTY = \frac{Ox^5}{5} + \frac{Px^6}{6}$ &c. $= Cc$

fluxio autem $TV = 2Axdx + 3Bx^2dx + 4Cx^3dx + 5Dx^4dx$ &c.

& fluxio $TY = 4Ox^3dx + 5Px^4dx$ &c.

Erat autem fluxio $TS = \frac{sxdx}{a^2} \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}$ &c.

Sed PM ad PQ, ut fluxio TS ad fluxionem TV

& PM ad PX ut fluxio TS ad fluxionem TY

ergo fluxio TS ad fluxionem TV ut

$$\left.\begin{array}{l} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

& eadem fluxio TS ad fluxionem TY ut

$$\left.\begin{array}{l} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

In his proportionibus multiplicatis extremis & mediis & terminorum collatione factâ, invenientur lineæ TV & TY & areæ FTV & FTY, sicque tempora quibus acquiruntur velocitates TV, TY & spatia descripta dum acquiruntur, obtineri poterunt, Calculum istum prolixissimum in compendio exhibebo; primò invenitur quod fluxio $TS \times AB \times AB - Aa = sm^2xdx$, est præterea $Aa - 2Bb + Cc$ æquale $mx + * - \frac{2A}{3}x^3 - \frac{2B}{4}x^4 - \frac{2C-O}{5}x^5 - \frac{2D-P}{6}x^6$ &c. estque $Bb - 2Cc = \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{C-2O}{5}x^5 + \frac{D-2P}{6}x^6$ &c. quæ series multiplicatæ per $s\,m^2\,x\,dx$ dant facta extremorum in utrâque proportione.

315.

Ut habeantur facta mediorum, in primâ proportione est A B — B b + C c × A a = $m\,x \times m\,a + * + * - \frac{A\,x^3}{3} - \frac{B\,x^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-P}{6}x^6$; ducatur in AB — Aa + Bb = $m\,a - m\,x + * + \frac{A\,x^3}{3} + \frac{B\,x^4}{4} + \frac{C\,x^5}{5} + \frac{D\,x^6}{6}$ fit

$$m\,x \times m^2 a^2 - m^2 a x + * + * + \frac{m\,A\,x^4}{3} + \frac{m\,B\,x^5}{4} + \frac{C-O}{5} m\,x^6 \text{ \&c.}$$
$$\frac{O\,m\,a\,x^5}{5} + \frac{P\,m\,a\,x^6}{6}$$
$$- \frac{A^2 x^6}{3 \times 3}$$

Quod ducatur in fluxionem T V = $d\,x \times 2\,A\,x + 3\,B\,x^2 + 4\,C\,x^3 + 5\,D\,x^4 + 6\,E\,x^5 + 7\,F\,x^6$ factum erit

$$m\,x\,d\,x \times 2\,m^2 a^2 A\,x - 2\,m^2 a\,A\,x^2 - 3\,m^2 a\,B\,x^3 + 4\,m^2 a\,C\,x^4 + \frac{2\,m\,A^2 x^5}{3} + \frac{18\,m\,B\,A\,x^6}{3 \times 4}$$
$$+ 3\,m^2 a^2 B\,x^2 + 4\,m^2 a^2 C\,x^3 + 5\,m^2 a^2 D\,x^4 - 5\,m^2 a\,D\,x^5 + \frac{2\,m\,a\,A\,O\,x^6}{5} \text{ \&c.}$$
$$+ 6\,m^2 a^2 E\,x^5 - 6\,m^2 a\,E\,x^6$$
$$+ 7\,m^2 a^2 F\,x^6$$

termini omnes hujus seriei dividantur per $s\,m$, & conferantur cum correspondentibus terminis seriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis & habebitur $m = \frac{2\,m\,a^2 A}{s}$, ideoque $A = \frac{s}{2\,a^2}$, tum $\frac{-2\,m\,a\,A}{s} + \frac{3\,m\,a^2 B}{s} = 0$, ideoque $B = \frac{s}{3\,a^3}$, 3°. $-\frac{2\,A}{3} = -\frac{3\,m\,a\,B}{s} + \frac{4\,m\,a^2 C}{s}$, unde invenitur $C = \frac{s}{4\,a^4} - \frac{s}{3 \times 4\,m\,a^4}$, 4° $\frac{2\,B}{4} = -\frac{4\,m\,a\,C}{s} + \frac{5\,m\,a^2 D}{s}$ est ergo $D = \frac{s}{5\,a^5} - \frac{6\,s^2}{3 \times 4 \times 5\,m\,a^5}$; 5°. $\frac{O-2\,C}{5} = + \frac{2\,m\,A^2}{3\,s} - \frac{5\,m\,a\,D}{s} + \frac{6\,m\,a^2 E}{s}$ est ergo $E = \frac{s}{6\,a^6} - \frac{46\,s^2}{3 \times 4 \times 5 \times 6\,m\,a^6} + \frac{2\,s^3}{3 \times 4 \times 5 \times 6\,m^2 a^6} + \frac{s\,O}{5 \times 6 \times m\,a^2}$ & denique invenitur $F = \frac{s}{7\,a^7} - \frac{252\,s^2}{3.4.5.6.7\,m\,a^7} + \frac{24\,s^3}{3.4.5.6.7\,m^2 a^7} + \frac{s\,P}{6.7\,m\,a^2}$.

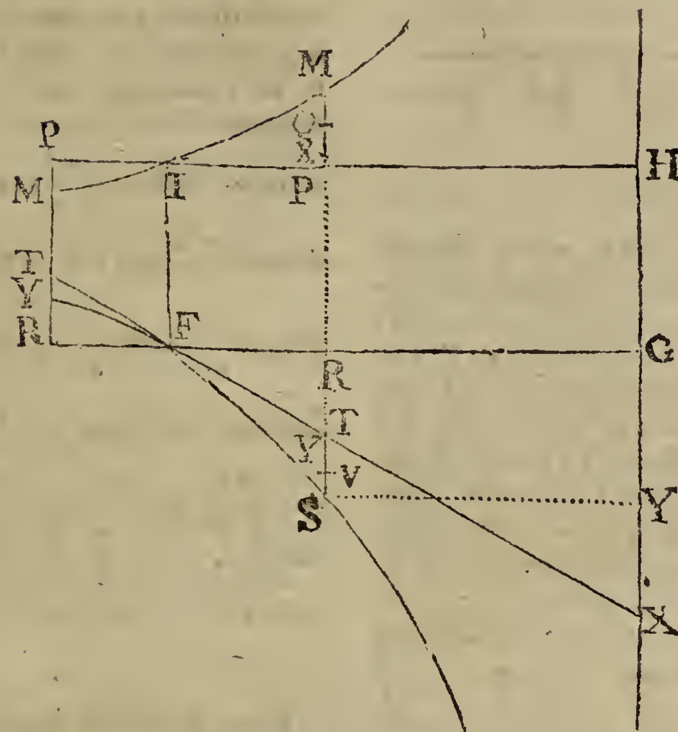
In alterâ Proportione resumatur factum A B — B b + C c × A a quod est $m\,x \times m\,a + * + * - \frac{A\,x^3}{3} - \frac{B\,x^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-P\,x^6}{6}$ ducatur in AB — Cc quod est

$$m\,a + * + * + * + * - \frac{O\,x^5}{5} - \frac{P\,x^6}{6} \text{ \&c. fit}$$

$m\,x \times m^2 a^2 + * + * - \frac{m\,a\,A\,x^3}{3} - \frac{m\,a\,B\,x^4}{3} - \frac{m\,a\,C\,x^5}{5} - \frac{m\,a\,D\,x^6}{6}$ &c. Multiplicetur per fluxionem T X quæ est $d\,x \times, 4\,O\,x^3 + 5\,P\,x^4 + 6\,Q\,x^5 + 7\,R\,x^6$ &c. habetur $m\,x\,d\,x \times 4\,m^2 a^2 O\,x^3 + 5\,m^2 a^2 P\,x^4 + 6\,m^2 a^2 Q\,x^5 + 7\,m^2 a^2 R\,x^6 + 8\,m^2 a^2 S\,x^7$

$$- \frac{4\,m\,a\,A\,O\,x^6}{3} - \frac{4\,m\,a\,B\,O\,x^7}{4}$$
$$- \frac{5\,m\,a\,A\,O\,x^7}{3}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per $s\,m$ & conferantur cum terminis correspondentibus seriei quam exhibet factum extremorum secundæ proportionis, & habebitur



tur $\frac{A}{3} = \frac{4ma^2O}{5}$ ideoque $O = \frac{s^2}{2\times3\times4ma^4}$: 2°. $\frac{B}{4} = \frac{5ma^2P}{s}$ hinc $P = \frac{s^2}{3\times4\times5ma^5}$ 315.

3°. $\frac{C}{5} - \frac{2O}{5} = \frac{6ma^2Q}{s}$, hinc $Q = \frac{s^2}{4\times5\times6ma^6}\ \frac{2s^3}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$ &c. unde tandem obtinentur hæ ſeries, quibus velocitates & ſpatia deſcripta exprimuntur: exprimitur ergo velocitas puncti B,

$$\text{per } TV = \frac{sx^2}{2a^2} + \frac{sx^3}{3a^3} + \frac{sx^4}{4a^4} + \frac{sx^5}{5a^5} + \frac{sx^6}{6a^6} + \frac{sx^7}{7a^7} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{2s^2x^4}{2.3\times4ma^4} - \frac{6s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} - \frac{46s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^6} - \frac{390s^2x^7}{3.4.5.6.7ma^7} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{5s^3x^6}{2\times3\times4\times5\times6m^2a^6} + \frac{50s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^7} \text{ \&c.}$$

$$\text{area } FTV = \frac{sx^3}{2\times3a^2} + \frac{sx^4}{3\times4a^3} + \frac{sx^5}{4\times5a^4} + \frac{sx^6}{5\times6a^5} + \frac{sx^7}{6\times7a^6} + \frac{sx^8}{7\times8a^7} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^4} - \frac{6s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^5} - \frac{46s^2x^7}{3\times4\times5\times6\times7ma^6} - \frac{390s^2x^8}{3.4.5.6.7.8ma^7}$$
$$+ \frac{5s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^6} + \frac{50s^3x^8}{2.3.4.5.6.7.8m^2a^7}$$

$$\text{velocitas puncti C exprimitur per } TX = + \frac{s^2x^4}{2\times3\times4ma^4} + \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} + \frac{s^2x^6}{4\times5\times6ma^6} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{2s^3x^6}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$$

$$\text{area denique } FTX = \frac{s^2x^5}{2\times3\times4\times5ma^4} + \frac{s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^7} + \frac{s^2x^7}{4\times5\times6\times7ma^6} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{2s^3x^7}{3\times4\times5\times6\times7m^2a^6}$$

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

A a B b C c D d E e

Punctorum ſequentium motus determinari poſſent ſimili ratione; Etenim vires motrices punctorum B, C, D, E &c. ſunt ut A a — 2 B b, B b — 2 C c, C c — 2 D d, D d — 2 E e, &c. Vis enim cujuſvis puncti ut C eſt ad vim puncti E ut d e ad c d ſive ut A B + E e — D d ad A B + D d — C c & dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut C c — 2 D d + E e ad c d; vis puncti E eſt ad vim Elaſticam naturalem ut A B ad e d, ergo vis motrix puncti D ad vim Elaſticam naturalem ut $\left\{\frac{Cc - 2Dd + Ee}{AB}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix} cd \\ ed \end{matrix}\right.$ ſive ut C c — 2 D d + E e ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ergo alternando eſt vis motrix puncti D ad C c — 2 D d + E e ut vis Elaſtica naturalis ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ideóque in paulò majori ratione quàm vis elaſtica ad A B quia tam c d quàm d e paulò minores ſunt quàm A B, ſed vis motrix puncti D eſt ad C c — 2 D d in majori ratione quam eadem vis motrix ad C c — 2 D d + E e, ergo vis motrix puncti D eſt ſemper ad C c — 2 D d in majori ratione quam vis elaſtica ad A B, cùmque id verum ſit in omnibus punctis & hæc ultima ratio ſit conſtans, Ratio vis motricis puncti cujuſvis ad ſpatium à præcedenti puncto deſcriptum dempto duplo ſpatii ab ipſo hoc puncto deſcripti, erit ſemper major ratione conſtante, non tamen multo, ideo Phyſicè pro conſtante aſſumi poteſt, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum ſucceſſivorum, ſunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis inſtituere neceſſe non eſt, per Analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B & C reliquorum motum ſtatuere, ſufficiens videtur.

10. Si, miſſis cæteris caſibus, quæratur intervallum temporis quo velocitas data m, in punctis ſucceſſivis B, C, generetur, ut & ratio ſpatiorum A a, B c, C c eo tempore deſcriptorum; Fiat T V $= m$, & utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 TV}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ & in ſerie $\frac{a^2 TV}{s}$, ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc ſeries in hanc formam migrabit $z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^6}{6a^4}$ &c. $\frac{-2x^4}{2.3.4z^2} - \frac{6x^5}{3.4.5az^2} - \frac{46x^6}{3.4.5.6a^2z^2}$ &c. $\frac{+5x^6}{2.3.4.5.6z^4}$ — &c.

Juxta Analyſeos *Newtonianæ* Methodum ſumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x & z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales z^2 reliqui termini ſeriei $\frac{a^2 TV}{s}$ negligi poſſunt, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ reſpectu eorum qui aſſumpti fuerunt multiplicantur; (in Hypotheſi quæ velocitatem m alicujus momenti aſſumeret hi termini negligendi non forent, ſed in caſu præſenti velocitatem m minimam ſupponere nobis licet cùm de tali tantum in futurum ſimus acturi) erit ergo $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4z^2} + \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^6} + \frac{41x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^8} - \frac{122x^{12}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12z^{10}}$ &c. (qui termini continuatâ ſerie T V inveniuntur) & æquatione per approximationem ſoluta invenietur $x^2 = 3.57z^2 = \frac{3.57a^2 m}{s}$.

Jam verò in areâ F T V quæ ſpatium B b exprimit, loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$, & aſſumantur termini in quibus differentia exponentium quantitatum x & z minima eva-

evadit, ii sunt $\frac{mx^3}{2\times 3z^2} - \frac{2mx^5}{2.3.4.5z^4} + \frac{5mx^7}{2.3.4.5.6.7z^6} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8.9z^7}$ in quibus si valor $x^2 = 3.57z^2$ substituatur, fiet hæc series $mx \times \frac{3.57}{2\times 3} - \frac{2\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5} + \frac{5\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5.6.7} - \frac{14\times 3.57\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ &c. sive $Bb = mx \times .428$.

Eodem modo valor C c invenietur ex hac serie $\frac{mx^5}{2\times 3.4.5z^4} - \frac{2mx^7}{3\times 4.5.6.7z^6}$ sive substituto valore x^2, erit $Cc = mx \times \frac{3.57\times 3.57}{2.3.4.5} - \frac{2\times 3.57\times 3.57}{3.4.5.6.7}$ &c. sive $Cc = mx \times .07$ sive circiter sexta pars intervalli à puncto B descripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et Celeritas à puncto C tunc temporis acquisita erit iisdem substitutionibus factis $m \times \frac{3.57\times 3.57}{2.3.4} - \frac{2\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{3.4.5.6}$ &c. $= m \times .279$ &c. circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod si eventus quæratur in hypothesi velocitatem m non esse quamminimam; supponatur illa æqualis ipsi s; si quæratur spatium descriptum à puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat series $TV = m$, & utroque ducto in x, erit $xTV = mx$, ergo collatâ serie xTV, & FTV habebitur ratio spatiorum percursorum A a & B b, sed illæ series posito $\frac{s}{m} = 1$. sunt

$$xTV = \frac{sx^3}{2a^2} + \frac{sx^4}{3a^3} + \frac{sx^5}{6a^4} + \frac{sx^6}{10a^5} + \frac{sx^7}{30a^6} \text{ \&c.}$$

$$\& \ FTV = \frac{sx^3}{6a^2} + \frac{sx^4}{12a^3} + \frac{sx^5}{30a^4} + \frac{sx^6}{60a^5} + \frac{11sx^7}{2160a^6} \text{ \&c.}$$

Ubi liquet quod primus terminus primæ seriei sit triplus primi termini secundæ, reliqui verò termini primæ seriei reliquorum terminorum secundæ seriei plusquam tripli, unde liquet quod A a est magis quam triplum spatii per punctum B descripti usque dum celeritatem m recipiat; Ex quo consequitur, quod siquidem B eo momento non est in medio inter puncta A & C, sed vicinius puncto A ad minimum sextâ parte spatii à puncto A descripti ab eo ulterius urgetur & acceleratur, celeritatemque majorem quam m recipit donec ad medium inter A & C perveniat, ibique cum celeritate majore quàm A feratur, versus C magis accedet, sicque vim repulsivam puncti C sentiet, dumque ultra medium inter A & C pro- 315.
movebitur sensim tardabitur, tandem destructo ejus excessu celeritatis supra celeritatem m, cùm sit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideoque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A & C iterum occurret, sed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, sicque ab ipso velocitatis incrementum de novo accipiet, sicque perpetuò oscillabitur punctum B circa medium inter punctum A & punctum C ad instar fibræ sonantis; Eâque ratione fit ut Particulæ aeris magnâ velocitate pulsæ sonum edant sponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, tapetibus aut lodicibus fortiter excussis &c.

Sed ubi m minima fit, punctum B eam celeritatem m acquisivit eo tempore quo parùm abest a medio inter puncta A & C, (per hujus n. 10.) una circiter vicesima spatii à puncto A descripti, ideoque agitationes supra dictas exiguas suscipit quas pro nullis habere Physicis licere debet, quamvis Mathematicè non omninò nullæ sint.

12. Supposito ut prius velocitatem datam m esse minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m acquiret sumpto ut prius $z^2 = \frac{a^2m}{s}$ fiat $TX = m$ & $\frac{a^4m^2}{s^2}TX = mz^4$ & ponatur ubique in serie TX, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $mz^4 = \frac{mx^4}{2.3.4} + \frac{mx^5}{3.4.5}$ &c. sive sumptis terminis in quibus exponentes quantitatum x & z differentiam minimam habent, erit $mz^4 = \frac{mx^4}{2.3.4} - \frac{4mx^6}{2.3.4.5.6z^2}$

+

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

$$+ \frac{13\,m\,x^{8}}{2.3.4.5.6.7.8\,z^{4}} - \frac{40\,m\,x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10\,z^{6}}$$

&c. & æquatione per approximationem ſolutâ, invenitur $x^2 = 9\frac{2}{5}\,x^2$. Et ſeriem FTX ulterius continuando & calculum inſtituendo ut pro ſerie F T V factum eſt, invenitur quod vis à puncto A emenſa, dum punctum C velocitatem m acquirit, eſt ad viam quam ipſum punctum C emetitur, ut 100 ad 32. ſive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus eſt vero, quia omiſſa eſt conſideratio motus puncti D, quod cum diſcedat à puncto C efficit ut vis B in ipſum C ſit fortior, breviorique tempore motum m ipſi impertiatur.

13. Hinc, cùm tempus quo punctum B celeritatem datam m acquiſivit ſit $z\sqrt{3.57}$ & tempus quo punctum C eam celeritatem acquiſivit ſit $z\sqrt{9\frac{2}{5}}$, illa tempora ſunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9.\frac{2}{5}}$ ſive ut 19 ad 30 ferè ut 2 ad 3; cùm ergo punctum A uniformiter moveatur, ſpatium quod punctum A deſcribit dum C acquirit velocitatem m, eſt ad ſpatium quod idem punctum A deſcripſerat dum B eamdem velocitatem m acquiſiverat, ſicut 3 ad 2; ſpatium verò quod C deſcripſit dum eam celeritatem acquiſivit, eſt proximè tertia pars ſpatii eodem tempore ab A deſcripti, & ſpatium quod B deſcribit dum eamdem celeritatem m acquirit eſt fere dimidia pars ſpatii eo tempore ab A deſcripti, ergo illa ſpatia à punctis C & B deſcripta, donec velocitatem m ſingula acquirant ſunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quòd ſpatium quod punctum quartum D deſcribit, dum velocitatem m attingit, erit 4a. pars ſpatii ab A deſcripti, ſiquidem ſpatium a 2do. puncto deſcriptum eſt dimidia pars ſpatii ab A deſcripti, ſpatium à 3o. puncto deſcriptum tertia pars ſpatii deſcripti ab A &c. Imo eum ordinem accuratius obſervari in punctis remotioribus ſtatuere licet quod punctum C tertiam partem ſpatii ab A deſcripti dum velocitatem m acquirit, accuratius deſcribat quàm B dimidiàm partem ſpatii ab A deſcripti dum velocitatem m ſuſcipit. Calculum tentare poteſt qui hac Analogiâ rem ſufficienter demonſtrari non cenſebit, & B. L. ignoſcere rogamus quod talem laborem ſubire piguerit.

Et eadem Analogiâ (art. 13.) deducetur, ſpatia quæ percurrunt ſucceſſiva puncta D, E dum velocitatem m acquirunt, æqualia eſſe iis quæ puncta ſingula B & C deſcripſerunt.

15. Quibus admiſſis ſequitur diminutionem intervalli inter particulas medii, cùm motu communi cum puncto A feruntur, eſſe ubicumque eamdem, & æqualem dimidio ſpatio ab A deſcripto dum B celeritatem m acquirit.

Nam cùm A bis id dimidium ſpatium deſcripſerit & B ſemel dum B communem cum A motum ſuſcipit, contrahitur ſpatium inter A & B dimidio illo ſpatio; A proceſſit ter illo dimidio ſpatio & C ſemel dum C communem cum B & A motum ſuſcipit, ergo intervallum inter A & C duplo ejus dimidii ſpatii diminutum eſt, ſed inter A & C duo ſunt particularum intervalla A & B, B & C, & primum intervallum eſt contractum dimidio illo ſpatio, ergo intervallum inter B & C eodem dimidio intervallo diminutum eſſe debet, ſicque de cæteris.

16. Ideo ſi quolibet tempore elapſo ſumatur via tota puncti A, ea via æqualis erit ſummæ diminutionum intervallorum inter omnes particulas ad quas celeritas m communicata fuit; cùm ergo motus puncti A ſit uniformis, uniformiter etiam creſcit numerus particularum ad quas celeritas m communicatur; & numerus earum particularum æqualis erit viæ à puncto A percurſæ diviſæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, ſed mutatâ celeritate puncti A, tempora quibus puncta ſucceſſiva medii celeritatem ejus puncti A ſuſcipiunt eadem tamen manent: Nam ſi in formula $x^2 = \frac{3.57\,a^2 m}{s}$ quâ determinatur quadratum temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti A ſubſtituantur loco m & s quantitates ipſis æquipollentes, formula hæc fiet quantitas conſtans (manente Elaterio medii & intervallo particularum) quæcùmque ſit velocitas puncti A; Etenim dicatur f vis elaſtica medii, quoniam, ex Hypotheſi Problematis hujuſce, uniformiter agere cenſetur tempore quod exprimitur per a ut celeritatem s generet, erit $s = a\,f$; præterea quoniam particularum intervallum

B A

$\frac{\frac{3.57\,a^2 m}{s} = 3.57\,a^2 \frac{AB}{a} = \frac{3.57 AB}{f}}{af}$ quæ quantitas, conſtantes tantùm continet à celeritate m independentes; Hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem eſt quæcumque ſit velocitas puncti A; Idem demonſtrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (*not.* 13.) rationem conſtantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, eſt nempe ad id tempus ut 3 ad 2, & ſic de cæteris punctis. Q. E. D.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii Elaſtici (manente eodem fluido) ſunt ut celeritas puncti A; Nam ſpatium A a percurſum à puncto A tempore quo certa quædam particula medii Elaſtici celeritatem m recipit eſt ſemper $m\,x$, (x deſignante tempus quo illa particula medii celeritatem m ſuſcipit) ſed illud tempus eſt conſtans (n. 17. hujuſce) quæcumque ſit celeritas puncti A, ergo ſpatium A a eſt ſemper ut velocitas m; ſed illud ſpatium A a eſt ſumma diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), ſingulæ autem diminutiones ſunt æquales (n. 15.) ergo ſingulæ diminutiones ſunt ut illud ſpatium A a, ſive ut velocitates.

19. Et vice verſâ, numerus partium compreſſarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt eſt ſemper idem quæcumque ſit puncti A velocitas; Nam ille numerus eſt ut ſpatium A a diviſum per unius partis diminutionem, ſpatium A a dato tempore eſt ut celeritas puncti A, diminutio unius partis eſt etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt, eſt ut celeritas per celeritatem diviſa, hoc eſt, in ratione conſtanti; Unde, in diverſis temporibus numerus particularum ad quas celeritas m pervenerit, erit directè ut tempus.

20. Quod ſi Particulæ datâ celeritate jam ſint dimotæ, & certum gradum compreſſionis ſuſceperint, poſtea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto A, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in Hypotheſi quod tam velocitas m quàm hæc nova velocitas addititia exiguæ ſunt) idque hoc modo demonſtrari poteſt.

Fingatur, omnes particulas primâ celeritate motas & compreſſas in navi poſitas eſſe quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave reſpectivè quieſcant, urgeatur verò prima pars per exceſſum novæ celeritatis ſuper primam, communicatio iſtius exceſſus celeritatis ad omnes partes in navi poſitas ut & nova compreſſio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, & ejus elaſticitate; Si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum A B eâ celeritate percurrebatur, ideoque ſit $AB = m\,a$, ſit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elaſticam medii in ſtatu naturali conſiderati & uniformiter agentis, inventum eſt quod tempus quo punctum B celeritatem m acquiſiverat erat $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ (n. 10.) quod ſpatium A a interea à puncto A deſcriptum erat $ma\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$ & ſpatium B b erat. $428\,m\,a\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$, ita ut compreſſio particularum ſit A a — B b $= .572\ m\ a\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$, ideoque novum intervallum inter particulas in nave poſitas erit $m\,a \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$; Eſt autem Vis Elaſtica prior ad vim Elaſticam novam inversè ut partium intervalla, ſive ut $m\,a \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad $m\,a$, ſive ut $1 - .572\sqrt{\frac{3.57\,m}{s}}$ ad 1. Et, ſi exceſſus novæ velocitatis ſuper priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas deſcriberetur per hanc celeritatem n, erit $\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, nam tempus a quo prius intervallum $m\,a$ deſcribebatur velocitate m debet eſſe ad iſtud tempus directè ut intervalla $m\,a$ & $m\,a \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ & inversè ut velocitates m & n. Denique, ſubtangens Logarithmicæ quæ deſignabatur per s in caſu priore, eſt in iſto $\frac{m\,s}{n}$, cùm enim deſignet velocitatem uni-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

315.

uniformiter genitam ab Elaterio, tempore quo intervallum particularum describitur, est directè ut vis elastica & ut tempus, habetur ergo hæc proportio, est

$$1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\Big\}\ \text{ad}\ \Big\{1-.1-\sqrt{.572\frac{3.57m}{s}}\ \frac{am}{n}$$
$$a$$

ut s ad $\frac{ms}{n}$.

In seriebus ergo supra inventis loco m ponatur n; loco a ponatur $\frac{am}{n}\times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; loco s ponatur $\frac{ms}{n}$, & tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (substituendo hos valores in formula $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$)

$$\frac{am}{n}\times 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57n}{\frac{ms}{n}}}=\frac{am}{n}\times 1-$$

$$.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57\,nnm}{mms}}=a\times 1-$$

$$.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}\times\sqrt{\frac{3.57m}{s}}.$$

Ideoque tempus $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ quo in præcedenti casu punctum B acquirebat celeritatem m, est ad tempus quo in hoc casu acquirit celeritatem n, ut 1 ad $1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, sed hæc ratio, existente m quantitate minimâ ut suppositio fert, est fere æqualitatis. Quare nova celeritas, sive excessus novæ celeritatis supra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elastici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideoque etiam ad puncta successiva iisdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii Elastici constanti celeritate m fuerit motum, postea urgeatur majori celeritate $m+n$ durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m susceperant, altero isto tempore celeritatem novam $m+n$ suscipient, & intera totidem particulæ ulteriores priorem celeritatem m accipient; Nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas à primâ propagari potest dato tempore, ad quas eo ipso tempore celeritas m propagata fuerat (hujusce 20). Interea verò uniformiter propagata fuisset velocitas pristina m ab ultimis particulis quæ eam susceperant ad totidem ulteriores. Si itaque successive post æqualia tempora velocitas crescat, totidem formabuntur portiones medii Elastici, æquali numero partium constantes, quæ successivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, secunda penultimam, & sic deinceps.

22. Hinc, si medium Elasticum urgeatur per successivos velocitatis gradus, imprimi potest ejus partibus velocitas satis magna ut sensibiliter in aures agat nec tamen excitetur in medii Elastici partibus sensibilis ea vibratio quæ juxta n. 11. nasceretur si simul & semel tota illa velocitas ipsi imprimeretur; & hinc intelligitur differentia inter aërem sonum generantem, aërem sonum propagantem, & aërem ventum deferentem; si magna velocitas particulæ aëreæ imprimatur, particula ipsi proxima tremores suscipit, fitque punctum sonorum; si velocitas minor excitetur quæ constans maneat nec per gradus augeatur aër uniformiter transfertur & fit ventus; sed si ab exiguâ velocitate ad magnam assurgatur, aëris particulæ successivos illos gradus recipiunt, & quia singula velocitas accepta est exigua tremores sensibiles non excitantur in particulis aëreis, quæ velocitatem illam magnam suscipientes & ad aurem deferentes sensationem soni producunt.

23. Si autem velocitas nova minor sit velocitate præcedente, eodem modo constabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum transibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquisitus fuerat, & ad successiva puncta iisdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquisiverant, imo solutio per constructionem Problematis ipsius productâ Logarithmica ultra punctum F quæri potest, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus positis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ & redeuntis in aërem: 1us. *Casus*. Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, & durante sin-

singulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere censeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N; altero instanti secunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ulteriores N perveniet, tertio instanti primus partium numerus N tertiam velocitatem habebit, ulterior numerus N secundam velocitatem, numerus N adhuc ulterior primam; hinc ergo si fibra dimidiam vibrationem absolverit, hoc est ultra statum suum naturalem discesserit quantum potest, erunt in aëre totidem successivæ portiones, quæ particulas numero N continebunt, quot successivæ velocitates erunt genitæ, & particulæ remotissimæ à fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus est; diminutiones intervallorum correspondebunt illis celeritatum gradibus, ut sint minimæ tam in particulis à fibrâ remotissimis, quam in particulis ipsi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino Lex observabitur, nisi quod partes aëris fibræ proximæ retrò movebuntur & compressiones in dilatationes mutabuntur, dum in portiones ulteriores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideoque tota vibratione absolutâ numerus particularum agitatarum duplus erit ejus quem in dimidia vibratione notaveramus, pars dimidia remotior est planè æqualis illi de quâ primo actum est & similiter constituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit & dilatationem; ejus citerioris partis portio remotissima à fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, & portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc est retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit & dilatationes illis celeritatibus negativis correspondebunt, ideoque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut & maximus regressus.

2dus. *Casus.* Quod si singula tempuscula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non sint, eâdem ratione intelligentur effectus fibræ in partes medii, nisi quod portiones medii quæ singulis successivis velocitatis gradibus gaudent non sint æquales, sed (per not. 19.) sint sicut tempora quibus durantibus singulæ illæ velocitates in fibrâ permanserunt.

3us. *Casus.* Quamvis autem fibræ velocitas nullo tempusculo uniformis maneat sed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibra aget in medium ac si reverâ velocitas ejus cresceret per intervalla temporis, & durante tempusculo quam minimo (sed finito) uniformis maneret; idque propterea quod Intervalla inter particulas medii sunt finitæ quantitates non verò infinitè parva; nam per not. 4. & 5. nullus motus ex puncto *A* in punctum *B* transire potest, 315.
nisi punctum *A* processerit finitâ quantulâcumque quantitate, ideoque, nisi fibra quæ urget punctum *A* velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert Hypothesis Problematis not. 9.); Pari ratiocinio punctum B non sentiet incrementa velocitatis puncti A, nisi postquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (not. 5. & 20.). Ergo fibra agit in medium quasi singulo tempusculo (æquali vel inæquali), ejus velocitas uniformis perstitisset, Intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum & secundum casum hujusce demonstrationis. Q. E. I.

25. Totum autem spatium cujus particulæ commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione à NEWTONO pulsus vocatur, & si vibratione absolutâ fibra quiesceret, semper ulterius propagaretur ille pulsus; Nam totus ille pulsus (momento quo absolvitur vibratio) divisus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt assumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia supponantur, singula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipsi respondenti, ultima portio sive remotissima à fibra eam habebit celeritatem quam fibra habuerat primo instanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibra habuit secundo instanti &c.; Sequenti verò tempusculo ultima portio pulsus ad novam portionem sibi æqualem & ulteriorem suam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipsa suscipiet penultimæ portionis celeritatem, penultima verò portio celeritatem antepenultimæ &c., postea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, & secunda celeritas in primâ portione, novi istius pulsus gene-

rabitur, ſicque deinceps: novus ergo pulſus formabitur plane ſimilis priori æqualiter extenſus, æquali celeritate in ſingulis partibus donatus (remotâ ut dixi conſideratione partium circumquâque poſitarum remque conſiderando quaſi de partibus in linea rectâ poſitis unicè ageretur).

26. Ipſe autem primus pulſus penitus quieſcit quando in ſecundum totus tranſiit ſi nulla nova chordæ agitatio ſuccedat, nam celeritas portionis pulſus quæ fibræ proxima eſt ſucceſſivè ad ſequentes portiones tranſit dum novus pulſus formatur, ſed celeritas ejus portionis fibræ proximæ eſt ultima fibræ celeritas quæ in hac Hyp. eſt quies, ſed ubi pulſus ſecundus totus formatus eſt, celeritas portionis pulſus quæ fibræ proxima erat ad initium ſecundi pulſus eſt tranſlata & per omnes partes pulſus primi ſucceſſivè tranſiit, ideoque in quiete eas conſtituit in quâ permanſerunt nullâ ſuccedente novâ agitatione.

27. Quòd ſi chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, Reſtituetur primus pulſus æqualis præcedenti qualiſcumque ſit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujuſce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis diviſum fuerat, quod fieri poteſt cum vibrationes ſint iſochronæ, iſtæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione aſſumptæ fuerunt; Dato autem tempore numerus particularum compreſſarum eſt ſemper idem qualiſcumque ſit velocitas (n. 19. hujuſce). Ergo ſiquidem ſingulo inſtanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque ſunt inſtantia data in vibrationibus Iſochronis, pulſus ad totidem particulas in quâvis vibratione Iſochronâ extendetur.

28. Si per velocitatem pulsûs intelligatur (cum NEWTONO) diſtantia ad quam pulſus extenditur diviſa per tempus quo pulſus ad eam diſtantiam pervenit, dico Pulſus in eodem medio eſſe omnes æquiveloces quæcumque ſit fibræ pulſum producentis vibratio: Id jam liquet de vibrationibus Iſochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulſus propagatur, ideoque æquale ſpatium æquali tempore percurrit, poſtea verò idem pulſus ſimiliter propagatur, ſed id pariter verum eſt de Vibrationibus Eterochronis; Dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuſcula minima quæ totis temporibus ſint proportionalia, numerus partium compreſſarum ſingulis tempuſculis diverſis ſunt illis tempuſculis proportionales (n. 19. hujuſce) ideoque totis vibrationum temporibus proportionales, ſed in ſingulâ vibratione totidem tempuſcula aſſumpta ſunt, ergo totus numerus partium quæ ſingulum pulſum conſtituunt eſt proportionalis tempori vibrationis. Sed diſtantia ad quam pervenit pulſus eſt ſemper numero partium proportionalis. Ideoque diſtantia ad quam pervenit pulſus eſt tempori vibrationis proportionalis, ſed velocitas pulſus eſt diſtantia ad quam pervenit diviſa per tempus quo ad eam diſtantiam pervenit, ergo ea velocitas eſt conſtans. Ergo in eodem medio omnes pulſus ſunt æquiveloces; Quod de ſono per experimenta verum eſſe demonſtravit *Derhamus*.

29. Quòd ſi medium diverſum ſit, velocitates pulſuum erunt inversè in ratione ſubduplicatâ denſitatis & directè in ratione ſubduplicatâ vis Elaſticæ, quippe (n. 17. hujuſce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti A tranſit in punctum B eſſe $\frac{3.57\, AB}{f}$ deſignante AB particularum intervallo & f vi elaſticâ, & uniformiter procedere motum in pulſu ab unâ particulâ ad ſequentem, ſumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulſus à primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate conſtanti 3.57.) Velocitas verò pulſus eſt directè ut ſpatium quod occupant illæ omnes particulæ & inversè ut tempus quibus motus à primâ ad ultimam tranſit, ſpatium verò quod occupant illæ particulæ cum ſint totidem eſt ut intervallum AB ſingulæ particulæ, ideoque eſt velocitas pulſus ut $\frac{AB}{\sqrt{\frac{AB}{f}}} = \sqrt{AB} \times \sqrt{f}$. Intervallum particularum eſt inversè ut denſitas medii (rem conſiderando ut in n. 25. hujuſce) ergo velocitas pulſus eſt inversè in ratione ſubduplicatâ denſitatis medii, & directè in ratione ſubduplicatâ vis Elaſticæ (quod Prop. XLVIII. ſtatuit NEWTONUS).

30. His de toto pulſu dictis nunc de motu ſingulæ particulæ pulsûs [illegible] eſt, in ſingulâ particulâ omnes velocitatis ſucceſſivos gradus quos ha[illegible]

produci, & tantùmdem temporis in eâ particulâ durare, quantùm in ea particula A, hoc cum diſcrimine quod tardius eos velocitatis gradus ſuſcipiat quam particula A, & quidem eò tardius quò ab ea remotior eſt; 1us. *Caſus.* Dividatur, ut prius, vibrationis tempus in tempuſcula, & durante uno tempuſculo æquabilis manere cenſeatur velocitas impreſſa particulæ A, fingamus ſingulo tempuſculo velocitatem ad viginti particulas pervenire, & ſpectemus ſpeciatim motum quem 10a. particula à puncto A ſuſcipiet, quæ particula dicatur X, illa particula X motum puncti A non ſuſcipit niſi poſt novem particulas antecedentes, tum ipſa particula X motum puncti *A* ſuſpicit & uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempuſculo, tunc ex Hypotheſi mutatur céleritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipſam pervenire potuerit, hoc eſt poſtquam ſucceſſivè pervenit ad particulas novem antecedentes, ſed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tempore quo prima celeritas per eaſdem novem particulas propagata fuerat; ergo prima celeritas tantò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiù duraverat in particulâ *A*; cumque idem de ſingulis ſucceſſivis motibus puncti A dici poſſit, hinc quælibet particula X ipſiſſimum habet motum a particula A, niſi quod tardius in eâ incipiat & deſinat. Ideoque etiam manifeſtum eſt in hoc caſu, ſpatia à particulis *A* & X deſcripta æqualia fore & ſimiliter deſcripta.

2us. *Caſus.* Ponatur nunc quod motus puncti *A* æquabilis non maneat durante ſingulo tempuſculo, velocitates tamen ſucceſſivæ puncti X erunt illæ quas in fine ſinguli tempuſculi quam minimi punctum *A* acquiſiverit, ut liquet ex tertio caſu notæ 24, ideoque punctum X ſuſcipiet velocitates correſpondentes velocitatibus puncti A ſumptis per ſaltus, ſed quoniam cùm primùm punctum A ſpatium finitum deſcripſit, agere incipit in punctum proximum, ſaltus illi quamminimi intelligi debent, ideoque Phyſicè nulli, hinc Phyſicè particula X & particula A eoſdem motus habebunt.

Pariter deſcrib[illegible] æqualia & ſimi[illegible] repræ[illegible] A movetur, & ejus ordinatæ repræſentent correſpondentes velocitates, & dividatur axis curvæ in partes quamminimas ſed finitas, eriganturque ordinatæ, illæ repræſentabunt velocitates æquabiles puncti *X* initio ſinguli tempuſculi, & Parallelogrammata contenta ſub ordinata & portione axis reſpondente repræſentabunt ſpatia à puncto *X* deſcripta, areæ verò mixtilineæ inter eaſdem ordinatas eaſdem axis portiones & arcus curvæ comprehenſæ repræſentabunt ſpatia correſpondentia à puncto *A* deſcripta, ſed quando portiones axis ſunt quamminimæ, ſummæ omnium eorum Parallelogrammatum 315.
& arearum mixtilinearum correſpondentium pro æqualibus habentur. Ergo ſpatia à particulis A & X deſcripta ſunt æqualia & ſimiliter deſcripta ſaltem quàm proximè.

31. Ideo uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas medii; ſingulæ verò ejus particulæ ſucceſſivè motum fibræ ſuſcipiunt & ejus ad inſtar moventur, ſed in fibrâ Elaſticâ vires ſunt ſemper proportionales diſtantiæ fibræ à puncto medio motus ſui, ut per experimenta conſtat, & illarum virium actio ſenſibiliter non turbatur per reſiſtentiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde à fibrâ aër datur qui ferè æqualiter premit, ideo fibra elaſtica ac per conſequens particulæ ipſæ medii moventur ſecundum Legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem eſt Lex motus Penduli in Cycloide oſcillantis Prop. LI. lib. I. Ergo *Pulſibus per fluidum propagatis ſingulæ particulæ motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes accelerantur ſemper & retardantur pro Lege oſcillantis Penduli* Q.E D.

32. Sumatur tempus quodvis, ſimulque illud intervallum inter particulas pulſus, quod tale eſt ut eo tempore aſſumpto motus fibræ à primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulſus longitudinem; Res eſt evidentiſſima ex præcedentibus; nam cùm motus propagetur in pulſu uniformiter qualiscumque ſit celeritas, hoc eſt, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifeſtum eſt quod ſi ut eſt totum vibrationis tempus, ſive totum tempus quo pulſus formatur ad omnes particulas quæ pulſum conſtituunt, ita portio quævis ejus temporis ad numerum particularum quæ eâ temporis portione motum receperunt.

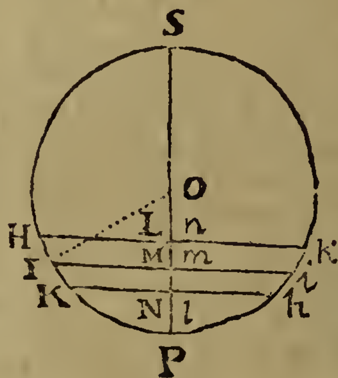
33. Ut

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

33. Ut melius horum cum *Newtonianis* nexus pateat, hic adjungere lubet Propositionis XLIX. demonstrationem ex XLVII. desumptam, quamvis vix diversa sit ab iis quæ in ipso Textu leguntur, & 1°. quidem, sit PS spatium quod fibra unâ vibratione eundo percurrit, ex ejus medio O ut centro describatur circulus PKSk ejus circumferentia repræsentet totum vibrationis ex itu & reditu compositæ tempus, partes ejus circumferentiæ ut KH repræsentabunt tempora quibus fibra per spatium correspondens NL movebitur; HL, KN repræsentabunt velocitates fibræ in punctis N & L, & HL — KN velocitatum incrementa vel decrementa, actioni elaterii fibræ proportionalia, hæc omnia patent ex Propos. XXXVIII. & LI. Lib. I.

2°. Sit BC longitudo pulsus, & dicatur *V* radius circuli cujus circumferentiæ illa longitudo BC æqualis foret, dico quod vis naturalis elaterii medii erit ad vim acceleratricem fibræ ut V — KN ad HL — KN.

Sint enim duo puncta E & G in suo naturali situ in medio elastico, quæ post aliquod tempus in locis ε & γ occurrant, suscepto nempe motu fibræ secundum Leges à nobis expositas, singula seorsim eumdem motum ac fibra habebunt, ideoque si sumptum fuerit Eε = PL erit PH tempus elapsum à momento quo punctum E motum fibræ suscepit & erit HL ejus velocitas in ε, pariter sit Gγ = PN erit PK tempus elapsum à momento quo G motum fibræ suscepit, & erit KN ejus velocitas in γ, sint verò E & G puncta proxima; compressio spatii EG ubi in εγ pervenit oritur ex eo quod plus processit ε quam γ, itaque diminutio ejus spatii erit æqualis spatio LN, ideoque εγ erit æqualis EG — LN, utque vires quibus urgentur puncta medii, eorum densitati est proportionalis, vis tota quâ urgetur punctum γ est ad eam quâ urgebatur punctum G (quæ erat vis naturalis elaterii) inversè ut spatium εγ ad EG seu ut $\frac{1}{EG - LN}$ ad $\frac{1}{EG}$. Sed est LN ad KH ut IM ad radium PO, & cum KH designet intervallum temporis quo pulsus à puncto E ad punctum G pervenit, est (per n. 32.) KH ad EG ut tota circumferentia PKSk ad BC, sive ut PO ad *V*; Ergo ex æquo est LN ad EG ut IM ad *V* & convertendo EG — LN ad EG ut *V* — IM ad *V* ideoque $\frac{1}{EG - LN} : \frac{1}{EG} = \frac{1}{V - IM} : \frac{1}{V}$, ac per consequens vis tota quâ urgetur punctum γ est ad vim naturalem elaterii ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$.



Vis illa tota quâ urgetur punctum γ est vis naturalis Elaterii medii cui superaddita est tota vis motrix fibræ quæ ad id punctum pervenit, ergo dividendo & reducendo ad communem denominatorem, Vis motrix fibræ in puncto N, est ad vim naturalem elaterii ut IM ad V — IM, sive invertendo, Vis naturalis elaterii, ad vim totam motricem fibræ in puncto N ut V — IM ad

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola physica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, (n) quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus à corpore tremulo propagari desinunt.

PRO-

ad I M, vel quia I M & K N pro se mutuo sumi possunt ubi puncta N & L sunt proxima est vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ ut V — K N ad K N; sed vis tota motrix fibræ est ad vim ejus acceleratricem durante tempusculo K H ut K N ad H L — K N, ergo ex æquo, est vis naturalis elaterii ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N: Q. E. D.

3°. In ipso motûs fibræ initio, vis elaterii fluidi in statu suo naturali est ad vim acceleratricem fibræ ut V ad H K; Nam ipso motus initio si P H sit infinitè parvum, ac per consequens etiam E ϵ infinitè parvum nullus adhuc motus ad particulam proximam G communicatur (*per n* 4.) ergo omnino evanescit K N ideoque V — K N = V, & H L — K N = H L sed arcus infinitè parvus & ejus sinus æquantur ergo H L = H K; Ergo vis elaterii fluidi in statu naturali est ad vim acceleratricem fibræ ipso ejus motus initio ut V ad H K.

Ex quibus fluit demonstratio Propositionis XLIX. Q. E. I.

(n) * *Quiescet, neque deinceps movebitur.* Quamprimùm lineola physica $\epsilon\gamma$ ad locum suum primum redierit, ipsius velocitas quam ordinata, m i, semper exponit (*prop.* 38. *lib.* 1.) extinguetur; & ejusdem lineolæ densitas visque elastica eadem erit cum densitate & vi elasticâ partis E G medii quiescentis; ideóque quiescet &c. * Id liquet ex n. 20. additionis nostræ de Motibus in fluido Elastico genitis.

316. Ex his intelligitur quomodò per vibrationes isochronas corporis resonantis producantur in aëre pulsus quibus ad aurem appulsis, fit in nobis perceptio soni, & cur soni, cessante motu tremulo corporis sonori, statim cessent. Liquet etiam tonos à numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cùm (per cor. prop. hujus) numerus pulsuum æqualis sit numero vibrationum ex itu & reditu compositarum quas chorda musica peragit, & ab isto numero tonorum diversitas oriatur (308).

317. Patet etiam quomodo aëris pulsus sonum & tremores in aliis corporibus unisonis aut consonantibus creare possint. Nam cùm aëris pulsus in nervum musicum incurrit qui vibrationem unam ex itu & reditu compositam absolvere aptus sit, eo tempore quo pulsus suam percurrit latitudinem, commovetur nervus & oscillatur per exiguum licet spatium, & recurrentibus novis atque conspirantibus aëris pulsibus celeriùs agitatur sonumque reddit. At si nervus vibrationes suas integras seu ex itu & reditu compositas perficere nequeat quo tempore pulsus aëris latitudinem suam describit, possit tamen in partes aliquot s hujusmodi vibrationibus peragendis aptas dividi, partes illæ, quiescentibus divisionum punctis, congruenter ad pulsuum recursum sensim agitabuntur, vibrationesque suas cum pulsibus unisonas singulæ perficient. Si verò nervi duo proximi in eas partes aliquotas dividi possint quæ sint inter se ad unisonum, aut quod idem est, quæ vibrationes isochronas peragant, & horum nervorum unus pulsetur sonumque edat, nervi duo sese in partes suas aliquotas veluti divident ut ad unisonum reducantur. Ut si ejus-

316

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVIII. Theor. XXXVIII.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directè & subduplicatâ ratione densitatis inversè; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum (°) erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verumtamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro physicè accuratâ haberi potest. (p) Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes itus & reditus suos per spa-

ejusdem nervi capiantur partes duæ quarum sit ratio 2 ad 3 & æqualiter tendantur, alteraque pars pulsetur, dividetur minor nervus in partes duas, & major in partes tres æquales quæ singulæ seorsim oscillabuntur. Nam brevior nervus duarum nempe partium, ter oscillando dum nervus longior partium trium, duas oscillationes absolvit (306) frequentiores in aëre pulsus excitat quorum recursu nervus longior citiùs quàm par est agitatur; & cum utriusque nervi aerisque motus congruere non possint nisi singulæ nervorum partes aliquotæ & æquales seorsim oscillentur, motus ille conspirans tam in nervis quàm in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis musicis ità contingere observarunt *Joan. Wallis* Operum in fol. tom. 2. pag. 466. Et deinde Acusticæ instaurator D. *Sauveur* in Monum. Acad. Paris. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facile possunt explicari; * & inde ingeniosissimi systematis de tonorum productione & Harmoniâ fundamenta derivavit Ill. *De Mairan* omni laude superior, quod ad Praxim felicissimè revocavit vir inter eruditos Orpheos Illustrissimus D. *Rameau*.

(o) * *Erunt ut iidem motus.* Motus enim illi sunt vel causæ vel effectus contractionis & dilatationis partium in pulsibus correspondentium. Hæc tamen proportio accurata non est, si contractiones & dilatationes sint valde intensæ, quemadmodum si chorda musica nimiâ vi pulsetur, vis motrix particularum ejus non est amplius proportionalis spatiis per quæ debet moveri, & aëris densitas vi ipsius elasticæ proportionalis non manet, si nimiâ vi comprimatur vel dilatetur aer. * Singulæ diminutiones intervallorum sunt ut velocitates (n. 19.) non tamen ex eo sequitur contractiones esse ut velocitates, (hunc verò casum & reliquos demonstravimus n. 29. additionis de mot. fluid. el.)

(p) * *Sunt autem vires elasticæ motrices.* Nam vires elasticæ motrices sunt ut partium analogarum densitates, hoc est, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; & contractiones sunt ut dilatationes quæ viribus elasticis medii contracti producuntur;

ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itûs & reditûs unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & (r) æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda eſt ut pulſuum latitudo; & in eâdem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. (ſ) Eſtque tempus itûs & reditûs unius in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ materiæ & ratione ſubduplicatâ ſpatii, atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itûs & reditûs unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

Caſ.

tur; *& velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires* (13. lib. 1.), hoc eſt, ut contractiones & dilatationes, *ideòque* cum ſpatia ſimul deſcripta ſint ut velocitates ſimul genitæ, *æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos*, ſeu motus ſuos *per ſpatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia ſimul peragent; & propterea pulſus qui tempore itûs & reditûs latitudinem ſuam progrediendo conficiunt* (314.) *& in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum* æqualibus temporibus *deſcriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.*

(q) *Ponamus quod partes correſpondentes.* Quoniam (*per caſ.* 1.) in eodem medio homogeneo & datâ pulſuum latitudine ſpatium quod partes medii oſcillando deſcribunt, manente tempore oſcillationis, minui poteſt in datâ ratione; nihil obſtat quominùs in hoc ſecundo caſu ſupponatur quod partes mediorum correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia, iiſdem manentibus oſcillationum in unoquoque medio temporibus, eundo & redeundo percurrant.

(r) * *Æquales erunt.* Si media ſint homogenea, uti in hoc 2°. caſu ſupponitur, vires elaſticæ motrices ſunt ut partium correſpondentium contractiones & dilatationes quas producunt, ſed quia quantitates materiæ in partibus correſpondentibus ſunt ut pulſuum latitudines, ſeu ut partium analogarum volumina, & partes illæ analogæ eundo & redeundo dilatantur & contrahuntur per ſpatia quantitatibus materiæ proportionalia (*per hyp.*) contractiones & dilatationes ideòque vires elaſticæ motrices æquales erunt.

(ſ) * *Eſtque tempus itûs & reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oſcillantis penduli agitatur, eſt in ra- 317.

Cas. 3. In mediis igitur densitate & vi elasticâ paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; (t) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè. *Q. E. D.*

Hæc propositio ulterius patebit ex constructione sequenti.

PRO-

ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ & subduplicatâ ratione spatii (*per cor.* 5. *prop.* 24. *lib.* 2.).

(t) *Tempus quo motus iidem peragantur &c.* Tempus quo motus per æqualia spatia peraguntur est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ movendæ directè & subduplicatâ ratione vis motricis inversè (*per cor.* 5. *prop.* 24.) ideóque in hoc tertio casu, tempus, manente spatio descripto, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ, & propterea velocitas quæ est ut spatium directè & tempus inversè, (ob datum spatium per hyp.) erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè, & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè; sed datis medii densitate & vi elasticâ, velocitas pulsuum, utcumque varietur spatium, data est, (*per cas.* 1. *&* 2.) ergò velocitas pulsuum erit semper in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè.

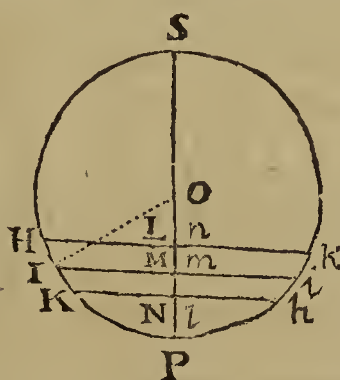
318. Ex hâc propositione patet cur soni omnis generis, gravis & acutus, intensus & remissus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam sonorum diversitas, quoad *grave* & *acutum*, à numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); at (per hanc prop.) pulsus aëris, seu plures seu pauciores dato tempore producantur, eâdem semper velocitate diffunduntur & dato tempore datum spatium conficiunt: Soni verò in eodem aëre producti eo intensiores sunt, manente tono, quo majus est spatium quod aëris particulæ eundo & redeundo describunt dato tempore; ut si chorda musica validius pulsetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoresque oscillationes particularum aëris excitat, & sonus intensior percipitur, licet tonus idem maneat & proinde pulsuum latitudo ac velocitas non mutentur. Cùm ergo tanta sit velocitas lucis ut per atmosphæram in instanti quoad sensum propagetur (*per schol. ad prop. XCVI. lib.* 1.); Si sonus & lux eodem puncto temporis excitentur, uti in machinis bellicis flamma & fragor producuntur simul, & spectator spatium quo à corpore resonante distat, tempusque quod inter luminis & soni perceptiones intercedit, dimediatur, soni velocitas innotescet. Atque eo modo in variis regionibus varia observata est velocitas soni, & in Angliâ eâ celeritate ferri, *Flamstedio* & *Halleyo* visum est, quâ pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses verò 1070, tempore minuti unius secundi percurreret. Quia verò densitas & vis elastica aëris in variis terrarum locis, diversisque anni tempestatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet soni velocitatem. Diu creditum est, observantibus *Mersenno*, *Gassendo*, & Academicis Florentinis, sonum neque conspirante vento accelerari, neque adverso retardari; Sed D. *Derham* experimentis accuratè institutis, falsum id esse asserit.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLIX. Probl. XI.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris noſtri comprimi; ſitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

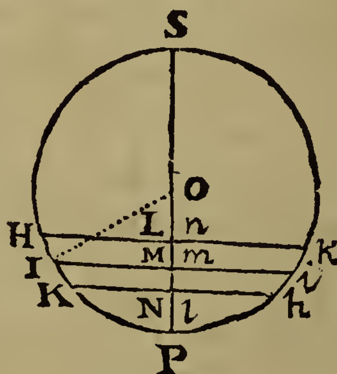


Nam ſtantibus quæ in propoſitione XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica *E F*, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *P S*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, à vi elaſticâ (u) quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *P S* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqua-

(u) * *Quæ ipſius ponderi æquetur*, & quæ decreſcat ut ipſius diſtantia à centro O; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet; quia particulæ E F in hujuſmodi cycloide oſcillantis vis motrix eſt ſemper ut diſtantia ipſius à puncto cycloidis infimo ſeu medio, & in altiſſimis ſeu extremis punctis cycloidis ponderi ipſius æquatur, *per Cor. Prop.* LI. *lib.* I. 318.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLIX. Probl. XI.

lia ſpatia ſimul impellent. Quare cùm oſcillationum tempora (x) ſint in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, (y) & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *P S* ſeu *P O* ad longitudinem A. Sed vis elaſticâ, quâ lineola phyſica *E G*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione propoſitionis XLVII.) ad (z) ejus vim totam elaſticam ut *HL* — *KN* ad V, hoc eſt (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut (a) *HK* ad V: & (b) vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *E G* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad (c) lineolæ longitudinem *EG*; ideoque ex æquo, vis quâ lineola *E G* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut *HK* × A ad V × *EG*, ſive ut *P O* × A ad V V, (d) nam *HK* erat ad *E G* ut *P O* ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpo-



(x) * *Sint in ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum* (472. lib. 1.).

(y) * *Et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius*; per cor. Prop. L. & Cor. 2. Prop. LII. lib. 1.

(z) * *Ad ejus vim totam elaſticam* in loco E G ubi medium quieſcit, ut &c.

(a) * *Ut H K ad V.* Cùm punctum K incidit in P, evaneſcit KN & fit H L — K N = H L = H K, per cor. 1. lem. VII. lib. 1.

(b) * *Et vis illa tota, hoc eſt, pondus incumbens, quo &c.* Vis elaſtica tota partis E G eſt in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quieſcit.

(c) * *Ad lineolæ longitudinem E G.* Cùm enim medium homogeneum, cujus altitudo eſt A, ſit (*per hyp.*) ejuſdem denſitatis cum medii parte E G, pondera ſunt ut volumina, hoc eſt, ut lineæ A & E G.

(d) * *Nam H K erat ad E G ut P O ad V*, in Dem. Prop. XLVII.

ra per æqualia ſpatia impelluntur, ſint (e) reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elaſticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione V V ad $PO \times A$, atque (f) ideo ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A in ſubduplicatâ ratione V V ad $PO \times A$, & ſubduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, (g) eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id (h) eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in (k) eâdem ratione; ideòque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſitâ, pulſus percurret ſpatium (l) quod erit æqua-

(e) * *Sint reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium.* Patet per cor. 3. prop. XXIV. libri hujus.

(f) * *Atque ideo ad tempus &c.* Patet per compoſitionem rationum & ex æquo; quia (*ex demonſtratis*) tempus unius vibrationis particulæ E F, urgente vi ponderis ipſius, eſt ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione P O ad A.

(g) * *Eſt ad tempus oſcillationis unius & itu & reditu compoſitæ*, penduli cujus longitudo eſt A.

(h) * *Id eſt, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.* Nam (in demonſtr. prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo B C; unde eſt V ad A ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.

(k) * *In eâdem ratione.* Quoniam tempus quo pulſus percurrit ſpatium B C; eſt ad tempus datum oſcillationis integræ penduli cujus longitudo A, datis medii denſitate & vi elaſticâ datâ, eſt ut ſpatium B C ad datam peripheriam circuli radio A deſcripti; liquet, quod tempus, quo pulſus percurrit ſpatium B C, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A deſcripti, fore eis ſpatiis proportionalem. Quare tempus quo pulſus percurrit ſpatium B C, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ penduli cujus longitudo eſt A, ut tempus quo pulſus percurrit idem ſpatium B C, ad tempus quo percurrit longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius eſt A; Ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem.

(l) * *Quod erit æquale toti altitudini A* (30. lib. 1.)

318.

æquale toti altitudini A; ideoque tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ percurret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: est (m) enim tempus casûs ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut fluidi vis elastica directè & densitas ejusdem inversè; (n) velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè & subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa (o) erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scho-

(m) * *Est enim tempus casûs*, per dimidiam altitudinem A ad tempus oscillationis unius ex solo itu, vel solo reditu constantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. lib. 1.), ideóque ad tempus duplum oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut radius circuli ad ejus circumferentiam. Quare cùm velocitates uniformes sint ut spatia eodem tempore descripta, pulsus verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A descripti tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ percurrat, & grave cum uniformi velocitate, quam acquirere potest cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem spatium describat; patet velocitates illas pulsus & gravis esse æquales.

(n) * *Velocitas pulsuum erit &c.* Velocitas pulsuum, ut pote æqualis (*per cor.* 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, est in ratione subduplicatâ altitudinis illius A (28. lib. 1.); Sed altitudo A medii homogenei, cujus densitas eadem est cum densitate medii E G & pondus in æquilibrio cum ejusdem medii E G vi elasticâ, manente densitate est ut pondus seu ut vis elastica directè, & manente vi elasticâ seu pondere est ut densitas inversè, quia densitas est semper ut pondus directè & volumen seu altitudo A inversè; & propterea conjunctis his rationibus altitudo A est semper in ratione compositâ ex ratione vis elasticæ directè & ratione densitatis inversè. Quare velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè & subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

(o) * *Erit pulsus unius latitudo.* Quoniam pulsus omnes uniformi cum velocitate propagantur (*ex dem. Prop.* XLVIII. & XLIX.) & tot pulsus æquales producuntur in aëre, quot sunt corporis tremuli vibrationes isochronæ ex itu & reditu compositæ (*per cor. Prop.* XLVII.); Si spatium quod pulsus seu sonus dato tempore percurrere possit, per numerum vibrationum, quas corpus sonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulsûs unius latitudo. Sed dato sono, numerus vibrationum quas corpus sonorum dato tempore

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum lucis & sonorum. (p) Lux enim cùm propagetur secundum lineas rectas, in actione solâ (*per prop.* XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni verò propterea quod à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati *per prop.* XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni tympanorum. (q) Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cùm pondera specifica aquæ pluvia-

re peragit, invenitur (per formulas 303, 304); Si nimirum chorda musica ad unisonum vel ad notam consonantiam cum sono dato reducatur. Cùm enim tonorum differentia à numero vibrationum quas corpus resonum dato tempore absolvit, pendeat (308 & 312); iidem toni eodem vibrationum isochronarum numero producuntur. Notum verò est spatium quod sonus dato tempore describit (318).

Exempli causâ, si sonus omnium acutissimus, quem possimus distinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius secundi absolutis producatur, & omnium gravissimus vibrationibus 12 $\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. *Sauveur* in Historia Acad. Scient. Paris. an. 1700. arbitratus est; divide spatium 1142. pedum Londinensium, quod sonus tempore minuti unius secundi conficit, per numeros 6400. & 12 $\frac{1}{2}$ successivè, & quoti, videlicet digiti 2, 14, & pedes 91, 36, erunt latitudines pulsuum, quibus soni acutissimus & gravissimus producuntur.

(p) * *Lux enim cùm propagetur secundùm lineas rectas*, & interpositis corporibus opacis intercipiatur, in actione solâ, seu pressione, motuve per medium quodlibet fluidum propagato, consistere nequit; quia pressio & motus per medium omne fluidum propagata divergunt à recto 318.
tramite in spatia immota & pone obstacula circumquaque diffunduntur, per prop. citatas. Cùm igitur lumen sit corpus, ut pote motu progressivo præditum, ab obstaculis reflexum & refractum, motumque in corporibus quæ inflammat excitans, necesse esse videtur ut à corporibus luminosis tenuissima corpuscula incredibili fere velocitate quaquaversum emittantur. Spatia igitur cœlestia, quæ astrorum omnium Lux immensâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam ætherea densissimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena esse non possunt.

(q) 319. * *Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora & minus elastica majoribus soni gravioris, cum quo consonare possunt, vibrationibus facilius concutiuntur & congruenter ad pulsuum motum agitantur; nam debet esse proportio quædam inter pulsuum aëris latitudinem & corporum circumjectorum magnitudinem, densitatem & vim elasticam, ut sonus iis communicetur; & quo fibræ breviores sunt, tenuiores & magis tensæ, eo facilius acuto sono seu brevioribus aëris pulsibus agitantur & contremunt. Quæ omnia patent per notam 317.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. L. PROBL. XII.

vialis & argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{5}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum aëris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: (r) erunt pondera ſpecifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti (ſ) circumferentia eſt pedum 186768. Et cùm pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oſcillationem ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, (t) abſolvat; pendulum pedes 29725 ſeu digitos 356700 longum (u) oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $190\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo (x) conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique (y) propagatur in inſtanti. Cùm pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad

(r) * *Erunt*, ex æquo & per compoſitionem rationum, pondera ſpecifica ſive denſitates aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Sed fluidorum in ſe homogeneorum, eidem baſi incumbentium, & in æquilibrio conſiſtentium altitudines ſunt inversè ut denſitates (172. *lib.* 2.): eſt igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; & ideo altitudo hæc eſt digitorum 356700, ſeu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

(ſ) * *Circumferentia eſt pedum* 186768. Eſt enim radius ad circumferentiam ut 113 ad 710, ſive ut 29725 ad 186768 quàm proximè.

(t) * *Abſolvat*. Pendulum cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, oſcillationem unam ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum abſolvit (471. lib. 1.); & pes Londinenſis eſt ad pedem Pariſienſem ut 15 ad 16 quam proximè, & ita ſunt pedes 3 cum lineis $8\frac{1}{2}$ ad digitos $39\frac{1}{6}$, vel $39\frac{1}{5}$ quam proximè.

(u) * *Oſcillationem conſimilem tempore &c.* Oſcillationum tempora ſunt in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. lib. 1.), & propterea ut $39\frac{1}{5}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum ſecundorum, qui quæritur, & peracto calculo invenitur eſſe $190\frac{3}{4}$ quam proximè.

(x) * *Conficiet pedes &c.* Per Prop. XLIX.

(y) * *Propagatur in inſtanti*. Nam corpus ſolidum quod condenſari non poteſt, dum movetur, totum ſimul movetur, & ideo motus ab uno corporis illius extremo

ad 870, & sales sint fere duplo densiores quàm aqua; si particulæ aëris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: (z) diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$. seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aëris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cùm sint alterius ela-

mo ad alterum extremum propagatur in instanti.

(z) * *Diameter particulæ aëris erit &c.* Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus sit, alter medio continuo ejusdem circiter densitatis cum aquâ vel salibus. Hoc medium continuum divisum sit in particulas æquales, tenuissimas & sese mutuo contingentes; aër verò ex hujusmodi particulis, quæ æqualibus intervallis distinctæ sint, constet. Harum particularum diameter dicatur D, spatium inter illas in aëre interceptum S, & ideo intervallum inter centra particularum aëris $S + D$, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, & proinde earum numerus in cubo toto aëreo N^3, & latus cubi $NS + ND$. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, & propterea M^3 earum numerus in cubo toto, ac MD cubi latus. Quia duo cubi æquales supponuntur, erit $NS + ND = MD$. Si densitas aëris sit ad densitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, densitates sunt ut quantitates materiæ, quæ sunt ut numeri particularum magnitudine & densitate æqualium, erit $1 : A = N^3 : M^3$, & hinc $1 : A^{\frac{1}{3}} = N : M$, ideoque $M = NA^{\frac{1}{3}}$. Quare cùm sit $NS + ND = MD = NDA^{\frac{1}{3}}$, erit $S + D = DA^{\frac{1}{3}}$, & $S = D \times [A^{\frac{1}{3}} - 1]$, ideoque $D : S = 1 : A^{\frac{1}{3}} - 1$ ac $D : S + D = 1 : A^{\frac{1}{3}}$. Jam si ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 9$; si verò ponatur $A = 1000$, vel $A = 1100$, vel $A = 1200$, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 10$; unde diameter D solidæ particulæ aëris erit ad intervallum $S + D$ inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde spatium totum quod particulæ solidæ in lineâ rectâ datâ positæ occupant, erit ad spatium reliquum quod intervalla particularum in eâdem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, & ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed si nulla habeatur ratio crassitudinis solidarum particularum aëris, sonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius secundi describit: quare cùm sonus per spatium totum quod solidæ particulæ aëris occupant, in instanti propagetur, & sit 9 ad 1 ut linea pedes 979 longa ad ipsius partem quam particulæ solidæ aëris occupant; partem illam, quæ est $\frac{979}{9}$, seu 109 pedum circiter, addere licet spatio 979 pedum.

312. (margin reference)

elateris & alterius toni, (a) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celerius propagabitur per solum aërem verum, idque in subduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rarescit, & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicatâ ratione densitatis; & vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* vero 1070.

Cognitâ sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. (b) Invenit utique *D. Sauveur*, factis à se experimentis, quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ

(a) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo sonus producitur, corporibus ejusdem toni facile, at corporibus alterius elateris & alterius toni ægrè aut nullo modo communicari potest (317). Unde si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, sitque proinde totum pondus atmosphæræ ad pondus vaporum ut 11 ad 1, & ad pondus aëris veri, subducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda est quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed si densitas medii, sive quantitas materiæ sub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuatur, velocitas soni augetur in eâdem ratione subduplicatâ (*per prop.* XLVIII). Quare (*in hyp. Newt.*) velocitas soni augenda est in ratione subduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; & ideo spatium dato tempore minuti unius secundi descriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Est autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

(b) * *Invenit utique D. Sauveur* in Historiâ Acad. Scient. Paris. an. 1700.

dæ quæ tempore minuti unius secundi (c) centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; ideoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi 10 $\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. (d) Unde verosimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Por-

(c) * *Centies recurrit*, hoc est centum oscillationes ex itu & reditu compositas tempore minuti unius secundi absolvit. Idem D. *Sauveur* in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. oscillationes 101 vel 102 pro ejusdem fistulæ sono posuit.

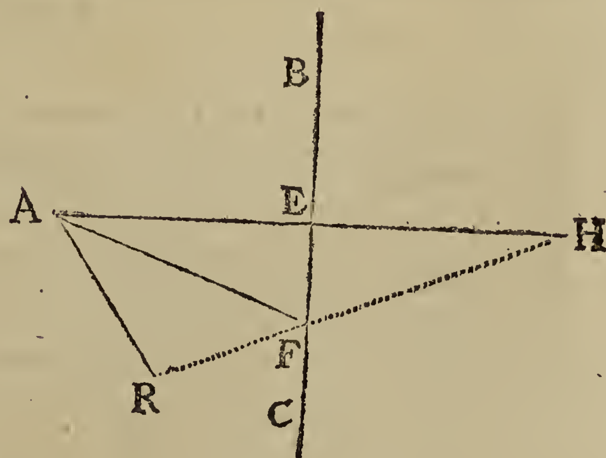
(d) * *Unde verosimile est &c.* Idem confirmatur alio experimento ejusdem D. *Sauveur*, qui loco mox citato invenit quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum Parisiensium plus minus 2, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ 243 oscillationes integras tempore minuti unius secundi perficit. Unde si dividatur numerus 1070 per 243, prodit pulsus unius latitudo ped. Paris. 4 $\frac{2}{5}$ circiter, id est, dupla circiter longitudo fistulæ. Est autem in organis pneumaticis fistula aperta, quæ patet in superiori & latiori extremo, alteri quo aër fistulam ingreditur, opposito. Si occludatur fistula, octavâ gravius sonat.

Huc usque de sono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda sunt.

320. *Prop.* Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quasi centro pulsus aëris propagantur. Constat experientiâ.

321. *Cor.* 1. Hinc si sonus è centro quovis A directe propagatus in obstaculum planum satis magnum B C incurrat, & ex A ducatur ad B C perpendicularis A E, producaturque ad H ut sit E H æqualis A E; sonus reflexus eodem fere modo percipietur ac si ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. *Cor.* 2. Similiter si sonus à centro quovis propagatus in obstaculum quod-



libet impingat, à quo ita reflectatur ut post reflexionem radii soni in centrum aliud convergant; sonus reflexus tanquam ex hoc secundo centro propagatus audietur.

323. *Cor.* 3. Unde si radii sonori satis densi ad aurem appellentes & soni unius sensationem producentes, ab aure in diversa centra convergant; locus ex quo sonus propagatur, non bene distinguetur.

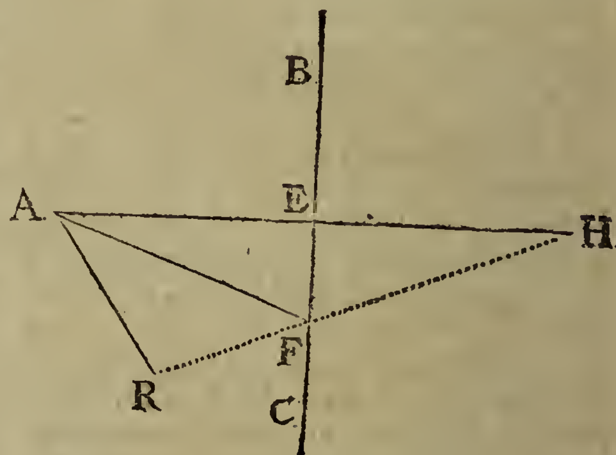
324. Si sonus producatur in A, & deinde ab obstaculo quovis B C (*vide fig. sup.*) reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R sonum directum per A R propagatum percipiet primùm; deinde sonum reflexum quasi ex centro H procedentem, postquam motu directo spatium A F, & motu reflexo spatium F R descripsit, audiet. Idem igitur sonus audietur bis, modò tamen distantiarum A R & A F R differentia tanta sit ut sonus directus & sonus reflexus eodem sensibili momento organum auditûs non afficiant; nam si sonus reflexus ad aurem perve- 322.

 nire

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſimè diſtamus à corporibus ſonoris, quàm cùm proximè abſumus, patet ex corollario propoſitionis XLVII. libri hujus. Sed & cur ſoni in tubis ſtentorophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à causâ generante augeri ſolet. Motus autem in tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua phænomena ſonorum.

SEC-

niret eo tempore, quo ſoni directi impreſſio adhuc in eâ perſeverat, non geminus, ſed intenſior tantùm ſonus audiretur. Porrò experientiâ conſtat ſonos vix poſſe diſtingui; ſi plures quàm 9 circiter ſyllabæ tempore minuti unius ſecundi ſucceſſivè producantur; & ideo ne ſonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulſus intercedere oportet partem nonam minuti unius ſecundi, quo tempore ſonus deſcribit ſpatium 127 pedum Londinenſium circiter. Hoc igitur ſpatio minor eſſe non debet diſtantiarum A R & A F R differentia, ut ſonus reflexus diſtinctè percipi poſſit in R. Quod ſi auditor in A locetur, ubi ſonus directus producitur, & ſpatium 2 A E quod ſonus deſcribit ut ad centrum A poſt reflexionem in E redeat, ſit 127 pedum Londinenſium, ideoque A E 63 vel 64 pedum circiter, diſtingui poterit ſonus reflexus à directo. Si plura ſint obſtacula juſtis intervallis diſſita, in quæ ſonus directe offendat, is quaſi ex variis locis pluries repetitus audietur; ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel craſſiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obſtacula ſonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concuſſa variè contremunt & aerem repercutiendo detonant.



325. Ex iiſdem principiis explicari poteſt tubæ vocalis ſeu ſtentorophonicæ efficacia ad vocem articulatam in loca maxime diſſita propagandam. Sunt hujuſmodi tubæ variarum figurarum, ſed omnes ſatis anguſtæ; oblongæ & intus perpolitæ, quo ſonus in arctum coactus in latius ſpatium ſeſe diffundere & virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii ſonori in determinatam plagam confertiores dirigantur. Fabrefiunt ex materiâ ad concipiendum motum tremulum, quo ſonus producitur, aptâ, ut ſonus hoc partium tubæ & aëris ab ipſis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat & longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, Auctore Clar. *Joh. Matthia Haſio*, illa cenſetur, quæ fit ex converſione parabolæ circa ipſius axem, orificio exiguo tubæ, quod os loquentis ſuſcipit, in ipſo foco parabolæ conſtituto. Hâc enim tubâ radii ſonori, ſaltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. *lib.* 2. & *Theor.* 3. *de parabola* lib. 1.). Idem *Ha-*

ſius,

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes fluidi separantur (e) *ab invicem.*

sius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, & os loquentis in altero elliptici foco constituatur; quâ ratione fit ut radii soni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (*per theor.* 4. *de ellipsi*), & deinde in tubo parabolico, ut modò dictum est, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte amplissima est, quâque sonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus est, quo minus effectum tubæ turbare possit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè & accuratè exposita vides, in ipsa laudati Auctoris Dissertatione Physico-Mathematicâ de tubis stentoreis.

* Tubis stentoreis annumerandæ sunt omnes tubæ militares aut venatoriæ sive rectæ sive incurvæ, exiguus enim sibilus quem edit tubicen constricto aëre inter labium & tubæ oram, in prodigiosum erumpit sonum, & observabile videtur ea instrumenta ita à Parabolâ discrepare ut axis suæ respectu convexa potius sit tuba quàm concava. Incrementum itaque soni non tam pendere videtur ex eo quod sonus secundùm axis tubæ directionem parallelus exeat, quàm ex eo ipso quod indicat NEWTONUS, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea esse debeat ut sonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinsecus sonum derivando, ita tamen ut nonnisi per innumeras reflexiones sive reciprocationes foras emittatur. 325.

(e) * *Ab invicem.* Resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, est semper eadem in spatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cùm in omnibus spatiis æqualibus idem defectus lubricitatis superandus sit. Est igitur hæc resistentia, cæteris paribus, ut spatium quod mobile describit, hoc est, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ simul pari velocitate moventur, se e mutuo non atterunt; capienda hic est velocitas partium relativa, quâ partes separantur ab invicem. Sed de hâc hypothesi vide Scholium sequens.

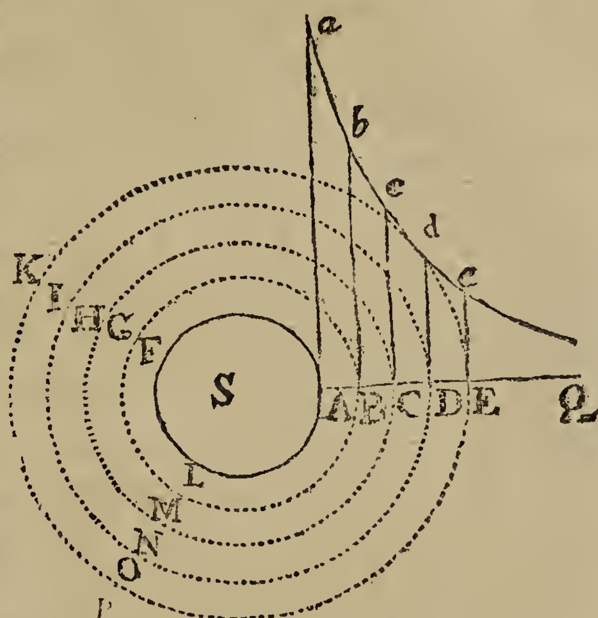
PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.

Sit AFL cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ erunt (per hypothesin) ut (a) eorum translationes ab invicem, & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari & fieri in regiones

(a) 326. * *Ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ &c.* Si superficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter se moverentur, aut si essent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio: at si superficies sint asperæ & alia super aliam incedat, nascetur ex partium attritu resistentia, quæ, dato tempore & cæteris paribus, velocitati superficierum relativæ proportionalis est (*per hyp.*). Unde si superficies contiguæ, homogeneæ & æqualis ubique asperitatis se se viribus æqualibus premant, & præterea superficies quæ super alias sibi contiguas incedunt, æquales sint; resistentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt translationibus superficierum contiguarum ab invicem, cùm hujusmodi translationes sint spatia velocitatibus relativis dato tempore descripta. Si verò translationes illæ seu velocitates relativæ superficierum contiguarum ponantur æquales; resistentiæ, cæteris paribus, erunt ut superficies contiguæ quæ sese mutuo atterunt. Quare si nec superficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ seu translationes ab invicem æquantur; resistentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compositâ ex ratione superficierum contiguarum & ratione translationum ab invicem dato tempore factarum. Impressiones verò contiguorum orbium in se mutuo factæ, sunt ut resistentiæ quibus producuntur.

giones contrarias. (b) Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc eſt, inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. (c) Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut quadrata diſtantiarum inversè. Quarè ſi ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur (d) linea curva hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum,



(b) * *Unde cùm* (per hyp.) orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, & proinde impreſſiones ex utraque parte cujuſque orbis in plagas contrarias factæ æquales ſint; impreſſiones illæ, dato tempore, datæ ſunt, & ideo ratio compoſita ex rationibus tranſlationum & ſuperficierum contiguarum, quæ eſt ut impreſſio, data eſt. Tranſlationes igitur dato tempore factæ, ſunt inversè ut ſuperficies, hoc eſt, inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe: nam cylindrorum ejuſdem longitudinis ſuperficies ſunt ut diſtantiæ ab axe cylindri, & hic omnes ſuperficies cylindricæ, quæ circa axem infinitum revolvuntur, ſunt ejuſdem longitudinis infinitæ (*per hyp.*).

(c) * 327. *Sunt autem differentiæ motuum angularium &c.* Motus angulares dicuntur ii, quibus ſingula puncta A, B, C, D, E &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos deſcribunt. Sunt igitur anguli illi quaſi ſpatia uniformi motu deſcripta, & ideo motus angulares ſunt ut anguli deſcripti directè & tempora quibus deſcribuntur inversè, & dato tempore ſunt ut anguli deſcripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentiæ ſunt ut differentiæ angulorum deſcriptorum, hoc eſt (154. *lib.* 1.) ut tranſlationes punctorum ſeu ſuperficierum ab invicem directè & diſtantiæ ab axe inversè: nam tranſlationes illæ ſunt arcus circulares quos ſingula puncta per ſuam velocitatem relativam deſcribunt, & diſtantiæ ab axe ſunt illorum arcuum radii. Sed tranſlationes dato tempore factæ, ſunt (*ex demonſtr.*) ut diſtantiæ ab axe inversè. Quarè differentiæ motuum angularium, dato tempore, ſunt ut quadrata diſtantiarum inversè. 327.

(d) * *Linea curva hyperbolica.* Quoniam ordinatæ A a, B b, &c. ſunt inversè ut abſciſſarum S A, S B, &c. quadrata; creſcente abſciſsâ ac ſine fine productâ, correſpondens ordinata decreſcit & num-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IX. Prop. LI. Theor. XXXIX.

tiarum, (e) hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, id est, si ad constituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et (f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis *D* reciprocè ut area *DdQ*, hoc est (per notas curvarum quadraturas) (g) directè ut distantia *SD*. *Q.E.D.*

(h) *Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reci-

numquam evanescit, & ideo recta S Q est curvæ asymptotus; & simili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad SQ esse alteram curvæ asymptotum.

(e) * *Hoc est, motus toti angulares.* Quoniam solo cylindri A F L impulsu agitur fluidum in orbem (*per hyp.*), necesse est ut motus angularis partium fluidi, crescente earum distantia ab axe cylindri, continuo decrescat, ac tandem ad distantiam infinitam evanescat. Unde motus totus angularis puncti A seu orbis A F L est omnium maximus, & motus totus angularis puncti cujuslibet C æqualis est summæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E & sequentium in infinitum (106. *lib.* 1.); ideoque motus toti angulares sunt ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e &c. in infinitum.

(f) * 328. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares sunt ut anguli descripti directè & tempora quibus describuntur inversè (326); & propterea si anguli descripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus describatur & tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inversè.

(g) * *Directè ut distantia SD.* Areæ D d Q momentum est D d × D E; & ideo, ob ordinatam D d quadrato abscissæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^2}$, & (*per cas.* 4. *Lemm.* 2. *libri hujus*) area D d Q est ut $\frac{1}{SD}$; quæ quantitas negativa prodit, quia area D d Q abscissæ D S non adjacet, sed ad partes contrarias vergit in infinitum. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut $\frac{1}{SD}$, hoc est, directè ut S D.

(h) * *Cor.* 1. Ex demonstratis, motus angulares partium fluidi sunt reciprocè ut tempora periodica, hoc est, reciprocè ut illa-

reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo: (i) erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, (k) habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Co-

illarum distantiæ ab axe cylindri. Velocitates verò absolutæ, ut pote uniformes, sunt ut circumferentiæ descriptæ, seu ut distantiæ ab axe cylindri directè & tempora periodica inversè, hoc est, ut distantiæ directè & distantiæ inversè, ideoque sunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (*per cor.* 5. *prop.* 4. *lib.* 1.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri; & propterea vis quâ tota superficies cylindrica nititur ab axe cylindri recedere, est ut eadem superficies directè & distantia ejus ab axe inversè, & ideo data est.

(i) * *Erunt partium singularum tempora periodica ut &c.* Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet superficiei cylindricæ, quæ in demonstratione adhibita est.

(k) * *Habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.* Sit EKP cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypothesi Corollarii 2i. dicatur t E; & quoniam in eadèm hypothesi velocitates particularum absolutæ tunc æquales (*per cor.* 1.), singulæ illæ particulæ spatia æqualia eodem tempore t E describent, hoc est, spatia æqualia peripheriæ EKP, quam punctum E tempore t E percurrit. Jam si toti cylindrorum & fluidi systemati auferatur motus omnis angularis. Cylindri exterioris; Ex spatio EKP, quod singulæ particulæ tempore t E describunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quælibet seorsim describit, ut habeatur spatium quod eadem particula eodem tempore t E percurrit in cylindro quiescente. Erit igitur EKP — DIO spatium quod particula quævis D tempore t E describit, postquam motus omnis angularis cylindri exterioris ablatus est. Quia verò particulæ singulæ revolvuntur æquabiliter (*per hyp.*), erit spatium EKP—DIO ad DIO, sive SE—SD ad SD, ut tempus t E ad tempus perio-

327.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IX. Prop. LI. Theor. XXXIX.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus; revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum corollario quarto definitum (l) acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus (m) quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliquâ extrinsecus impressâ motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aquâ profundâ stagnante experiri licet.

riodicum particulæ D in cylindro quiescente; & ideo si hoc tempus dicatur T D, erit $TD = \frac{SD \times tE}{DE}$; & simili modo tempus periodicum particulæ A in eâdem hypothesi (quod dicatur T A) $= \frac{SA \times tE}{AE}$; unde habetur $tE = \frac{AE \times TA}{SA}$, & ideo $TD = \frac{SD \times AE \times TA}{SA \times DE}$. Dato igitur tempore periodico cylindri interioris, dabitur tempus periodicum particulæ cujusvis fluidi in cylindro quiescente. Quia verò A E, S A & T A datæ sunt, erit T D ut $\frac{SD}{DE}$, hoc est, particularum fluidi tempora periodica sunt ut distantiæ ipsarum ab axe cylindri interioris directè & distantiæ earumdem à superficie cilindri quiescentis inversè.

(l) * *Acquirant.* Patet per cor. 3.

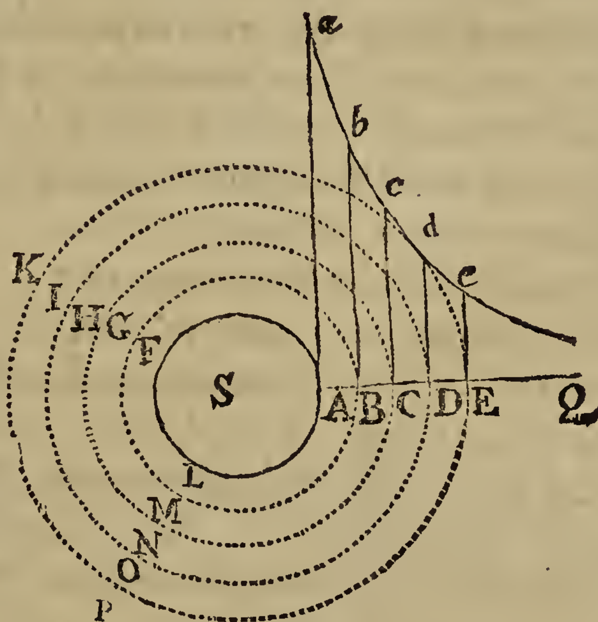
(m) * *Quoadusque tempora periodica cylindri utriusque æquentur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit & urget fluidi partes, motumque ipsis eâ actione communicat qui ad cylindrum exteriorem transit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales sunt, seu quamdiu tempora periodica non æquantur inter se.

PRO-

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro sphæræ.

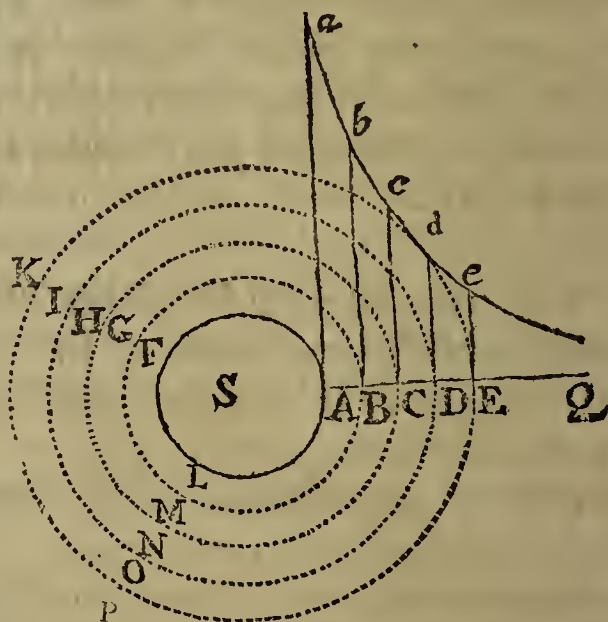
Cas. 1. Sit *AFL* sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *GHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc (n) est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differen-



(n) * *Hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro.* Nam superficies sphæricæ, ut pote similes, sunt ut quadrata radiorum seu distantiarum à centro.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

rentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis *DIO* reciprocè ut area *DdQ*, hoc est, per notas curvarum quadraturas, (o) directè ut quadratum distantiæ *SD*. (p) Id quod volui primò demonstrare.



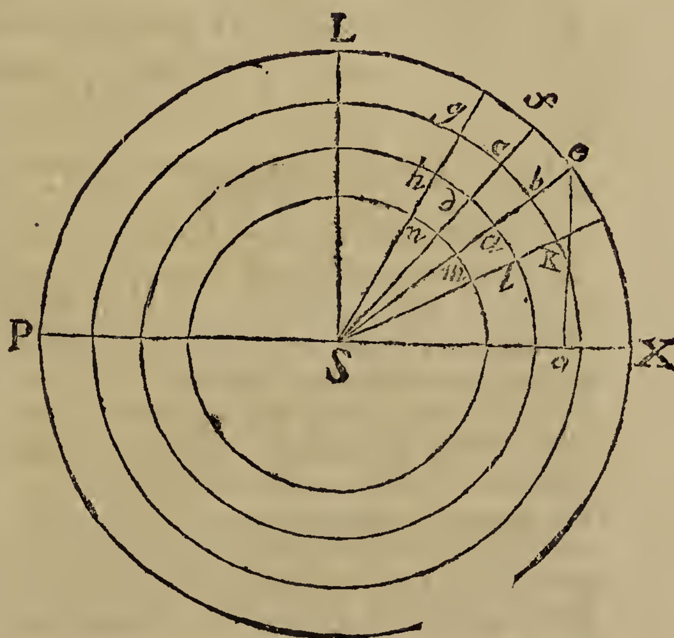
Cas.

(o) * *Directè ut quadratum distantiæ SD.* Areæ DdQ momentum est $Dd \times DE$, ideoque, ob ordinatam Dd cubo abscissæ SD reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^3}$, & propterea (*per cas. 4. Lem. 2. libri hujus*) area fluens DdQ est ut $\frac{1}{SD^2}$, quæ negativa prodit, quia non adjacet abscissæ DS, sed in plagam contrariam DQ vergit. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DIO reciprocè ut $\frac{1}{SD^2}$; hoc est; directè ut quadratum distantiæ SD.

(p) * *Id quod volui primò demonstrare.* Casûs primi demonstratio valet, si medium sphæræ circumfusum ex innumeris orbibus solidis, tenuissimis ac concentricis constare fingatur. In casibus secundo & tertio singuli illi orbes sphærici in innumeros annulos, & annuli singuli in tenuissimas particulas, ad constituendum medium fluidum, dividuntur.

(q) *Cas.* 2. A centro sphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectà pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus est; neque ideo motum, quo minus hâc lege fiat, impediet. Si annuli qui à cen-

(q) * *Casus* 2. A centro sphæræ S ducantur rectæ quam plurimæ, longitudine infinitæ S k, S b, S c, S g &c., quæ æquales angulos k S b, b S c, c S g &c. complectantur; & his rectis circa axem P X revolutis & superficies conicas describentibus, concipe orbes in annulos innumeros secari. Nam cùm superficies P f e X circa axem P X revolvitur, singuli arcus k b, b c, c g, e f, a l, &c. portiones superficierum sphæricarum annulares describunt, & particula quælibet ut b c d a, describit annulum solidum. Annulus unusquisque, ut ille qui revolutione superficiei a b c d describitur, habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ m a d n, alterum exteriorem ex revolutione figuræ b e f c, & duos laterales ex revolutione figurarum k b a l & c g h d. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque nisi in motu juxta legem Casûs primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perseverarent in motu suo uniformiter, sed intermedius iste annulus (contra hyp.) in motu suo acceleraretur vel retardaretur, ut de orbibus integris ostensum est in Casu primo. *Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum recta per-*



gens & inter duas proximas superficies conicas comprehensa, qualis est series annulorum quos figuræ m a d n, a b c d, b e f c &c. circa axem P X rotatæ describunt, *movebitur pro lege Casûs primi, nisi* &c.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IX. Prop. LII. Theor. XL.

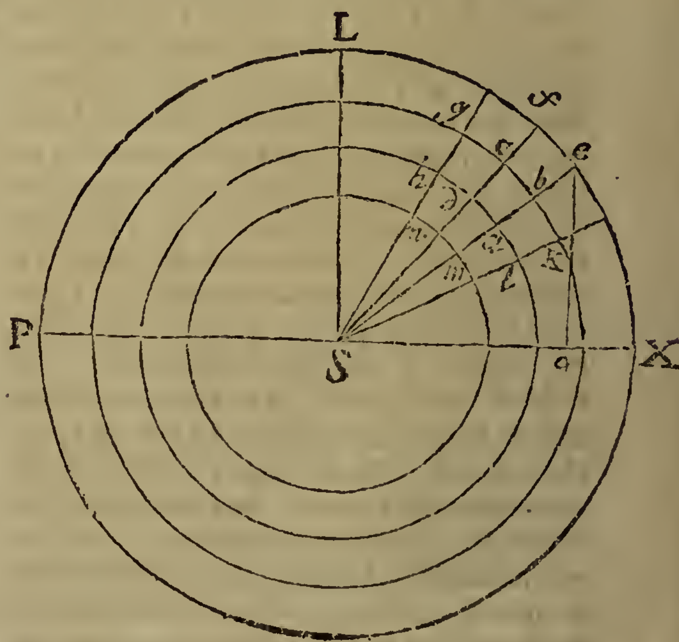
(r) centro æqualiter diſtant, vel citius revolverentur vel tardius (ſ) juxta polos quàm juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſûs primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundò demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motûs circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut prius. His ſectionibus annuli omnes quam minimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, (t) aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cùm motus circularis, & inde orta vis cen-

(r) * *Qui à centro æqualiter diſtant*; ſeu qui ſunt ex eodem orbe reſecti, quales ſunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d c g h & revolutione deſcripti.

(ſ) * *Juxta polos* X & P, quam juxta æquatorem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata deſcribit.

(t) * *Aut mutabunt æqualiter.* Quoniam enim hæ Sectiones non niſi ad fluiditatem ſingulis annulis conciliandam factæ ſunt, & fluidum homogeneum ſupponitur; ſi inde mutetur annulorum aſperitas & vis attritus mutui, mutabitur æqualiter ſeu in data ratione. Et idcirco manente reſiſtentiarum & impreſſionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effectuum inde productorum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum; & propterea partium ſingularum tempora periodica erunt, ut in ſuperioribus caſibus, proportionalia quadratis diſtantiarum ipſarum à centro globi.



centrifuga, major (u) ſit ad eclipticam quàm ad polos; debebit cauſa aliqua adeſſe quâ particulæ ſingulæ in circulis ſuis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam eſt, recedat ſemper à centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

(x) *Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, ſunt reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi, & velocitates abſolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quieſcente ſimilari & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iſte paulatim propagabitur in infinitum; neque prius ceſſabit in ſingulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica ſingularum partium ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob (y) majorem ſuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipſis eâ actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores ſimul transferunt, eâque actione (z) ſervant quantitatem motûs ſui planè

(u) * *Major ſit ad eclipticam quàm ad polos.* Quoniam particularum E & e in eodem orbe conſtitutarum tempora periodica æquantur, ipſarum vires centrifugæ ſunt inter ſe ut radii circulorum quos deſcribunt (*per cor.* 3. *prop.* 4. *lib.* 1.), hoc eſt, ut perpendiculares ad axem E S & e q. Vis igitur centrifuga eo major eſt, quo magis particula accedit ad æquatorem ſeu eclipticam S E, & in æquatore maxima eſt, in polo nulla.

(x) 328. * *Cor.* 1. Motus angulares ſunt reciproce ut tempora periodica (327), ideoque (ex demonſtratis) reciprocè ut quadrata diſtantiarum à centro globi. Velocitates abſolutæ particularum ſunt ut peripheriæ circulorum quas deſcribunt, ſeu ut ipſarum diſtantiæ ab axe directè, & tempora periodica inversè; & propterea ſunt ut diſtantiæ ab axe directè & quadrata diſtantiarum à centro globi inversè, ac proinde ſunt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diſtantias ab axe. Unde velocitates abſolutæ particularum in æquatore ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ à centro globi, & earum vires centrifugæ reciproce ut cubi diſtantiarum à centro globi (*per cor.* 1. *prop. IV. lib.* 1.). 328.

(y) * *Ob majorem ſuam velocitatem &c.* Velocitates angulares orbium à centro globi minus diſtantium majores ſunt (*per cor.* 1.) quàm velocitates angulares orbium exteriorum & à centro vorticis remotiorum; ſed orbes interiores exceſſu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt & urgent, *motumque ipſis* &c.

(z) * *Servant quantitatem motûs ſui planè invariatam.* Quia (*per hyp.*) ea eſt vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perſeveret in ſuo motu uniformiter, & in eâdem à centro diſtantia eodem

nè invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quòd motum omnem à materiâ interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem semper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus & vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus unà cum globo circa centrum alterius, & intereà latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione

dem semper tenore moveatur; & tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuò urgentur & ad motum accelerandum incitantur; necesse est ut motus perpetuo transferatur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem extimæ circumferentiæ absorbeatur. Quâ ratione fit ut orbium singulorum, qui eamdem motûs quantitatem in alios exteriores simul & semper transferunt, idem sit perpetuò motus.

ne datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fie- rent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſin- guli eâdem ratione quâ unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex om- nium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non defi- nientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in ſe mutuo, perpetuo movebun- tur de locis ſuis, uti in corollario ſuperiore expoſitum eſt; ne- que certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob ratio- nem in corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſ- cet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eamdem partem circa axem eundem re- volvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemi- diametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quàm ſint eorum tempo- ra periodica ut quadrata diſtantiarum à centro vorticis. Alia (a) nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quem- vis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. (b) Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis re- vo-

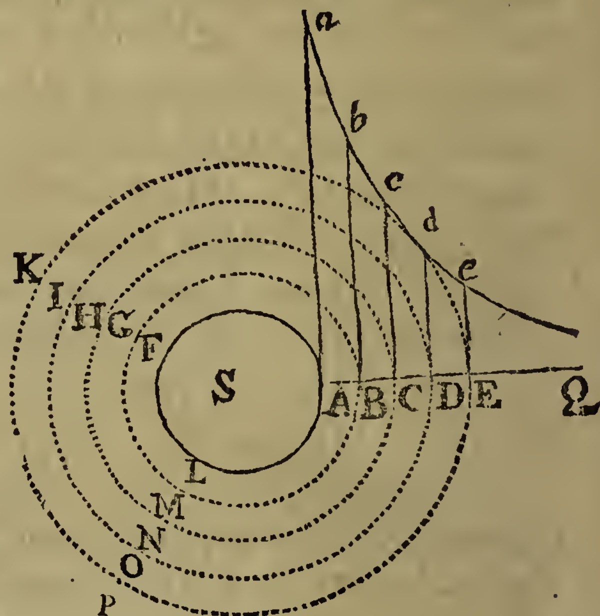
(a) * *Alia nulla vorticis conſtitutio po- teſt eſſe permanens.* Nam (ex demonſtr.) ea debet eſſe vorticis conſtitutio, ut pars quælibet fluidi poſſit in ſuo motu unifor- miter perſeverare, & ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm accelera- tur attritu ex altero latere.

(b) * *Cor.* 9. Fluidum ſimilare in va- ſe ſphærico E K P clauſum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in mo- tibus

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

volutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi, respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

tibus suis sine acceleratione & retardatione perseverent, quemadmodum in corollario 7. expositum est. In hâc hypothesi velocitates particularum in æquatore existentium sunt ut distantiæ à centro S inversè (228), & ideo ut SD ad SE, sive, ut peripheria DIO ad peripheriam EKP ita est peripheria EKP (quam particula E tempore suo periodico tE describit) ad spatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde spatium erit $\frac{EKP^2}{DIO}$. Quiescat jam vas sphæricum, hoc est, toti systemati vorticis auferatur vasis motus angularis, & particula D tempore tE describet spatium $\frac{EKP^2}{DIO} - DIO$. Sed hoc spatium est ad circumferentiam DIO, aut quod idem est, $SE^2 - SD^2$ est ad SD^2, ut tempus tE ad tempus periodicum (TD) particulæ D in vase quiescente, quod proinde tempus erit $\frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2}$. Et simili modo tempus periodicum particulæ A, quod dicatur TA, erit in vase quiescente $\frac{SA \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Si itaque detur motus globi, seu tempus periodicum TA, dabitur tempus $tE = \frac{TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2}$, & inde dabitur tempus periodicum $TD = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2} = \frac{SD^2 \times TA \times [SE^2\ SA^2]}{SA^2 \times [SE^2 - SD^2]}$. Si igitur vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam à centro distantiam. Concipe nunc planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi; sive pone SA^2 ad SE^2 ut TA ad quartum, quod erit $\frac{SE^2 \times TA}{SA^2} = \frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$; & tempus pe-



riodicum plani erit $\frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} - \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} = tE$, quia $TA = \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Quare planum, quo hic utitur NEWTONUS, ita movetur ut revolutionem suam absolvat eodem tempore tE, quo vas suam revolutionem perficit in hyp. cor. 7. Sit *X* tempus periodicum particulæ D respectu plani in vase quiescente; & quia planum & vortex in regiones contrarias moventur, erit TD ad *X* ut circumferentia DIO, quam particula D tempore periodico TD describit, ad ejusdem circumferentiæ partem quam eadem particula tempore *X* percurrit; & ideo pars illa erit $\frac{X \times DIO}{TD} = \frac{X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$, & pars residua circumferentiæ DIO, quam planum eodem tempore *X* conficit, erit $DIO - \frac{DIO \times X}{TD} = \frac{SD^2 \times DIO \times tE - X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$. Quia verò planum tempore tE uniformi motu revolutionem suam DIO absolvit, est

Corol. 10. Proinde ſi vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diverſum aliquem datâ cum velocitate quâcumque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam ſi ſyſtemati toti auferatur vaſis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter ſe qui prius, per corol. VIII. Et (c) motus iſti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quieſcant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas niſi violenter detentum, neque prius deſinent fluidum & vas accelerari, quàm ſint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod

eſt t E ad X ut D I O ad ſpatium modo inventum, ſeu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, & ideo $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde tempus $X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}$. Cùm ergo t E & S E ſint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D reſpectu plani prædicti eſt ut SD^2, ſive ut quadratum diſtantiæ à centro globi. Et quia omnium particularum in eodem orbe conſtitutarum tempora periodica æquantur inter ſe; earum omnium tempora periodica reſpectu plani ſunt ut quadrata diſtantiarum ſuarum à centro globi. Q. E. D.

(c) * *Et motus iſti per cor. 9. dabuntur*, proindeque ſi cum iis motibus datis componatur vaſis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vaſe data cum velocitate moto.

PROBLEMA.

329. Sphæra ſolida in fluido infinito & in eâdem à centro diſtantiâ ſimilari, ſed in diverſis diſtantiis in datâ quâvis diſtantiarum ratione inæqualiter denſo circà axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur & à ſphæræ impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo, ſitque reſiſtentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, in ratione compoſitâ ex ratione quâlibet denſitatis & ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi. 329.

Diſtinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis ut in demonſtratione prop. 52. factum eſt; dicanturque $AD = x$, fluidi denſitas in loco $D = z$, tranſlatio orbium ab invicem tempore dato $= v$, denſitas z ſit proportionalis dignitati x^n, & reſiſtentia, cæteris paribus, ſit ut $z^m v^p$, ſeu ut $x^{mn} v^p$. Quia ſuperficies ſphærica D I O, eſt ut x^2, erit impreſſio orbis D I O, in orbem contiguum, ut $x^{2+mn} v^p$; ſed ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias, ac proindè quantitas $x^{2+mn} v^p$, debet eſſe conſtans. Quarè erit v^p ut $\frac{1}{x^{2+mn}}$, & v ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$. Sunt autem differentiæ motuum angularium circà axem ut tranſlationes orbium applicatæ ad diſtantias, hoc eſt, ut $\frac{v}{x}$, ſive ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$. Sit jam $DE = dx$, & ordinata D d, ad curvam a b d e, ſit ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$ erit ſum-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

Quod si vas vi aliquâ detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motûs in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter se, & systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scho-

ma differentiarum, hoc est, motus totus angularis ut area D d Q, quæ est ut S. $\frac{dx}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}} = -\frac{p}{2+mn} \times \frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$; & tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia, sunt ut $x^{\frac{2+mn}{p}}$; neglectâ quantitate constante $\frac{p}{2+mn}$. Q. E. I.

330. *Cor.* 1. Si resistentia, cæteris paribus, sit ut velocitas, & tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, erit $p = 1$, & $\frac{2+mn}{p} = \frac{1}{2}$, ideóque $n = -\frac{1}{2m}$. Sed cùm resistentia proportionalis supponatur densitatis dignitati cujus index est m, & crescente densitate crescat, necesse est ut m sit numerus positivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè densitas, ut pote proportionalis dignitati x^n, crescente distantiâ in hypothesi corollarii hujus decrescet. Hoc autem repugnat. Nam materia vorticis eò densior esse debet quò longius distat à centro. Conatur enim materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis & propterea premit materiam omnem ulteriorem, eamque condensat, si condensari possit. Prætereà velocitas absoluta partium fluidi in æquatore vorticis est ut earum distantia à centro globi directè & tempus periodicum inversè, hoc est, in hypothesi cor. hujus ut $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ideóque vis centrifuga partium (*per cor.* 1. *prop.* 4. *lib.* 1.) cæteris paribus est ut $\frac{1}{x\,x}$, & proindè decrescit in ratione duplicatâ distantiæ auctæ. Ut igitur vortex ad statum permanentem reducatur, oportet ut partes densiores à centro recedant & rariores ad illud accedant, quo vis centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem & minorem distantiam nimia est, per minorem densitatem minuatur.

331. *Cor.* 2. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, hoc est, si $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, erit $p = \frac{4+2mn}{3}$, & ideò resistentia, cæteris paribus, ut velocitatis dignitas cujus exponens est $\frac{4+2mn}{3}$. Sed (*ex dem. cor.* 1.) m & n sunt numeri positivi. Quarè tempora periodica non possunt esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, quin index $\frac{4+2mn}{3}$ sit unitate major, & quin proindè resistentia, cæteris paribus, in majori ratione crescat quàm in ratione velocitatis auctæ.

332. *Cor.* 3. Si spatium quo vortex continetur sit ubique plenum & propterea medii densitas uniformis supponatur, littera

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materiâ quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Et hâc preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius (d) propagabit quàm pro ratione ſuperius aſſignatâ. Si

tera z quæ denſitatem exponebat; ſignificet jam fluiditatis defectum, ſitque reſiſtentia, cæteris paribus, ut dignitas z^m. His poſitis oſtendetur ut in cor. 1. & 2. factum eſt, quod ſi tempora periodica ſtatuantur in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius diſtat à centro, vel reſiſtentia augebitur in majori ratione quàm ea eſt in quâ velocitas relativa augetur.

333. *Cor.* 4. Si reſiſtentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quàm in ratione velocitatis, hoc eſt, ſi index p, ſit unitate minor, erit $\frac{2+mn}{p}$ binario major, & proindè tempora periodica partium vorticis erunt in majori ratione quàm duplicatâ ratione diſtantiarum à centro. Nam vel eſt $mn = 0$, quod contingit dùm eadem eſt ubique fluidi denſitas ac fluiditas, vel mn, eſt numerus poſitivus, quia defectus fluiditatis vel denſitas; auctis diſtantiis à centro augetur (*per cor.* 1.) 333.

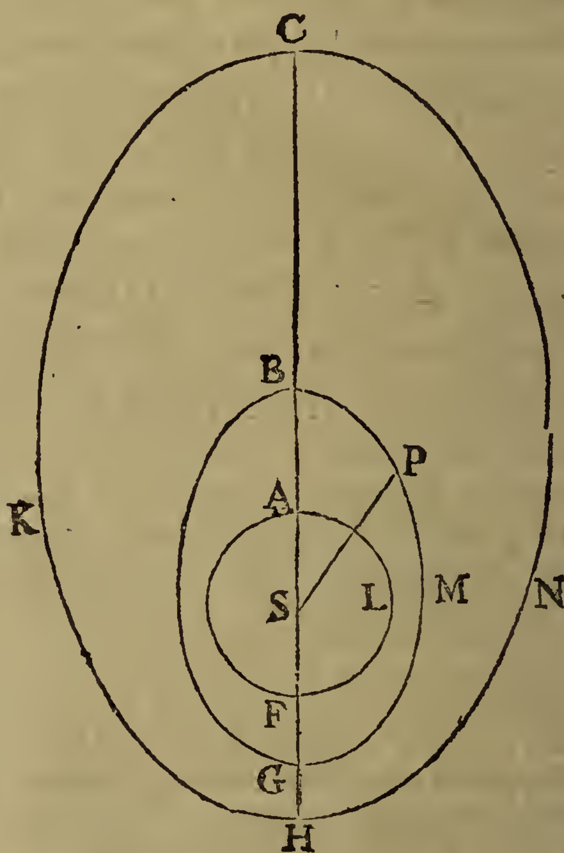
(d) * *Et longius propagabit quàm pro ratione ſuperiùs aſſignatâ.* In ſuperioribus demonſtrationibus NEWTONUS ſuppoſuit fluidum homogeneum eſſe & preſſionem ubique æqualem; ſi verò in diverſis à vorticis centro diſtantiis aliqua ſit partium fluidi aut preſſionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem reſtitui ſupponit, ut vortex in eodem ſtatu juxtà leges præſcriptas, permaneat. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt, magis cohærebit & ſegnior erit, ideóque motum à globo centrali communicatum difficiliùs ac tardiùs, cæteris paribus, recipiet; ſed illum longius propagabit. Nam ſi vorticis partes ità inter ſe & cum globo cohærerent, ut nullâ vi poſſent ſeparari, non poſſet globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tanquam

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

Si figura (e) vasis non sit sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quam proximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, (f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velo-

quam vectis rigidus, simul circumvolvetur. Undè quò magis partes illæ cohærent, eò longiùs motum à globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamsi materia vorticis homogenea non sit, & pressio inæqualis supponatur, vim suam obtinent difficultates, quas contrà vorticum in naturâ possibilitatem NEWTONUS proposuit in cor. 2. 4. 5. & 6. prop. 52.

(e) * *Si figura vasis non sit sphærica.* Sit C N H K, figura vasis in quo fluidum solo sphæræ A L F impulsu agatur in orbem, & particulæ fluidi quæ vasis superficiem C N H K, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, particulæ verò quæ sphæræ A L F proximæ sunt, circulos describent. Undè quò magis particulæ fluidi à sphærâ centrali distant, eò magis orbitarum quas describunt, figura à circulari differt & ad vasis figuram accedit. Quia verò particularum circulos describentium tempora periodica erant (*prop.* 52.) ut quadrata distantiarum à centro S; erunt in hoc vase ut quadrata mediocrium distantiarum quam proximè. Sic particulæ P orbitam B P G B describentis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum distantiæ P S, quæ est media arithmetica inter distantiam maximam B S, & minimam S G, sivè erit ut tempus periodicum particulæ P, circulum describentis, cujus radius P S. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, crescit ut velocitas absoluta decrescit; sed cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, & eadem proindè materiæ quantitas per latiora spatia ut C A, & per angustiora ut F H, simul transeat; oportet ut materiæ velocitas in spatiis latioribus minuatur, & in angustioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore describat orbitam B P G B, quo velocitate mediocri describeret circulum cujus esset radius P S.



(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non potest esse in statu permanenti quin particula P, in spatiis angustioribus L N, F H, ad centrum S acce-

velocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. (g) Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio vorticum innoteſcit per propoſitionis hujus corollarium ſextum.

Proprietates autem vorticum hâc propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſi quâ ratione phænomena cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam phænomenon eſt, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa ſolem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utriſque quam accuratiſſimè, quâtenus obſervationes aſtronomicæ hactenus prodidêre. Ideoque ſi planetæ illi à vorticibus circa jovem & ſolem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, (h) niſi vel materia vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat à centro, vel reſi-

accedat; & ideò neceſſe eſt ut in iiſdem ſpatiis conatus recedendi à centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quàm diminuitur per decrementum curvaturæ. Eſt enim vis quâ particula P, in loco G, nititur à circumferentiâ M G recedere, ut quadratum velocitatis particulæ directè & radius circuli curvam oſculantis in G, inversè (*cor.* 1. *prop.* 4. & *not.* 121. *lib.* 1.)

(g) * *Hæc ità ſe habebunt*, in vaſe rigido aut in ſpatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vaſe, juxtà *Carteſii* opinionem materia vorticis continetur. Ex his autem NEWTONI obſervationibus ſequitur. 1°. Planetarum qui circà *Carteſiani* vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores ſunt; & propterea excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem eſſe excentricitate orbitæ Saturni & omnium ſuperiorum planetarum, contrà obſervationes aſtronomicas. Sequitur 2°. in *Carteſianâ* hypotheſi explicari non poſſe cur planetæ ellipſes accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras deſcribant. Sequitur 3°. omnium orbitarum aphelia & perihelia à ſole ſpectata in iiſdem inter fixas locis eſſe poſita atquè immota manere; cùm tamen ex obſervationibus aſtronomicis certum ſit, planetarum aphelia à ſe invicem longe diſtare & lento motu agi. 333.

(h) * *Niſi vel materia vorticis eò fluidior ſit.* (Per not. 332.)

resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi; ex auctâ velocitate quâ partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majore ratione quàm ea est in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, (i) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem initio sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, tamen (k) resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. Quo (l) concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. (m) Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

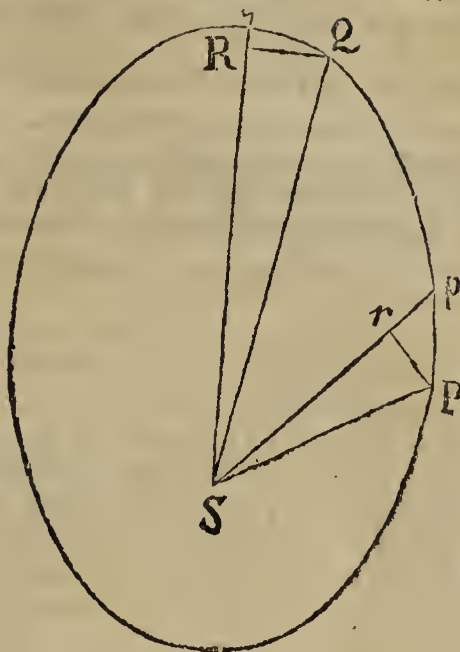
(i) * *Circumferentiam petent.* Id experientiâ constat; nam si aqua in vase contenta in vorticem agatur, paleæ & alia corpuscula minùs fluida petunt circumferentiam.

(k) * *Tamen resistentia in minori sit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc schol.).

(l) * *Quo concesso.* (per not. 353.)

(m) * *Viderint itaque Philosophi.* Difficultas crescit, si tria simul conjungantur, quæ primus omnium *Keplerus* mirâ sagacitate ex observationibus Astronomicis deduxit. Primum est, planetas in ellipsibus, quarum umbilicum sol occupat, revolutiones suas peragere. Secundum est planetas singulos radiis ad solem ductis, & satellites radiis ad suum primarium ductis, areas describere temporibus proportionales. Tertium est, tempora periodica planetarum circà solem & satellitum circà primarium suum, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro sui motûs. Ex hâc proportione colligitur planetarum velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi esse reciprocè in ratione subduplicatâ distantiarum illarum; Sint enim D, & d, mediocres planetarum distantiæ T & t, eorum tempora periodica, & quoniam in singulis planetarum orbitis parva est distantiæ maximæ & minimæ differentia, si conferatur cum differentiâ quæ inter distantias duorum planetarum intercedit, spatia temporibus T & t, descripta erunt quam proximè ut distantiæ D & d; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ & $\frac{d}{t}$, hoc est, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, sivè ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$ & $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, seu in subduplicatâ ratione mediocrium distantiarum inversè, in quâ etiam ratione sunt velocitates partium vorticis circularis in distantiis D & d, à sole (*per prop.* 53.). Verùm per alteram analogiam, arearum scilicet & temporum, velocitates partium vorticis circularis sunt in ratione simplici distantiarum à sole reciprocè. Nam si planeta P, orbitam ellipticam $P\,Q\,q\,p$ describat & radiis ad umbilicum S ductis areas æquales $S\,P\,p$, $S\,Q\,q$, tempusculo dato verrat,

fiat; centro S & radiis SP, SQ describantur arcus circulares quam minimi Pr, QR, qui radiis SP, Sq, occurrant in r, & R, erit area $SPp = SP \times Pr = SQq = SQ \times QR$, & hinc $Pr : QR = SQ : SP$. Sed Pr & QR sunt ut spatia circularia eodem tempore descripta ideóque ut velocitates circulares partium vorticis in P, & Q; Quarè velocitates illæ sunt in ratione inversâ distantiarum. Porrò quàm difficile sit ab his aliisque contradictionibus hypothesim vorticum liberare, ex variis hâc de re eruditorum Dissertationibus satis manifestum est. Vid. *Leibnitii* tentamen de motuum cælestium causis, *Villemotii* opus de vorticibus; Illustrissimi Marchionis *Poleni* dialogum de eâdem materiâ; Dissertationes Celeber. Virorum *Saurini* in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., *Bulffingeri* de causâ gravitatis, *Joan. Bernoulli* Cogitationes novas de Systemate Cartesii, ejusdem Physicam Cœlestem inter Academiæ Præmia, Domini *De Molieres* Lectiones Physicas.



Illustrium Authorum qui vorticum hypothesim strenuè vindicarunt, varias hâc de re Dissertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites nostrum est. Eam enim NEWTONUS sibi vel maximè impugnandam assumit vorticum hypothesim quam *Cartesius* ipse constituerat, natasque post primi autoris mortem hujus systematis emendationes quam plurimas saltem directè non petit. At silentio prætermittere non licet Dissertationem Doctissimi Viri *Joan. Bernoullii* ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratam, cui titulus est: *Cogitationes novæ de Systemate Cartesii.* Existimat Clariss. Autor superiorum propositionum demonstrationes mero sophismate laborare, eò quod NEWTONUS orbium contiguorum & sese mutuo atterentium impressionem solùm definierit ex superficierum magnitudine & velocitate relativâ quâ ab invicem separantur; earum verò superficierum pressionem minimè consideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major est in majoribus rotis & minor in minoribus. Verùm licet in suis demonstrationibus pressionem ubique æqualem supposuerit NEWTONUS, hujus tamen pressionis inæqualitatem in scholio consideravit, & quid ex illâ sequatur, generatim ostendit. Vim quidem vectis prorsùs neglexit, & meritò quidem, quantum intelligere possumus. Quamvis enim in vecte rigido cujus partes simul eodem motu angulari circà hypomoclion revolvuntur, eò major sit efficacia quo cæteris paribus longior est vectis; quod videlicet vectis partes eò celeriùs moveantur, quò major est earum ab hypomoclio distantia, id tamen ad partes medii fluidi quæ circà centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licèt NEWTONUS orbes solidos, demonstrationis gratiâ, primùm fingat, eos tamen divisos supponit ac deindè in particulas innumeras subdividit ut demonstratio ad naturam medii fluidi accommodetur. Quod si ob qualemcumque partium fluidi cohæsionum, aliqua habenda sit ratio vis vectis, certè ea non videtur assumenda distantiæ à vorticis centro proportionalis, quemadmodùm fit in vecte perfectè rigido, seu cujus partes vi quasi infinitâ connexæ supponuntur & eodem motu angulari revolvuntur. 335

Cæterùm Celeber. *Joan. Bernoulli* aliam usurpat hypothesim quæ Mechanicis perspecta nondùm est certòque explorata. Supponit enim cum D. *Amontons* in Monum. Paris. an. 1699. resistentiam quæ oritur ex frictione superficierum contiguarum utcumque inæqualium, manente earum-dem

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

dem in ſeſe mutuò preſſione, conſtantem eſſe; verùm hypotheſis illa minùs placuit Clariſſ. *Wolfio* qui de eâ his verbis loquitur in Elementis Mechanices num. 965.: Equidem *Amontons* regulam univerſalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet caſu ſuperandam, ſed cùm omnem frictionem à ſolâ appreſſione ex pondere ſuperincedentis derivet, ex antecedentibus ſatis apparet quod propoſito ſatisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratiſſimis experimentis tentarunt Celeber. Philoſophi *Deſaguilliers* & *Muſchenbroek*; At eam haud ſatis conſtantem obſervarunt, ut patet ex iis quas *Muſchenbroek* tom. 1. Phyſices deſcripſit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hâc de re pronuntiari poteſt. NEWTONUS tamen conjecturam fecit reſiſtentiam in minori eſſe ratione quàm ea velocitatis eſt, eo forſan ductus argumento quod in Hiſtoriâ Acad. Reg. an. 1709. hoc ferè modo exponitur: ſi concipiantur ſuperficies innumeris eminentiis aſperæ, dum alia ſuper aliam incedit, ſuperficiei ſuperioris eminentiæ intrà cavitates inferioris, dato tempore, preſſionis vi penetrant, ſitque reſiſtentia major, ſi intrà ſuperficiei inferioris cavitates altiùs ingrediantur ſuperficiei ſuperioris eminentiæ, at verò ſi major ſit velocitas, ſuperior ſuperficies intrà inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc ſi Clariſſ. *Parentii* ratio valeat, ſatis patet reſiſtentiam in minori eſſe ratione quàm ea velocitatis eſt. Attamen Clariſſ. *Muſchenbrock*, factis experimentis, reſiſtentiam velocitati proportionalem in motibus tardioribus invenit, in celerioribus verò eam in majori quàm velocitatis ratione obſervavit.

Aſſumit D. *Bernoullius* impreſſiones orbium contiguorum in ſe mutuò factas, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione ſummæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum uſquè vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem ſeparantur, & ex ratione diſtantiæ orbium illorum à centro; undè per analyſim deducit tempora periodica partium vorticis ſphærici homogenei eſſe in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ diſtantiarum à centro; earum verò celeritatem ſub æquatore eſſe reciprocè in ratione radicis cubicæ quadrati diſtantiarum à centro. Si in hypotheſi *Bernoullii* negligatur vis vectis, eodem calculo quo uſus eſt, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ diſtantiarum à centro; Si verò ſupponamus impreſſiones orbium in ſe mutuò factas, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione preſſionum, ratione velocitatum relativarum & ratione ſuperficierum, tempora periodica *Bernoulliano* calculo inveniuntur quadratis diſtantiarum proportionalia, uti NEWTONUS per ſuam hypotheſim invenerat; & ſi cum his tribus rationibus componatur ratio diſtantiæ à centro ut vis vectis exprimatur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis ſeptimæ diſtantiarum à centro. Hæ verò analogiæ omnes à regulâ illâ *Kepleriana*, quâ tempora periodica ſtatuuntur eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum, diſſentiunt. Ut ergò vorticis ſphærici leges cum *Kepleri* ſancitis conciliet *Bernoullius*, ſupponit denſitatem vorticis eſſe in ratione ſubduplicatâ diſtantiæ centro reciprocè, planetas verò non eſſe ejuſdem prorſùs denſitatis cum medio fluido in quo primùm collocati ſunt, ideòque ob majorem vel minorem ſuam denſitatem in eo medio ſucceſſivè deſcendere & aſcendere, intereadùm circulari motu vorticis abripiuntur, ex quibus motibus ſimul compoſitis naſcuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ & apheliorum lentiſſimi motus. Sed medium illud in quo planeta, cùm denſior eſt, deſcendit, & ubi rarior eſt, aſcendit, vel grave eſt in centrum vorticis vel non. Si grave non ſit, planeta in medio rariori poſitus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi à centro recedere & ſpiralem trajectoriam deſcribendo in infinitum abire debet; & contrà, planeta in medio denſiori primùm collocatus, ad centrum per ſpiralem lineam perpetuò accederet, quod medii denſioris major eſſe debeat vis centrifuga quàm planetæ rarioris. Si medium grave ſit in centrum vorticis, ipſiuſque denſitas, decreſcentibus diſtantiis à centro, creſcat; cæleſtis materiæ denſitas, ob parvam orbitarum quas planetæ deſcribunt, excentricitatem, æqualis aſſumi poteſt den-

ſitati

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eâdem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contra, si vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, nisi quâtenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium à centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in fluidum resolutum fit pars vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materiâ vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius sit, (n) jam magis conabitur recedere à centro vorticis quàm prius; ideoque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet à centro & revol-

sitati cujusque planetæ huic materiæ innatantis; atque adeò densitas cælestis materiæ ad distantiam saturni æqualis erit densitati saturni, ad distantiam Jovis, Martis &c. æqualis erit densitati horum planetarum, & omnes illæ densitates erunt inter se in ratione subduplicatâ distantiarum à sole reciprocè. Si itaque telluris densitas mediocris supponatur æqualis densitati aquæ, materia cælestis inter solem & tellurem constituta aquâ densior erit & corporum motui maximè resistet. Sed ut ex Cometarum motibus, aliisque observationibus constat, materia cælestis inter solem & tellurem motui corporum minimè resistit. Nam Cometarum motus sunt summè regulares, & easdem leges cùm planetarum motibus observant, & in omnes cæli plagas liberrime feruntur, atque ad solem usque ferè penetrant sine resistentiâ. 333.

(n) * *Jam magis conabitur.* Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (*per def.* 8. *lib.* 1.) & materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione densitatis (2. *lib.* 1.).

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IX. Prop. LIII. Theor. XLI.

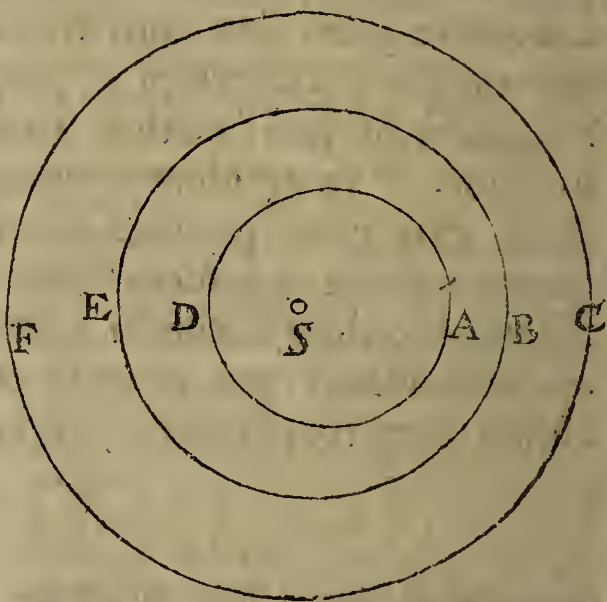
volvendo describet spiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi à centro vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet planetas à vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ secundum hypothesin *Copernicæam* circa solem delati revolvuntur in ellipsibus umbilicum habentibus in sole, & radiis ad solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus sit soli concentricus, & interiorum duorum aphelia sint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad solem ducto areas temporibus proportionales describendo, (°) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius



(°) * *Movebitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales areæ, & proinde æquales arcus, hoc est, æqualia spatia describuntur.

dius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, (p) secundum leges Astronomicas; cùm tamen (q) secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quàm in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter se. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio Signi Piscium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quàm in principio Virginis in (r) ratione trium ad duo. Nam quò angustius est spatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hâc Materiâ cœlesti relativè quiescens ab eâ deferretur, & unà circa Solem revolveretur, (s) foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialterâ. (t) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, & in principio

(p) * *Secundùm leges Astronomicas.* Quoniam axis ellipseos per aphelium B & perihelium E transit, estque ellipsi normalis, area quam radius vector S B tempore quam minimo describit, erit æqualis rectangulo ex distantiâ S B in arcum quam minimum à corpore in B descriptum; & similiter area æqualis quam radius vector S E eodem tempore quam minimo describit, æquatur rectangulo ex distantiâ S E ductâ in arcum à corpore in E descriptum, & ideò prior arcus est ad posteriorem, hoc est, velocitas in B, est ad velocitatem in E, ut distantia S E, ad distantiam majorem S B.

(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, æquales materiæ quantitates per spatium angustius A C, & per spatium latius D F, ut fit in fluviis, eodem tempore transeunt, & propterea materia vorticis in spatio angustiore inter A & C, velociùs movetur quàm in spatio latiore inter D & F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore transit per spatium A C, vel D F, est ut spatium hoc directè & materiæ velocitas mediocris inversè, & ideò mediocris velocitas materiæ inter A & C, est ad mediocrem velocitatem materiæ inter D & F, ut F D ad A C.

(r) * *In ratione trium ad duo.* (per not. præced.).

(s) * *Foret hujus velocitas.* Ex observationibus Astronomicis constat terram inter Veneris & Martis orbes positam esse.

(t) * *Undè solis motus diurnus apparens.* Hic motus est angulus quem sol, radiis ad terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die describere nobis videtur, quem quidem angulum terra, radiis ad solem ductis, in hypothesi *Coperniceâ*, conficit. Porrò notissimum est, circulum illum quem sol inter fixas motu annuo describere videtur, ab

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LIII. THEOR. XLI.

cipio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta octo: & cùm tamen (experientiâ teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quàm in Principio Piſcium. (u) Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur, intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.

ab Aſtronomis dividi in partes duodecim æquales, ſeu ſigna quorum hæc duo virgo & piſces ſunt directè oppoſita, ità ut dum terra in hypotheſi *Copernici*, eſt in principio Piſcium, ſol appareat in principio Virginis & contrà. Cùm igitur angularis velocitas terræ in principio Piſcium ſit ad ejus velocitatem angularem in principio Virginis ut 3 ad 2, ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis eſt ad ejus motum apparentem in principio Piſcium in eâdem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius eſt minutorum primorum 59 & ſecundorum 8, ſeu ſecundorum 3548, qui numerus dicatur M; Quarè ſi ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis, ponatur $= M + X$, & in principio Piſcium $= M - X$, erit $M + X : M - X = 3:2$, unde invenitur $X = \frac{1}{5} M = 707''$ quam proximè, ac proindè erit $M + X = 4255'' = 70' + 55''$, & $M - X = 2841'' = 47' + 21''$. Ergò ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta octo; cùm tamen ex obſervationibus Aſtronomicis ſol in principio Virginis è tellure viſus motu diurno conficere videatur minuta prima 58 tantùm in principio piſcium minuta prima 60 ſeu gradum unum.

(u) * *Itaque hypotheſis vorticum*. Quoniam verticis materia circulos deſcribit æquatori vorticis parallelos, neceſſe eſt (*per hanc prop.* 53.) ut planetæ omnes ferantur in orbitis æquatori parallelis, ſed obſervatum eſt nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones ſuas abſolvere, & cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem eſt difficultas ſi per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta ſeu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vid. Acta Erudit. Lipſ. an. 1686. & 1695.; Diaria Erudit. 1703. 1707. Monumenta Acad. Pariſ. 1709. Diſſertationes Clar. *Hugenii* & *Bulffingeri* de causâ gravitatis.

FINIS TOMI II.

